

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Сибирское отделение
ГНЦ "Институт ядерной физики имени Г.И.Будкера"

На правах рукописи

Данилов Вячеслав Васильевич

**Физическое решение проблемы подавления сильных
неустойчивостей в накопителях**

01.04.20 - физика пучков заряженных частиц и
ускорительная техника

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук
Шатунов Юрий Михайлович,
старший научный сотрудник
Переведенцев Евгений Алексеевич

Новосибирск 1995

Содержание

Введение	3
1 Основные уравнения	7
1.1 Наведенные поля и силы	7
1.2 Общие уравнения.	9
1.2.1 Коллективные силы.	13
1.3 Вывод укороченных уравнений.	15
1.3.1 Укороченные уравнения в присутствии хроматизма.	17
1.3.2 Частные случаи уравнений	18
2 Решение уравнений коллективного движения	20
2.1 Уравнения для "полого" сгустка	20
2.2 Решения уравнений для уплощенной ямы	21
2.3 Построение приближенных решений усредненных уравнений.	25
2.4 Построение аппарата для произвольного случая	28
2.4.1 Циркулянтная матрица	28
2.4.2 Матрица силы	31
2.4.3 Нелинейное синхротронное движение	33
2.4.4 Двумерная сетка	33
2.5 Свойства собственных частот системы	34
2.5.1 "Шахматная симметрия" матрицы коллективной силы	34
2.5.2 Обобщенная симплектичность и попарно-обратные собственные числа	36
2.6 Зависимость порога неустойчивости от параметров сгустка	38
2.6.1 Влияние диффузии в синхротронном движении на частоты	41

2.6.2	Связь между затуханием Ландау и частотами мод	42
2.6.3	К вопросу о полноте спектра	43
3	Взаимодействие интенсивного сгустка с обратной связью	44
3.0.4	Усредненные уравнения в присутствии однооборотной обратной связи	45
3.0.5	Уравнения для осцилляторной обратной связи	46
3.0.6	Точное описание взаимодействия однооборотной и осцилляторной обратных связей с интенсивным сгустком	48
3.1	Обратная связь с запаздыванием	53
4	Устранение порога СПМ-неустойчивости с помощью обратной связи	56
4.1	Устранение неустойчивости с помощью осцилляторной обратной связи	56
4.1.1	Основной принцип	56
4.2	Усредненное движение	58
4.3	Алгоритм для уравнений с локализованными по азимуту силами и обратной связью	62
4.3.1	Расширение алгоритмов на радиальные моды	64
4.4	Обратная связь с запаздыванием	66
4.5	Практические аспекты использования полученных алгоритмов	67
5	Продольное движение	70
	Заключение	73
	Приложение I	75
	Приложение II	80
	Литература	87

Введение

Анализ коллективного движения частиц в интенсивном сгустке, циркулирующем в ускорителе, является актуальной проблемой в современной физике ускорителей. Возникающие из-за взаимодействия с вакуумной камерой неустойчивости ограничивают максимальный ток частиц.

Все эффекты, связанные с взаимодействием пучка частиц с окружающей его структурой, можно поделить на многооборотные и однооборотные.

Многооборотные эффекты связаны с запоминанием полей в высокодобротных элементах вакуумной камеры (резонаторах и т.п.), однооборотные эффекты обусловлены взаимодействием пучка с наведенными полями, которые значительно уменьшаются к следующему обороту сгустка.

За последние 20 лет достигнут существенный прогресс как в понимании, так и в устранении многих неустойчивостей, ограничивающих ток в накопителях. Так, для устранения многооборотных неустойчивостей, нужно правильно выбрать рабочую точку машины, либо понизить добротность паразитных гармоник элементов вакуумной камеры и т.д. В случае однооборотных эффектов причиной важного класса неустойчивостей является хроматизм частот. Это связано с тем, что в его присутствии частицы имеют сдвиг фазы бетатронных колебаний относительно наведенных полей, что приводит к неустойчивости некоторых собственных колебаний сгустка. Этот важный класс неустойчивостей был впервые описан в [1, 2]. Они могут быть подавлены резистивной обратной связью (в случае дипольных колебаний) или устранением хроматизма.

Помимо хроматических слагаемых в декрементах (инкрементах) поперечных колебаний имеются и такие, которые связаны с поперечной составляющей плотности тока [3]. При этом для разных мод мнимые добавки частот от наведенных таким движением полей могут иметь разные

знаки.

О собственных колебаниях сгустка (или модах) нужно сказать подробнее. Под ними понимаются такие состояния сгустка, когда функция распределения меняется от оборота к обороту по экспоненциальному закону, при этом пространственные распределения сгустка, взятые в одной точке по азимуту в разные моменты времени, являются подобными, различаясь лишь на множитель. Такие состояния являются полным аналогом собственных векторов в линейной алгебре, при этом собственное число, соответствующее данному собственному вектору, есть мнимая экспонента от частоты колебаний данного состояния (собственного вектора).

Теория интенсивных пучков в накопителях в 60е-70е годы активно использовала аппарат теории возмущений математической физики в первом порядке по изменению частот движения частицы в накопителе наведенными полями. Это сводится к следующему: если сдвиги или декременты частот коллективного движения частиц малы по сравнению с частотами колебаний, то усреднив действие полей на каком-либо собственном состоянии сгустка мы получим хорошую оценку для сдвигов и декрементов данного состояния, при этом сдвиги пропорциональны средней величине $\overline{F \cdot x}$, а декременты $\overline{F \cdot v}$ соответственно (здесь F - сила, наведенная данным собственным состоянием сгустка, x и v есть координата и скорость частицы, при этом в продольном направлении под ними в ультрарелятивистском случае понимаются отклонение от продольной координаты равновесной частицы и отклонение от энергии равновесной частицы). Метод усреднения, примененный к решению уравнения Власова, дал универсальный метод расчета спектров когерентных колебаний пучка (см., например, [4]). Анализ различных типов неустойчивостей с помощью теории возмущений подробно изложен в монографии [7].

По мере возрастания интенсивности сгустков появилась потребность в анализе уравнений со сдвигами частот коллективного движения, сравнимыми с частотами невозмущенного движения. Одна из первых работ по продольному движению сгустка с сильным изменением частот коллективных колебаний была выполнена Ф.Захерером (F.Sacherer) [8]. В ней было показано, что при сдвигах частот продольных мод сгустка порядка синхротронной частоты может происходить спаривание частот с появлением у них мнимых составляющих, что ведет к продольной неустойчивости сгустка.

В дальнейшем актуальность этих вопросов подтверждена была практикой. Так, анализ ограничения тока в накопителе Petra (Гамбург) показал, что оно связано с неустойчивостью Связи Поперечных Мод или СПМ неустойчивостью (в английском варианте - TMC (Transverse Mode Coupling) instability). Простая оценка для порога впервые была изложена в [9].

В настоящее время СПМ-неустойчивость ограничивает интенсивность практически на всех крупных накопителях (LEP(ЦЕРН), Petra, ВЭПП-4(Новосибирск), ESRF(Гренобль)) с интенсивным коротким сгустком. Кроме того считается, что неустойчивость связи продольных мод является причиной турбулентного удлинения сгустка. Имеющиеся обратные связи помогают отодвинуть порог неустойчивостей на некоторых машинах на несколько десятков процентов (PETRA, ESRF, ВЭПП-4), в то время как на самой большой установке (LEP) обычная обратная связь вообще не помогает повысить порог. Возможности обратных связей влиять на сильные неустойчивости в накопителях впервые обсуждались в [5, 6].

Новизна данной работы заключается в том, что представленный в ней пространственно-временной подход ведет к относительно простому описанию коллективных эффектов и получению спектра колебаний для произвольной величины возмущения обычного движения наведенными полями в случае линейного и нелинейного продольного движения; кроме того, получен эффективный метод нахождения собственных частот колебаний сгустка, взаимодействующего с сосредоточенными элементами вакуумной камеры. Аппарат позволил включить в рассмотрение взаимодействие интенсивного сгустка с произвольной линейной обратной связью. На основе полученных решений дана достаточно полная картина зависимостей порога СПМ-неустойчивости от различных параметров (длины сгустка, свойств наведенных полей, синхротронной частоты и т.д.). Полученные результаты по взаимодействию обычной обратной связи с интенсивным сгустком находятся в соответствии с экспериментальными данными.

Основным результатом работы является демонстрация возможности устранения порога неустойчивостей с помощью достаточно стандартных устройств. Так, в случае коротких сгустков трудно или невозможно получить с пикапа информацию о распределении дипольного момента по длине сгустка, значение снятого сигнала обычно пропорционально пол-

ному дипольному моменту пучка. То же относится и к кикеру - он дает одинаковое отклонение для всех частиц короткого сгустка (мерой длины здесь является радиус вакуумной камеры). Наведенные же поля существенно различаются для частиц в голове и хвосте пучка из-за ультрарелятивизма, поэтому устранение эффекта с помощью обратной связи невозможно. Однако оказывается, что при выборе определенной функции отклика сигнала кикера на сигнал пикапа можно устранить зависимость частот мод пучка от тока. В работе предложены способы повышения порога неустойчивости связи мод, один из которых уже успешно опробован на накопителе LEP, а также проверен с помощью трекинга частиц.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений.

В первой главе диссертации, носящей характер введения, выводится интегродифференциальное уравнение, описывающее коллективное движение сгустка в поперечном направлении. Далее выводятся приближенные усредненные уравнения для получения модельных решений.

Во второй главе полученные уравнения решаются в простейших случаях, обсуждаются зависимости порогов неустойчивости от различных параметров, строится аппарат расчета порогов неустойчивостей в произвольном случае. Данный аппарат позволяет получить общие свойства частот коллективного движения.

Третья глава посвящена описанию взаимодействия обратной связи с интенсивным сгустком. В ее начале рассчитывается спектр коллективных колебаний пучка при взаимодействии с обычной обратной связью. Результаты сравниваются с экспериментальной ситуацией на накопителях, далее строится аппарат для описания взаимодействия сгустка с произвольной обратной связью.

В четвертой главе на основе разработанного аппарата предлагаются такие параметры обратных связей, которые устраняют СПМ-неустойчивость.

В главе пятой результаты, полученные для поперечного движения, переносятся на продольный случай.

В Заключении перечислены основные результаты работы.

Глава 1

Основные уравнения

1.1 Наведенные поля и силы

Общепринятый путь анализа коллективных эффектов состоит в том, что сначала выводится общее кинетическое уравнение (уравнение Власова) для функции распределения частиц, а затем оно решается для разных случаев.

В данной работе все уравнения и полный анализ их решений для поперечного движения выводятся прямо из релятивистских уравнений движения частиц простейшими средствами. Это связано с тем, что наведенные поля в первом (дипольном) приближении зависят только от среднего дипольного момента частиц и не зависят от функции поперечного распределения частиц. Кроме того, изложение с помощью простого матричного аппарата механики способствует относительно легкому получению уравнений движения в присутствии обратной связи и их анализу. В последней главе аналогичные уравнения продольного движения выводятся из уравнения Власова.

Известно, что в ультрарелятивистском пределе поле, сопровождающее движение частиц, резко несимметрично. Рассматривая только однооборотные эффекты обычно ограничиваются следующей моделью: на элементе вакуумной камеры пролетающей частицей наводятся поля, которые действуют только на задние частицы, при этом изменение их угла пропорционально координате передней частицы, умноженной на некоторую функцию, которая является электродинамической характеристикой

данного элемента [10].

Возьмем для примера симметричную по горизонтали "длинную" (ТЕМ) линию. Частица, вылетающая не по центру, возбуждает парафазную волну, которая распространяется назад и действует одинаково (пренебрегая переходной областью на краях пластин) на задние частицы. Если на длине сгустка набег бетатронной фазы мал, то такое взаимодействие пучка можно описать как мгновенное изменение угла частиц, пропорциональное дипольному моменту передних частиц. Кроме таких полей возникают и другие, пропорциональные углу частиц. В "длинной" линии при ненулевом угле летящей частицы возникает проекция скорости на электрическое поле ТЕМ волны. В результате возникают передняя и задняя ТЕМ-волны, пропорциональные углу частицы. Введем обозначения для таких сил.

Пусть изменение поперечного импульса задней частицы есть δp . Тогда по определению

$$\delta p = e^2(xW(\Delta s) + x'G(\Delta s)), \quad (1.1)$$

где e -заряд электрона, x и x' -соответственно координата и угол передней частицы, W и G есть функции расстояния между частицами Δs .

Такое обозначение W -функции с точностью до константы ($-\frac{1}{c}$) отличается от общепринятого (см. [10]); для локализованных сил это определение наиболее естественно.

В приложении 1 получены функции W и G для согласованной "длинной" линии для случая, когда набег бетатронной фазы мал как на длине сгустка, так и на длине линии.¹

$$W = \frac{Z_0}{2a^2} = const;$$

$$G = -\frac{Z_0}{2a^2}L = const.$$

В общем случае, когда поля от передней частицы действуют через заметное время, взаимодействие с элементом вакуумной камеры нужно разбить на меньшие части (уже с малым набегом бетатронной фазы) и

¹Такая область параметров характерна для современных накопителей с достаточно короткими сгустками. Так, для накопителя LEP набег фазы на сгустке (с длиной $\sim 1cm$) составляет приблизительно 10^{-4} радиана

в каждой части найти функции W и G , пересчитав координату и угол передней частицы к продольной координате задней. Можно рассмотреть и нелокализованные взаимодействия с наведенными в вакуумной камере полями, все эти случаи приводятся к анализу очень близких уравнений. Единственный случай, когда для наведенных полей нельзя пользоваться определением (1), это когда изменение фазы частиц на длине сгустка за счет коллективных полей, возникающих на каком-нибудь элементе вакуумной камеры, не мало уже на одном пролете через этот элемент; однако интенсивности сгустков современных накопителей на несколько порядков ниже тех, которые требуются для такого сильного изменения фазы частиц.

Далее всюду будут рассматриваться локализованные (точечные) взаимодействия сгустка с коллективными полями, при этом, кроме специально оговоренных случаев, мы будем пренебрегать вторым членом в уравнении (1), поскольку его действие приводит к быстрому затуханию, т.е. дает декремент, который, как правило, в абсолютном выражении на несколько порядков меньше, чем когерентный сдвиг частот.

В заключение приведем еще две W -функции, последняя из которых будет использована в работе. Для дипольной моды резонатора

$$W(s) = \frac{R\omega_r}{Q\bar{\omega}} \exp(-\alpha s/c) \sin \frac{\bar{\omega}s}{c}, \quad (1.2)$$

где R, ω_r - параметры резонатора, $\alpha, \bar{\omega}$ - его декремент и частота [10].

Для случая длинного сгустка для полости с зазором d и с радиусом вакуумной камеры a

$$W(s) \sim \frac{d}{ca^2} \delta(s), \quad (1.3)$$

где $\delta(s)$ есть дельта-функция Дирака [11].

Для практических оценок это выражение будет использоваться с заменой δ -функции на экспоненту с длиной локализации порядка радиуса вакуумной камеры, с таким коэффициентом, чтобы интеграл силы для этих выражений был бы одинаков.

1.2 Общие уравнения.

Рассмотрим для начала сгусток с одной синхротронной амплитудой a_s для всех частиц и равномерным распределением по синхротронной фазе

(так называемый "полый" сгусток). Для удобства далее мы будем использовать нормализованные координаты (для обозначений дипольных моментов, углов и т.д.) $\frac{x}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\epsilon} \cos \psi$ и $-\sqrt{\epsilon} \sin \psi$ (здесь ϵ обозначает эмиттанс, а ψ - бетатронную фазу). Вместо времени используем переменную τ которая является фазой Флоке, деленной на бетатронную частоту $d\tau = \frac{ds}{\omega_b \beta}$. В этих переменных бетатронная матрица перехода имеет очень простой вид:

$$\begin{vmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{vmatrix}$$

где μ есть набег фазы.

Итак, частицы вращаются по кругу в синхротронной плоскости радиуса a_s . Введем переменные D, D' , означающие сумму дипольных моментов частиц и их производных с одной продольной координатой $s = a_s \cos \phi_s$. Эта сумма состоит из координат частиц с двумя фазами $\pm \phi_s$.

\bar{D}, \bar{D}' - это разность дипольных моментов и их производных для плюс и минус ϕ_s .

В бетатронном движении для этих переменных справедливы простейшие уравнения осциллятора:

$$\begin{aligned} dD/d\tau &= \omega_b D' & d\bar{D}/d\tau &= \omega_b \bar{D}' \\ dD'/d\tau &= -\omega_b D & d\bar{D}'/d\tau &= -\omega_b \bar{D} \end{aligned}$$

Далее введем единую переменную для частиц с положительными и отрицательными синхротронными фазами. Сама фаза не может служить такой переменной, так как она увеличивается к голове сгустка для верхних частиц и уменьшается для нижних. В качестве единой переменной возьмем $\phi = |\phi_s|$, она естественно связана с продольной координатой $s = a \cos \phi$.

Поскольку полные производные относятся к силам, действующим на совершающие синхротронные колебания частицы, то для выяснения изменений, происходящих с дипольным моментом в фиксированной точке сгустка, мы должны перейти от полных производных по времени к частным. При этом

$$\frac{dD}{d\tau} = \frac{dD^+}{d\tau} + \frac{dD^-}{d\tau} = \frac{\partial D}{\partial \tau} + \omega_s \left(\frac{\partial D^+}{\partial \phi} - \frac{\partial D^-}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial D}{\partial \tau} + \omega_s \frac{\partial \bar{D}}{\partial \phi},$$

здесь знак минус следует из $\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = -\omega_S$ для нижних частиц с $\phi_s < 0$ (индексы + и - относятся соответственно к верхним и нижним частицам).
Заменив подобным образом все полные производные по времени имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial \phi} &= \omega_b D' \\ \frac{\partial D'}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \phi} &= -\omega_b \bar{D}' \\ \frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial D}{\partial \phi} &= \omega_b \bar{D}' \\ \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial D'}{\partial \phi} &= -\omega_b \bar{D} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Сумму и разность дипольный моментов и их производные, можно разложить на Фурье-гармоники по фазе ϕ :

$$D, D' = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n, d'_n \cos n\phi, \bar{D}, \bar{D}' = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{d}_n, \bar{d}'_n \sin n\phi.$$

2

Далее выделим гармонику с номером n , т.е. определим строение собственных функций. После подстановки Фурье-рядов в уравнения движения имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_n}{\partial \tau} + n\omega_S \bar{d}_n &= \omega_b d'_n \\ \frac{\partial d'_n}{\partial \tau} + n\omega_S \bar{d}'_n &= -\omega_b \bar{d}'_n \\ \frac{\partial \bar{d}_n}{\partial \tau} - n\omega_S d_n &= \omega_b \bar{d}'_n \\ \frac{\partial \bar{d}'_n}{\partial \tau} - n\omega_S d'_n &= -\omega_b \bar{d}_n. \end{aligned} \quad (1.5)$$

² так как \bar{D} есть разность дипольных моментов, то на краях ($\phi = 0, \pi$) она равна нулю. Отсюда естественно в сумме для \bar{D}, \bar{D}' стоят синусы фазы. Дипольные моменты D, D' связаны с разностью через производную по ϕ , поэтому в они выражаются через косинусы этой переменной.

Далее, прибавляя к первому уравнению четвертое и вычитая из второго третье, получим для $X_n = d_n + \bar{d}'_n$, $X'_n = d'_n - \bar{d}_n$ ³:

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_n}{\partial \tau} &= (\omega_b + n\omega_S)X'_n \\ \frac{\partial X'_n}{\partial \tau} &= -(\omega_b + n\omega_S)X_n\end{aligned}\quad (1.6)$$

Аналогично для $Y_n = d_n - \bar{d}'_n$, $Y'_n = d'_n + \bar{d}_n$ имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_n}{\partial \tau} &= (\omega_b - n\omega_S)Y'_n \\ \frac{\partial Y'_n}{\partial \tau} &= -(\omega_b - n\omega_S)Y_n\end{aligned}\quad (1.7)$$

Можно выделить собственные функции X_m , занулив Y_m , или, что то же самое, положив $d_n = \bar{d}'_n$ и $d'_n = -\bar{d}_n$, и наоборот.

Таковы устройства собственных функций с номером n (для $n = 0$ существует одна функция $X_0 = Y_0$). Амплитуды гармоник d_n, d'_n могут быть получены и обычным способом. Полагая

$$D(D')[\phi_s, \tau] = \sqrt{\epsilon} \cos(-\sin)[\psi_0 + \omega_b \tau + m(\phi_s - \omega_S \tau)],$$

мы получим все то же после введения суммы и разности дипольных моментов для $+\phi_s$ и $-\phi_s$, при этом Y_m будет соответствовать отрицательным номерам

$$X_{-m} = Y_m.$$

Далее нас будут интересовать изменения дипольного момента во времени в результате действия наведенных полей. В нормализованных переменных сила в уравнениях движения должна быть умножена на $\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}$; здесь β есть квадрат огибающей. В присутствии силы уравнения будут выглядеть следующим образом:

³ для нулевого номера имеем $X_0 = d_n$, $X'_0 = d'_n$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial \bar{D}}{\partial \phi} &= \omega_b D' \\
\frac{\partial D'}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial \bar{D}'}{\partial \phi} &= -\omega_b D' + 2\omega_b \beta^{\frac{3}{2}} \frac{F}{\gamma m c^2} \\
\frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial D}{\partial \phi} &= \omega_b \bar{D}' \\
\frac{\partial \bar{D}'}{\partial \tau} + \omega_S \frac{\partial D'}{\partial \phi} &= -\omega_b \bar{D}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

где γ есть релятивистский фактор, m - масса частицы.

Заметим, что в правой части четвертого уравнения нет коллективной силы, так как она, в отличие от силы магнитной структуры, одинакова для всех частиц при одном s (т.е. не зависит от их координат), а разности дипольных моментов (для $\pm \phi_s$) должна соответствовать разность коллективных сил (которая из вышесказанного равна нулю), отсюда же удвоение силы для второго равенства.

Это есть полные уравнения на изменение дипольного момента частиц с определенной амплитудой синхротронных колебаний, уравнения на гармоники могут быть получены следующим образом:

подставим $D, D' = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n, d'_n \cos n\phi = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n, X'_n$, $\bar{D}, \bar{D}' = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{d}_n, \bar{d}'_n \sin n\phi$, умножим 1 и 3 на $\cos n\phi$, 2 и 4 на $\sin n\phi$, проинтегрировав от 0 до π и собрав уравнение для собственных функций X_n, Y_n как ранее, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X_n}{\partial \tau} &= (\omega_b + n\omega_S) X'_n \\
\frac{\partial X'_n}{\partial \tau} &= -(\omega_b + n\omega_S) X_n + \frac{4\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \cos n\phi \frac{F}{\gamma m c^2}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где X_n - ранее найденные собственные функции, $-N \leq n \leq N$.

1.2.1 Коллективные силы.

Вначале сделаем важное замечание: все приведенные выше уравнения были получены с учетом соотношения $\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \omega_s$, при этом линейность

синхротронного движения нигде не использовалась. Поэтому полученные уравнения верны и для нелинейной ямы с гамильтонианом H с учетом того факта, что частота зависит от гамильтониана. Уравнения на фазу есть $\frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \omega_s(H)$

Введем для заданной потенциальной ямы $U(s)$ гамильтониан синхротронного движения

$$H = \frac{\alpha}{2} \delta^2 + U(S),$$

где динамические переменные есть

$$S = \frac{cs}{\Pi^2} \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\Delta E}{E},$$

здесь α - коэффициент уплотнения орбит, Π - периметр накопителя, E и ΔE есть равновесная энергия и отстройка от нее, соответственно. Новую фазу мы можем записать в таком виде:

$$\phi = \frac{2\pi}{T(H)} \int^s \frac{dS'}{\sqrt{2\alpha(H - U(S'))}},$$

так что,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2\pi}{T(H)} = \omega_s(H).$$

Итак, уравнения (1.9) после замены переменной фаза и замены ω_s на $\omega_s(H)$ остаются справедливыми и для произвольной синхротронной ямы. Выпишем силу для одного локализованного элемента с данной функцией $W(s)$, в точке s она получается суммированием дипольных моментов частиц с учетом функции распределения по синхротронным амплитудам $g(H)$ и функции $W(s)$:

$$F(s) = Ne^2 c \delta (z - z_0) \int_s^\infty ds' W(s - s') \int_{U(\frac{cs'}{\Pi^2})}^\infty D_u(s', H) \frac{g(H) dH}{\sqrt{2\alpha[H - U(s)]}}, \quad (1.10)$$

где z_0 обозначает месторасположение элемента в накопителе, D_u обозначает обычный дипольный момент $D_u = \sqrt{\beta} D$, s - относительное расположение частиц в сгустке, функция распределения $g(H)$ в синхротронной фазовой плоскости колебаний нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(H) ds d\delta = 1.$$

В выражении для силы переменными являются s и H , а в уравнениях (1.9) дифференцирование идет по ϕ , поэтому для согласования переменных после интегрирования в (1.10) нужно выразить s через H и ϕ .

Общие уравнения (1.9) с выше выписанной силой должны выполняться для любых ϕ и H , они являются двумерными интегро-дифференциальными уравнениями и аналитическое решение их получить в общем виде не удастся. Далее будет построен аппарат для эффективного численного построения решений, однако для понимания проблемы обычно хорошо помогают решения упрощенных (модельных) уравнений, поэтому для начала будут разобраны случаи усредненных уравнений для полого сгустка, когда все частицы сгустка имеют одну синхротронную амплитуду, а также случай полностью уплощенной потенциальной ямы синхротронного движения.

1.3 Вывод укороченных уравнений.

Средний дипольный момент частиц в каждой точке можно представить в виде $D = A \cos(\psi + \omega_b \tau)$, где A и ψ есть медленные переменные амплитуда и фаза. Вдали от резонансов при небольших (по сравнению с бетатронным движением) возмущениях и при малой синхротронной частоте изменения медленных переменных хорошо описываются усредненными уравнениями [12]:

$$\frac{d A e^{i\psi}}{d\tau} = \frac{\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}}{i \gamma m c^2} \int_0^T F e^{-i\omega_b \tau} \frac{d\tau}{T} = \bar{F}, \quad (1.11)$$

где время интегрирования T должно быть много больше периода бетатронных колебаний.

В локализованной силе от "быстрого" времени зависит дипольный момент $D_u = A\sqrt{\beta}\cos(\omega_b\tau + \psi)$, кроме того, время входит в азимутальную модуляцию силы (множитель $c\delta(z - z_0)$). Усреднение с использованием выражения для $\tau(\omega_b d\tau = \frac{dz}{\beta})$ функции $Dc\delta(z - z_0)$ дает

$$\frac{1}{i} \int_0^T A \cos(\omega_b\tau + \psi) c\delta(z - z_0) e^{-i\omega_b\tau} \frac{d\tau}{T} = \frac{c}{2i\beta\omega_b T_0} A \exp(i\psi), \quad (1.12)$$

где T_0 есть период обращения. Следовательно, выражение $D_u c\delta(z - z_0)$ в силе (1.10) нужно заменить на $\frac{c}{2i\sqrt{\beta}\omega_b T_0} A \exp(i\psi)$.

Введем для удобства переменную "медленного" дипольного момента $\mathcal{D} = A \exp(i\psi)$.

Далее, по аналогии с предыдущим параграфом, дипольный момент \mathcal{D} делится на две части (для $\pm\varphi_s$):

$$\mathcal{D}(\varphi) = A^+ e^{i\psi^+} + A^- e^{i\psi^-} = \mathcal{D}^+ + \mathcal{D}^-.$$

Здесь, как и ранее, $\phi = |\phi_s|$. Переписывая в уравнениях (1.11) полные производные через частные, имеем:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} + \left(\frac{\partial\mathcal{D}^+}{\partial\varphi} - \frac{\partial\mathcal{D}^-}{\partial\varphi} \right) \cdot \omega_s.$$

Знак минус появился из-за разного направления движения \mathcal{D}^+ и \mathcal{D}^- , или, что то же самое, из-за разного знака производных $\varphi = |\varphi_s|$ для частиц с положительным и отрицательным смещением энергии от равновесного значения.

Полные усредненные уравнения выглядят так:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\tau} + \frac{\partial\bar{\mathcal{D}}}{\partial\varphi} \cdot \omega_s = 2\bar{F}, \quad (1.13)$$

и аналогично,

$$\frac{d\bar{\mathcal{D}}}{d\tau} = \frac{\partial\bar{\mathcal{D}}}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\varphi} \cdot \omega_s = 0. \quad (1.14)$$

Здесь D, \bar{D} есть соответственно сумма и разность частиц с синхротронной фазой $\pm\varphi_S, \bar{F}$ берется из (1.11). Выражая из второго \bar{D} и подставив в первое, имеем

$$\omega_S^2 \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 D}{\partial \tau^2} = -2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \tau}. \quad (1.15)$$

Преыдущее уравнение более компактно, чем уравнения (1.9). Это связано с усреднением уравнений и переходом к комплексным переменным. Они справедливы тогда, когда возмущения малы по сравнению с бетатронным движением, при этом синхротронное движение, также как и изменения амплитуды и фазы за счет наведенных полей, считается медленным.

1.3.1 Укороченные уравнения в присутствии хроматизма

Все полученные выше уравнения справедливы для случая нулевого хроматизма. В его присутствии медленная фаза меняется не только за счет наведенных полей, но и за счет отклонений энергии частицы от равновесного значения. В отсутствии полей медленную бетатронную фазу можно представить в виде двух частей: хроматического слагаемого X , меняющегося в процессе изменения синхротронной фазы φ , и константы ζ . Таким образом,

$$\psi_{tot} = \zeta + X = \zeta - \xi \omega_0 a_0 \cos \varphi / c\alpha, \quad (1.16)$$

где $\xi = \frac{\partial \nu_b}{\partial \ln \gamma}$, ω_0 -частота обращения, α - коэффициент уплотнения орбит.

Уравнения в присутствии хроматизма выглядят так:

$$\frac{d A e^{i\psi_{tot}}}{d\tau} = \frac{2\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}}{i\gamma m c^2} \int_0^T F e^{-i\omega_b \tau} \frac{\omega_b d\tau}{T} + i A \xi \omega_0 a_0 \omega_S \sin \varphi / c\alpha, \quad (1.17)$$

Подставив из (1.16) ψ_{tot} в это уравнение, имеем

$$e^{iX} \frac{d A e^{i\zeta}}{d\tau} = \frac{2\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}}{i\gamma m c^2} \int_0^T F e^{-i\omega_b \tau} \frac{\omega_b d\tau}{T} = \bar{F}. \quad (1.18)$$

Для новой переменной $Ae^{i\zeta}$ имеем:

$$\frac{d Ae^{i\zeta}}{d\tau} = e^{-iX} \frac{2\omega_b \beta^{\frac{3}{2}}}{i\gamma mc^2} \int_0^T F e^{-i\omega_b \tau} \frac{\omega_b d\tau}{T} = e^{-iX} \bar{F}. \quad (1.19)$$

Мы видим, что для новой переменной $\mathcal{D}_N = Ae^{i\zeta}$ выполняются старые уравнения (1.15), но с силой, домноженной на хроматический множитель e^{-iX} .

1.3.2 Частные случаи уравнений

Возьмем частный случай распределения в синхротронной плоскости $g(a) \propto \delta(a - a_0)$. Это случай так называемого полого сгустка, когда все частицы имеют одну синхротронную амплитуду. Сила (1.10) равна

$$F(\phi) = kc\delta(z - z_0) \int_0^\phi W(a \cos \phi' - a \cos \phi) D_u(\phi') d\phi', \quad (1.20)$$

где $k = \frac{Ne^2}{\pi}$, N - количество частиц, D_u - обычный (не нормированный на $\sqrt{\beta}$) средний дипольный момент сгустка.

В соответствии с выкладками предыдущего параграфа нужно усреднить эту силу и подставить в (1.15). С учетом всех коэффициентов и нормировок для нулевого хроматизма имеем:

$$\omega_S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \tau^2} = -K \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{i} \int_0^\varphi W(a \cos \phi' - a \cos \phi) \mathcal{D}(\varphi') d\varphi', \quad (1.21)$$

где $K = \frac{Ne^2 \beta(z_0)}{2\pi \gamma mc T_0}$, здесь $\mathcal{D} = Ae^{i\psi}$ - нормированный "медленный" дипольный момент.

В присутствии хроматизма с новой переменной $\mathcal{D}_N = Ae^{i\zeta}$ уравнения имеют следующий вид:

$$\omega_S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}_N}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{D}_N}{\partial \tau^2} = -K \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{e^{-iX(\varphi)}}{i} \int_0^\varphi W(\Delta s) e^{iX(\varphi')} \mathcal{D}_N(\varphi') d\varphi', \quad (1.22)$$

где $\Delta s = a \cos \phi' - a \cos \phi$, $X = -\xi \omega_0 a_0 \cos \varphi / c\alpha$.

В случае, когда силы зависят не только от координат, но и от углов, после усреднения под интегралом появляется мнимое слагаемое, которое дает инкремент или декремент даже при малых токах. Из последней формулы можно видеть, что наличие хроматизма эквивалентно замене $W(s - s_0)$ на $W(s - s_0)e^{-i\xi\omega_0(s-s_0)/c\alpha}$ ⁴. Наличие новой "эффективной" W -функции с мнимыми слагаемыми дает сразу декременты и инкременты коллективных мод, поскольку оно эквивалентно возникновению сил, пропорциональных скорости частиц.

Итак, ситуации с хроматизмом частот включаются в полную теорию путем простой замены коллективной силы, кроме того для достижения высокой интенсивности сгустка обычно устанавливается нулевое (или слегка положительное) значение хроматизма, поэтому далее уравнения с хроматизмом рассматриваться не будут.

Возьмем случай полностью уплощенной потенциальной ямы синхротронного движения. Это соответствует случаю сильного потенциального удлинения сгустка (см., например, [14]). Частица внутри сгустка имеет относительную скорость движения $y = \text{const}$ ($y > 0$, она является модулем скорости и аналогом $\varphi = |\varphi_s|$) и резко отражается от его краев. Удобной переменной в этом случае является s .

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = y = \text{const}$$

Из (1.15) с учетом замены φ на s имеем:

$$y^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \tau^2} = -\frac{K}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\mathfrak{L}} ds W(\Delta s) \int_0^\infty g(y) \mathcal{D}(s, y) dy \quad (1.23)$$

где $\Delta s = a \cos \phi' - a \cos \phi$, $K = \frac{Ne^2 \beta(z_0)}{2L\gamma mcT_0}$, здесь L - длина сгустка, а $g(y)$ - распределение частиц по модулю скорости, $\int_0^\infty g(y) dy = 1$.

Это уравнение, как и уравнение полого сгустка, можно решить точно для некоторых видов W -функций.

⁴замечание Д.Г.Виллевалда

Глава 2

Решение уравнений КОЛЛЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1 Уравнения для "полого" сгустка

Рассмотрим уравнения (1.21).

Введем новую переменную α , которая является комплексной частотой. Будем искать решения в виде $\mathcal{D}(\varphi, t) = d(\varphi) \cdot e^{i\alpha t}$, подставив в (1.21) и сократив экспоненту, для $W = \text{const}$ имеем:

$$d'' + \frac{\alpha^2 d}{\omega_S^2} + \frac{\alpha Q}{\omega_S^2} \int_0^\varphi d(\varphi') d\varphi' = 0, \quad (2.1)$$

где $Q = \frac{Ne^2 W \beta(z_0)}{2\pi \gamma mc T_0}$,

Или, нормируя α и Q на синхротронную частоту ω_S ,

$$d''' + \alpha^2 d' + \alpha Q d = 0. \quad (2.2)$$

Для нахождения α мы должны сформулировать граничные условия.

На краях сгустка разность потоков равна нулю, имеем $\bar{D} = 0 \quad |_{\varphi=0, \pi}$ (по определению этой переменной из предыдущей главы), следовательно из (1.14): $d' = 0 \quad |_{\varphi=0, \pi}$. Третье условие можно получить из (2.1): в голове сгустка $d'' + \alpha^2 d = 0 \quad |_{\varphi=0}$.

Итак, нахождение собственных частот (2.2) сводится к решению трансцендентного уравнения, которое может быть получено следующим

образом: для фиксированного Q и α решения $d(\varphi)$ есть сумма трех экспонент $d(\varphi) = C_1 e^{\lambda_1 \varphi} + C_2 e^{\lambda_2 \varphi} + C_3 e^{\lambda_3 \varphi}$, где λ_i - корни уравнения

$$\lambda^3 + \alpha^2 \lambda + \alpha Q = 0.$$

Три граничных условия дают три уравнения на C_i :

$$\begin{aligned} C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3 &= 0 \\ C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 \pi} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 \pi} + C_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 \pi} &= 0 \\ C_1 (\lambda_1^2 + \alpha^2) + C_2 (\lambda_2^2 + \alpha^2) + C_3 (\lambda_3^2 + \alpha^2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где α есть собственная частота.

Для существования решений необходимо равенство нулю детерминанта матрицы M этих уравнений, этот детерминант есть функция α , следовательно мы получаем трансцендентное уравнение для нахождения собственных частот. На точную разрешимость этой задачи, как и задачи, изложенной в следующем разделе, впервые было указано в работе [13].

На рисунке 2.1 изображены несколько решений уравнения $\det M = 0$ как функции Q (решения получены с помощью численного решателя трансцендентных уравнений).

Мы видим, что после слияния действительных частот двух мод образуются моды с мнимыми частотами, устойчивые ($Im \alpha > 0$) и неустойчивые ($Im \alpha < 0$). Пороговым током неустойчивости принято считать минимальное значение тока, при котором возникают мнимые части. В данном случае из численного решения $Q_{th} = \frac{N_{th} e^2 W \beta(z_0)}{2 \omega_S \pi \gamma m c T_0} \simeq .362$, отсюда $N_{th} \simeq 2 \frac{.362 \pi \omega_S \gamma m c T_0}{e^2 W \beta(z_0)}$.

2.2 Решения уравнений для уплощенной ямы

Рассмотрим уравнения (1.23) с $W = W_0 \delta(s)$. Решим их в данном случае с начальными условиями $\mathcal{D}(0, y, s) = 0$, $\frac{\partial \mathcal{D}(0, y, s)}{\partial \tau} = h \cos ns$.

Для простоты мы взяли одну гармонику с номером n ; как мы увидим далее, для такой W -функции гармоники с разными n не связаны.

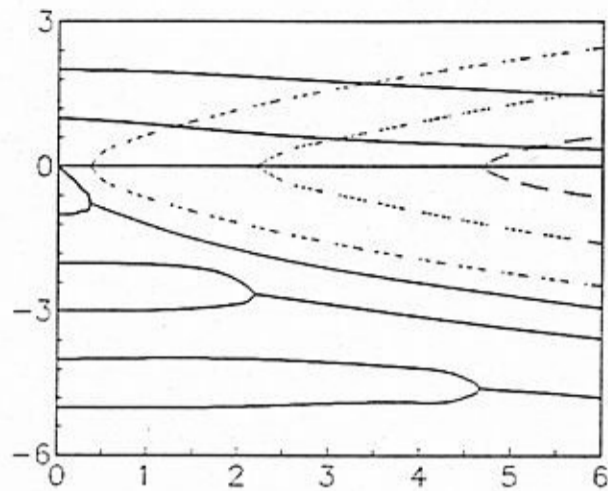


Рис. 2.1: Частоты мод Ω в зависимости от параметра Q .

Воспользуемся аналогом преобразования Лапласа. Само преобразование произвольной функции f выглядит так:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+a}^{i\infty+a} e^{pt} F(p) dp. \quad (2.4)$$

где F есть Лаплас-образ f , интегрирование в последнем интеграле ведется по контуру, который лежит правее всех полюсов подынтегрального выражения; это дается выбором константы a .

Чтобы придерживаться общих обозначений, мы должны считать, что все величины от времени зависят как $e^{i\alpha t}$; сделаем замену в (2.4) $p = +i\alpha$, тогда чтобы перейти от образу F обратно к функции, мы должны с новой переменной α интегрировать выше всех особенностей подынтегрального выражения. Формула преобразования выглядит так:

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} \bar{e}^{i\alpha t} f(t) dt,$$

$$f(t) = + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{+i\alpha t} F(\alpha) d\alpha, \quad (2.5)$$

$$f(t) = + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-ia}^{\infty-ia} e^{+i\alpha t} F(\alpha) d\alpha, \quad (2.5)$$

Подставим в (1.23) $\mathcal{D} = d \cos \frac{n\pi s}{L}$, домножим на $\bar{e}^{i\alpha t}$ и после сокращения пространственной зависимости имеем:

$$-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} y^2 \tilde{d} + \alpha^2 \tilde{d} = -\alpha C N \int_0^{\infty} \tilde{d} g(y) dy - h, \quad (2.6)$$

где \tilde{d} есть образ d , $C = \frac{e^2 W_0 \beta(z_0)}{2L \gamma m c T_0}$, h - константа из начальных условий частиц.

Легко решить получившееся интегральное уравнение - нужно подставить \tilde{d} в виде $\tilde{d} = \frac{B+h}{n^2 y^2 - \alpha^2}$, где B - искомая константа. Подставив данное выражение в (2.6), имеем:

$$B = (B+h) \alpha C N \int_0^{\infty} \frac{g(y)}{n^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 y^2 - \alpha^2} dy. \quad (2.7)$$

Сделаем небольшое отступление. В полученном выражении нужно определиться в интегрировании выражения с полюсом $y = \alpha/n$. Согласно правилу Ландау мы должны выбрать такой обход полюса, чтобы это соответствовало бесконечно медленному включению поля от времени $t = -\infty$. Тогда интеграл будет иметь определенный физический смысл и обозначать сумму дипольных моментов частиц, раскачиваемых гармонической силой с ее плавным включением при $t = -\infty$. В нашем случае это соответствует отрицательной мнимой добавке к α , т.е. полюс должен обходиться сверху. Далее, значение интеграла мы должны распространить на все частоты так, чтобы мы могли пользоваться обратным преобразованием (2.5), где обход при интегрировании совершается выше всех особенностей подинтегральной функции. Для этого мы должны получить аналитическое продолжение интеграла с помощью деформирования контура выше полюсов $y = \alpha/n$; другими словами, найдя аналитическое выражение для α с отрицательными мнимыми частями распространить это выражение на все α . В кинетической теории контур выбирается ниже полюсов интегрируемой функции; здесь отличие от нее связано с тем, что временная зависимость там принимается в виде $e^{-i\omega t}$, а в нашем случае $e^{i\alpha t}$.

Возьмем нормированное на единицу распределение по скоростям в виде $g(y) = \frac{2y_0}{\pi} \frac{1}{y^2 + y_0^2}$. Вычислим по правилу, изложенному выше, интеграл в уравнении для B :

$$\int_0^{\infty} \frac{2y_0}{\pi} \frac{1}{y^2 + y_0^2} \frac{dy}{n^2 \frac{\pi^2}{L^2} y^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha(\alpha - iy_0|n|\frac{\pi}{L})}$$

Мы получили линейное уравнение для B :

$$B = -(B + h)CN \frac{1}{\alpha - iy_0|n|\frac{\pi}{L}},$$

$$B = -\frac{hCN}{\alpha - iy_0|n|\frac{\pi}{L} + CN}$$

Подставим полученное для B значение в выражение для \tilde{d} . Имеем:

$$\tilde{d}(\alpha) = \frac{h}{n^2 \frac{\pi^2}{L^2} y^2 - \alpha^2} \left(1 - \frac{CN}{\alpha - iy_0|n|\frac{\pi}{L} + CN}\right)$$

Чтобы получить $d(\tau)$ мы должны перейти от Фурье-образа к функции по времени с помощью второй формулы из (2.5), подставив \tilde{d} вместо $F(p)$ и проинтегрировав выше всех полюсов подинтегрального выражения. Интегрирование элементарно; мы его проделывать не будем, только заметим, что в выражении для \tilde{d} имеются три полюса, два из них ($\alpha = \pm n y_0 \frac{\pi}{L}$) дают колебания мод с собственными частотами, не зависящими от тока. Полюс $\alpha = iy_0|n|\frac{\pi}{L} - CN$ есть полюс Ландау, в решении для $d(\tau)$ он дает член пропорциональный

$$e^{-y_0|n|\tau - iCN}; \quad (2.8)$$

его временная зависимость есть затухание дипольного момента, зависящее от разброса (затухание Ландау), и колебания со сдвигом частот, пропорциональным току.

Для решения общей задачи мы должны разложить начальное состояние по гармоникам. Для каждой из них решение приведено выше, следовательно мы имеем полное решение задачи в этом случае; в сравнении с полым сгустком эта задача двумерна; здесь дипольный момент зависит от s и от y .

Далее полученные аналитические решения будут использоваться для приближенного анализа уравнений в случаях более сложных W -функций.

2.3 Построение приближенных решений усредненных уравнений.

Для построения решений уравнений для полого сгустка и для уплощенной ямы в предыдущих разделах использовались конкретные виды W -функций. Можно пытаться построить приближенные решения интегродифференциальных уравнений (1.9), оставляя конечное количество гармоник дипольного момента по синхротронной фазе. Возьмем усредненные уравнения (1.14) для полого сгустка:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\tau} + \frac{\partial\bar{\mathcal{D}}}{\partial\varphi} \cdot \omega_S = 2\bar{F}, \quad \frac{d\bar{\mathcal{D}}}{d\tau} = \frac{\partial\bar{\mathcal{D}}}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\varphi} \cdot \omega_S = 0. \quad (2.9)$$

Здесь

$$2\bar{F} = \frac{-K}{i} \int_0^\varphi W(a \cos \varphi' - a \cos \varphi) \mathcal{D}(\varphi') d\varphi',$$

$$K = \frac{Ne^2\beta(z_0)}{2\pi\gamma mc T_0}.$$

Ограничимся для начала двумя модами, теми, которые спариваясь первыми, дают неустойчивость сгустка. Это моды "0" и "-1" (см. рисунок 2.1). Здесь и далее классификация мод полого сгустка такова: номер моды означает отличие ее начальной частоты от бетатронной (в единицах синхротронной частоты). При нулевом токе решения для $\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}$ с учетом граничных условий (см. пункт 2.1) есть:

$$\mathcal{D} = e^{i\alpha\tau} u, \quad \bar{\mathcal{D}} = 0,$$

для $\alpha = 0$ и

$$\mathcal{D} = e^{i\alpha\tau} v \cos \varphi, \quad \bar{\mathcal{D}} = i e^{i\alpha\tau} v \sin \varphi,$$

для $\alpha = -\omega_S$; u и v есть произвольные константы.

Подставим решение в виде суммы двух мод в уравнение (2.9), умножим на единицу и на $\cos \varphi$ и проинтегрируем от нуля до π ; другими словами, сделаем проекцию силы на эти две моды. Мы получим два уравнения на константы u и v :

$$\begin{aligned} u\alpha\pi &= -K \int_0^\pi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s)(u + v \cos \varphi') d\varphi' \\ v \frac{\pi}{2}(\alpha + \omega_S) &= -K \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s)(u + v \cos \varphi') d\varphi', \quad (2.10) \end{aligned}$$

где $\Delta s = a \cos \varphi' - a \cos \varphi$, $K = \frac{Ne^2 \beta(z_0)}{\pi \gamma m c T_0}$.

Отсюда получим матрицу для нахождения собственных частот α :

$$\begin{array}{cc} \alpha \pi + K \int_0^\pi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) d\varphi' & K \int_0^\pi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) \cos \varphi' d\varphi' \\ K \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) d\varphi' & \frac{\pi}{2}(\alpha + \omega_S) + K \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) \cos \varphi' d\varphi', \end{array}$$

Найдем частоты для $W = const$. Матрица M для этого случая такова:

$$\begin{array}{cc} \alpha \pi + \frac{\pi^2}{2} Q & 2Q \\ -2Q & \frac{\pi}{2}(\alpha + \omega_S). \end{array} \quad (2.11)$$

Из $\det M = 0$ находим α :

$$\alpha = \frac{-\frac{\pi}{2} Q - \omega_S \pm \sqrt{(\frac{\pi}{2} Q + \omega_S)^2 - 4(\frac{\pi}{2} Q \omega_S + \frac{8}{\pi^2} Q^2)}}{2},$$

$Q = \frac{Ne^2 W \beta(z_0)}{\pi \gamma m c T_0}$. Можно найти, при каком Q моды сольются и наступит неустойчивость. Для Q_{th} уравнение дает два корня; чтобы найти приближение точного решения, изображенного на рисунке 2.1, мы должны взять положительный:

$$Q_{th} = \omega_S (b/2 + \sqrt{b^2/4 - c}),$$

где $b = \frac{\pi}{(\frac{32}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{4})}$, $c = -b/\pi$. Приблизительно $Q_{th} \simeq .3$, в точных уравнениях $Q_{th} \simeq .362$, т.е. отличие составляет $\simeq 20\%$.

Итак, на примере "полого" сгустка мы можем сформулировать несколько важных положений, которые, как будет показано далее, остаются верными в общем случае.

1. Неустойчивость происходит от слияния мод.
2. Причина слияния - антисимметричные члены связи этих мод (см. 2.11).
3. Сдвиг частот мод для порогового тока по порядку величины равен расстоянию между ними (т.е. синхротронной частоте); пороговый ток для $W = const$ не зависит от длины сгустка и прямо пропорционален ω_S .

4. 2-модовое приближение дает неплохое согласие порога неустойчивости с точным его значением ($\approx 20\%$); те же вычисления с тремя модами дают отличие в пороге уже менее одного процента.

Выпишем полное уравнение для мод в усредненном случае; оно получается аналогично уравнению для двух мод.

$$(\alpha - m\omega_s)X_m = -K \frac{1 - \delta_{0m}}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} K_{mm'} X_{m'}, \quad (2.12)$$

где $K = \frac{Ne^2 \beta(z_0)}{2\pi \gamma m c T_0}$,

$$K_{mm'} = \int_0^\pi \cos m\varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) \cos m'\varphi' d\varphi'.$$

Из равенства нулю детерминанта матрицы уравнений находятся собственные числа.

Рассмотрим еще одну задачу для случая уплощенной ямы. Возьмем уравнения (1.23), подставим $W = const$, и подставим решение в виде

$$\mathcal{D} = u(y) + v(y) \cos \frac{\pi s}{L},$$

умножим на 1 и на $\cos \frac{\pi s}{L}$, проинтегрируем по s от нуля до L и получим два уравнения на $u(y)$ и $v(y)$. Затем их нужно домножить на $e^{i\alpha}$ и проинтегрировать с учетом граничных условий, как и в предыдущем разделе. Все это мы проделывать не будем, только решим однородное уравнение на $u(y)$ и $v(y)$. Как ясно из предыдущего раздела, корни этого уравнения для α дают полюса в интеграле при переходе от образа \mathcal{D} к оригиналу (см. полюс Ландау в предыдущем разделе). Имеем:

$$\begin{aligned} \alpha\pi u(y) + \frac{\pi^2}{2} Q \int_0^\infty g(y) u(y) dy + 2Q \int_0^\infty g(y) v(y) dy &= 0 \\ -2Q\alpha \int_0^\infty g(y) u(y) dy + \frac{\pi}{2} (\alpha^2 - \frac{y^2 \pi^2}{L^2}) v(y) &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Уравнения решаются тривиально, поскольку интегралы с $u(y)$ и $v(y)$ не зависят от y . Выразим $v(y)$ из второго и подставим в первое. Подставим распределение, как и раньше, в виде $g(y) = \frac{2y_0}{\pi} \frac{1}{y^2 + y_0^2}$. Окончательно имеем

$$\alpha\pi + \frac{\pi^2 Q}{2} + \frac{8Q^2}{\pi} \frac{1}{(\alpha - iy_0\pi/L)} = 0,$$

где $Q = \frac{Ne^2\beta(z_0)W}{L\gamma mcT_0}$.

Это уравнение дает два решения для α , при этом одно всегда имеет отрицательную мнимую часть, а другое - положительную. Это означает, что, несмотря на разброс и связанное с ним затухание Ландау, существуют моды и неустойчивые; это связано с наличием частиц с малой синхротронной частотой $\omega\pi/L$.

2.4 Построение аппарата для произвольного случая

2.4.1 Циркулянтная матрица

Построенные выше решения усредненных уравнений дают приближительную картину движения интенсивного сгустка. В общем случае все усложняется синхротронными резонансами; кроме того, трудно построить полную картину собственных состояний и частот для нетривиальных функций распределения частиц в синхротронной плоскости. Так, в случае "полого" сгустка мы имеем только моды с азимутальными номерами, поскольку зависимость от синхротронного "радиуса" (амплитуды синхротронных колебаний) отсутствует по определению. В общем случае существуют "радиальные" моды, т.е. для любого азимутального числа существует бесконечный набор мод, в которых различается зависимость дипольного момента от "радиуса"; в некотором смысле существует соответствие между решениями этой задачи и волновой функцией электрона в атоме водорода, где есть состояния с разными азимутальными и радиальными числами. В решении задачи с уплощенной ямой мы уже использовали нетривиальные распределения по "радиусу" (скорости синхротронного движения), получившиеся полюса Ландау есть результат взаимодействия различных "радиальных" мод.

Для построения полного аппарата мы начнем опять с "полого" сгустка - кольца частиц с одной синхротронной амплитудой. В реальных расчетах мы должны использовать приближения к точным уравнениям. Это можно сделать следующим образом: поскольку нам известны решения для мод в пустом пространстве, мы возьмем матрицу перехода для этих мод. Для получения полной матрицы мы должны умножить ее на матрицу локализованного элемента, которая содержит члены связи мод и

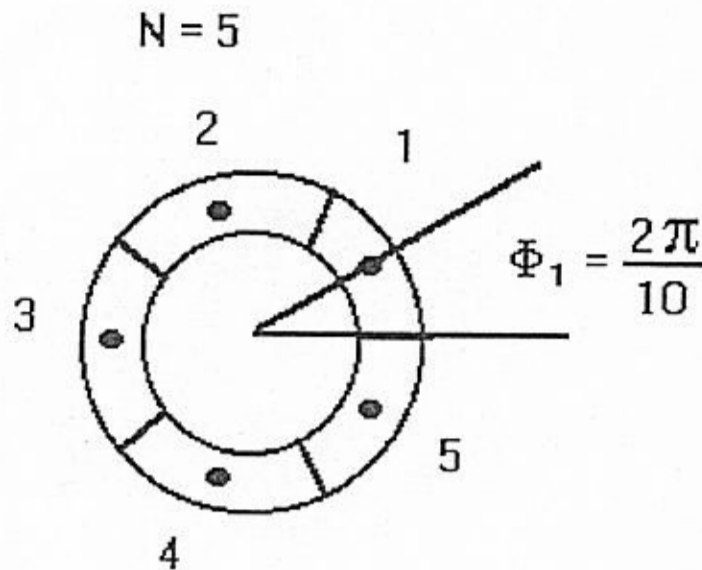


Рис. 2.2: Разбиение синхротронной фазовой плоскости на элементы сетки для модели "полого" сгустка.

действие мод на себя. Разобьем "полюй" сгусток на N частей, каждая часть имеет дипольный момент и угол, которые в процессе свободного движения меняются из-за изменения бетатронной фазы и из-за того, что частицы перемещаются в процессе синхротронного движения.

На рисунке (2.2) изображено кольцо, разбитое на $N = 2k + 1 = 5$ частей. Центр каждой имеет фазу

$$\phi_n = \frac{2\pi n}{2k + 1} + \frac{\pi}{2k + 1} \quad (1 \leq n \leq 2k + 1).$$

Каждое разбиение есть элемент сетки, который имеет дипольный момент и угол, средний по частицам в данном элементе синхротронной фазовой плоскости (D_n, D'_n) .

Собственные состояния свободного движения (моды) были получены в первой главе:

$$D(\phi)(D'(\phi)) = d(d') \cos(m\phi)$$

$$\bar{D}(\phi)(\bar{D}'(\phi)) = \bar{d}(\bar{d}') \sin(m\phi),$$

где амплитуды d, d', \bar{d}, \bar{d}' зависят только от времени.

Составленные из d, d', \bar{d}, \bar{d}' комбинации X_m, Y_m подчиняются несвязанным уравнениям, а именно

$$X_m = d + \bar{d}', \quad X'_m = d' - \bar{d}$$

для частоты $\omega_\beta + m\omega_s$, и

$$Y_m = d - \bar{d}', \quad Y'_m = d' + \bar{d}$$

для частоты $\omega_\beta - m\omega_s$.

На основе точных решений мы составим моды для сетки из $N = 2k + 1$ разбиений так, чтобы они совпадали с решениями X_m, X'_m, Y_m, Y'_m в $2k + 1$ точках с фазами ϕ_n . Положим $d = d' = 1$ и $Y_m, Y'_m = 0$ для отдельного нахождения X_m, X'_m , имеем $\bar{d} = d', \bar{d}' = -d$, тогда компоненты вектора в фазовом бетатронном пространстве, соответствующие X_m, X'_m , есть:

$$X_m \rightarrow D_n = \cos m\phi_n, D'_n = -\sin m\phi_n \quad X'_m \rightarrow D_n = \sin m\phi_n, D'_n = \cos m\phi_n$$

с собственной частотой $\omega_\beta + m\omega_s$, и, аналогично, для Y_m, Y'_m :

$$Y_m \rightarrow D_n = \cos m\phi_n, D'_n = \sin m\phi_n \quad Y'_m \rightarrow D_n = -\sin m\phi_n, D'_n = \cos m\phi_n$$

для частоты $\omega_\beta - m\omega_s$.

Заметим, что D_n, D'_n и есть компоненты собственного вектора в обычном пространстве. Размерность пространства для $N = 2k + 1$ разбиений равна $2N$ (N дипольных моментов элементов сетки и N углов).

Легко проверить, что в точках с номерами n или $2k + 1 - n$ мы имеем сумму дипольных моментов $D \propto \cos m\phi$ и разность $\bar{D} = D(m) - D(2k + 1 - m) \propto \sin m\phi$.

Матрица преобразования чисел X_m, X'_m или Y_m, Y'_m , очевидно, равна:

$$\text{diag} \left\{ \dots, \begin{bmatrix} \cos \alpha_m & \sin \alpha_m \\ -\sin \alpha_m & \cos \alpha_m \end{bmatrix}, \dots \right\},$$

α_m - частота.

Полное число разбиений $2k + 1$ определяет полное число независимых векторов. Мы можем использовать только конечное количество мод, поэтому мы оставим только нижние с невозмущенными частотами:

$$\omega_\beta - k\omega_s, \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_\beta + k\omega_s.$$

Диагональная матрица перехода действует в базисе X_m, X'_m и Y_m, Y'_m (всего реперов $2(2k+1)$ для X_m, X'_m , k для Y_m, Y'_m ($m \neq 0$) и два для $m=0$); для получения этой матрицы в базисе D_n, D'_n ($0 \leq n \leq 2k+1$, всего также $2(2k+1)$) мы должны по правилам линейной алгебры преобразовать блочно-диагональную матрицу перехода с помощью прямой и обратной матриц, составленных из собственных векторов. Все вычисления изложены в Приложении II, мы приведем ответ:

$$C_B = C \otimes T_2,$$

где

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix},$$

μ есть набег бетатронной фазы, и

$$C_{ij} = \frac{\sin(2k+1)\varphi_{ij}}{(2k+1)\sin \varphi_{ij}}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_s T - (2k+1-i+j) * \frac{2\pi}{2k+1}),$$

где T есть время перехода, который описывается этой матрицей.

Эта матрица называется блочной циркулянтной и ее элемент ij означает преобразования D_i, D'_i в D_j, D'_j через время T . Если синхротронная частота есть l/N (l - целое, N - как и прежде, количество разбиений), то в блочной циркулянте остается один блок, соответствующий точному переходу частиц из элемента сетки n в элемент $n+l$, как, впрочем, и должно быть из кинематических соображений.

2.4.2 Матрица силы

Матрица преобразования мод в свободном пространстве, как указано в предыдущем разделе, имеет блочно диагональную форму из 2×2 блоков в представлении Фурье-гармоник. Для описания взаимодействия с локализованным элементом вакуумной камеры мы должны преобразовать X'_m, Y'_m согласно уравнениям (1.9). Подставим в них дипольный момент в виде:

$$D, D' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m, d'_m \cos m\phi$$

и

$$\bar{D}, \bar{D}' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{d}_m, \bar{d}'_m \sin m\phi.$$

Умножим 1 и 3 на $\cos m\phi$ и 2 и 4 на $\sin m\phi$, проинтегрируем от 0 до π и преобразуем так же, как и в случае получения уравнений для X_m, Y_m без силы. Имеем:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} X_{m'} \cos m'\phi; \quad (2.14)$$

для "полого" сгустка, к примеру, получим

$$\Delta X'_m = k_0 \sum_{m'=-\infty}^{\infty} X_{m'} \int_0^\pi \cos m\phi d\phi \int_0^\phi \cos m'\phi' W(\Delta s) d\phi', \quad (2.15)$$

где $k_0 = \frac{Ze^2 N}{\pi^2 \gamma m_0 c} \beta$.

Видно, что в представлении Фурье-гармоник преобразование X'_m

$$\Delta X'_m = k_0 \sum_{m'=-N}^N X_{m'} K_{mm'};$$

$$K_{mm'} = k_0 \int_0^\pi \cos m\phi d\phi \int_0^\phi \cos m'\phi' W(a \cos \phi - a \cos \phi') d\phi'. \quad (2.16)$$

Сложнее получить матрицу преобразования в случае нетривиального распределения по синхротронным колебаниям в представлении гармоник, однако в пространственном распределении это всегда очень просто: по определению изменение угла задней "частицы" (точнее -элемента сетки) равно:

$$\Delta D'_m = Q_n D_n W(S_n - S_m), \quad (2.17)$$

где D_n, Q_n соответственно дипольный момент и заряд передней "частицы", S_n и S_m есть координаты "частиц" и $W(x) = 0$ при $x < 0$. Из этой формулы строится многомерная матрица тонкой линзы.

2.4.3 Нелинейное синхротронное движение

В первой главе общие уравнения были перенесены на случай нелинейного движения. Для построения аппарата расчета мы должны использовать "нелинейную" фазу, введенную в § 3 разделе первой главы. Всё сказанное в отношении обычной синхротронной фазы справедливо и для новой. Если мы сделаем равномерное разбиение кольца по "нелинейной" фазе, то циркулянта будет соответствовать свободному промежутку и в этом случае; матрица силы в пространственном представлении справедлива всегда, следовательно весь аппарат пригоден и для произвольного синхротронного движения. Существенно отличается от случая линейного синхротронного движения лишь то, что разбиение кольца и циркулянта будут зависеть от амплитуды, поскольку от нее зависит синхротронная частота.

2.4.4 Двумерная сетка

От построений для одного кольца легко перейти к общему построению матриц свободного от наведенных полей пространства и силы. Разобьем всю фазовую плоскость синхротронного движения на кольца как показано на рисунке 2.3.

Общая матрица свободного пространства есть блочно-диагональная матрица, каждый блок из которой есть циркулянта, действующая на дипольные моменты только одного кольца (при отсутствии диффузии и перемешивания между слоями); количество блоков равно числу колец.

Матрица силы строится, как и в случае "полого" сгустка, с помощью формулы (2.17).

Перемножая матрицы промежутков и локализованных элементов, на которых наводятся поля, мы имеем полную матрицу оборота, собственные числа которой есть мнимые экспоненты от искомым частот. Оказывается, такие матрицы имеют интересные свойства, которые сохраняются в общем случае.

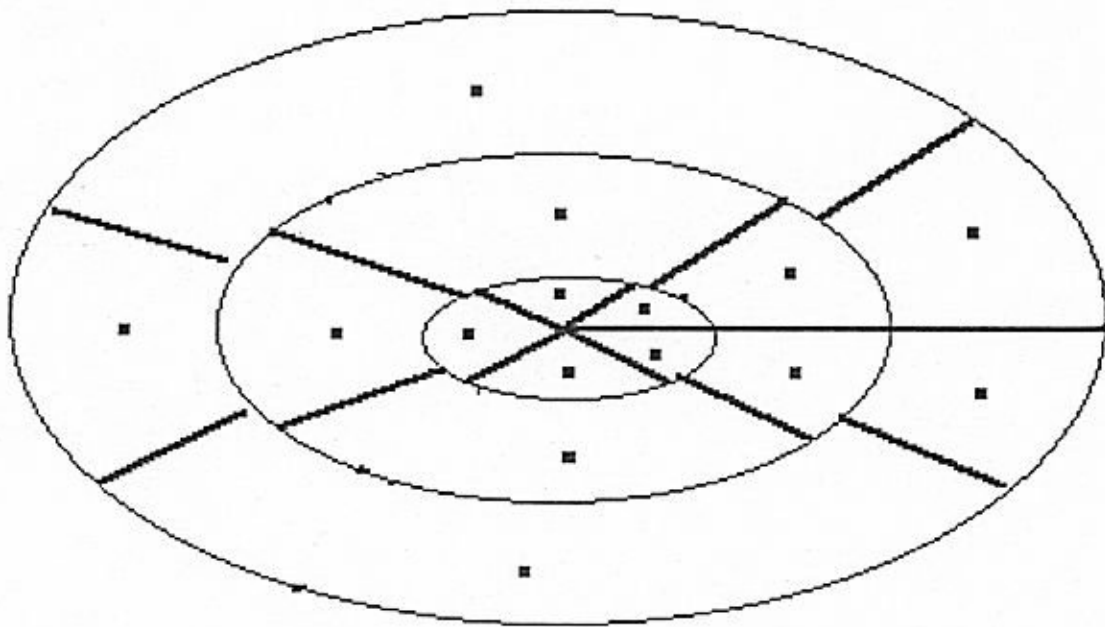


Рис. 2.3: Разбиение синхротронной фазовой плоскости на элементы сетки в общем случае.

2.5 Свойства собственных частот системы

2.5.1 "Шахматная симметрия" матрицы коллективной силы

Начнем вновь с "полого" сгустка; интегрирование в матричных элементах $K_{mm'}$ по W -функции ведется по треугольнику в плоскости ϕ', ϕ : $0 \leq \phi' \leq \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, в соответствии со свойством причинности W -функции (для $s > s'$ $W(s - s') = 0$):

$$K_{mm'} = k \int_0^\pi \cos m\phi d\phi \int_0^\phi \cos m'\phi' W(a \cos \phi - a \cos \phi') d\phi' .$$

Переставляя порядок интегрирования:

$$K_{mm'} = k \int_0^\pi \cos m'\phi' d\phi' \int_{\phi'}^\pi \cos m\phi W(a \cos \phi - a \cos \phi') d\phi$$

и вводя новые переменные $\Phi = \pi - \phi$, $\Phi' = \pi - \phi'$:

$$\begin{aligned}
 K_{mm'} &= k \int_0^\pi \cos(m'\pi - m'\Phi') d\Phi' \\
 &\int_0^{\Phi'} \cos(m\pi - m\Phi) W(a \cos(\pi - \Phi) - a \cos(\pi - \Phi')) d\Phi \\
 &= (-1)^{m+m'} k \int_0^\pi \cos m'\Phi' d\Phi' \int_0^{\Phi'} \cos m\Phi W(a \cos \Phi' - a \cos \Phi) d\Phi \\
 &= (-1)^{m+m'} K_{m'm}
 \end{aligned}$$

приходим к свойству "шахматной симметрии" между матричными элементами:

$$K_{mm'} = (-1)^{m+m'} K_{m'm}.$$

Рассматривая конструкцию с радиальными модами, мы должны рассмотреть члены связи колец с разными синхротронными амплитудами a и A ($a < A$); связь между ними с учетом разной плотности их заряда q, Q дается следующей блочной матрицей:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} qK_{mm'}^{aa} & QK_{mm'}^{aA} \\ qK_{mm'}^{Aa} & QK_{mm'}^{AA} \end{pmatrix}.$$

Теперь интегралы в $K_{mm'}^{aA}$ и $K_{mm'}^{Aa}$ более сложны, соответствие между продольными координатами в разных кольцах показано на рисунке 2.4а; область интегрирования для $K_{mm'}^{aA}$, $0 \leq \phi' \leq \arccos(\frac{a}{A} \cos \phi)$ $0 \leq \phi \leq \pi$, показанная на 2.4б, дана для расчета действия большего кольца на малое:

$$K_{mm'}^{aA} = k \int_0^\pi \cos m\phi d\phi \int_0^{\arccos(\frac{a}{A} \cos \phi)} \cos m'\phi' W(a \cos \phi - A \cos \phi') d\phi'.$$

Опять переставим пределы интегрирования и обозначим $\phi'_1 = \arccos(\frac{a}{A})$:

$$K_{mm'}^{aA} = k \int_0^{\phi'_1} \cos m'\phi' d\phi' \int_0^\pi \cos m\phi W(a \cos \phi - A \cos \phi') d\phi$$

$$+k \int_{\phi'_1}^{\pi-\phi'_1} \cos m' \phi' d\phi' \int_{\arccos(\frac{A}{a} \cos \phi')}^{\pi} \cos m \phi W(a \cos \phi - A \cos \phi') d\phi .$$

Получим сумму двух членов. С другой стороны, действие малого кольца на большое и перемена местами индексов m, m' также дает два интеграла, в соответствии с модификацией области интегрирования на рисунке 2.4с:

$$K_{m'm}^{Aa} = k \int_{\phi'_1}^{\pi-\phi'_1} \cos m' \phi d\phi \int_0^{\arccos(\frac{A}{a} \cos \phi)} \cos m \phi' W(A \cos \phi - a \cos \phi') d\phi' \\ + k \int_{\pi-\phi'_1}^{\pi} \cos m' \phi d\phi \int_0^{\pi} \cos m \phi' W(A \cos \phi - a \cos \phi') d\phi' .$$

Такая же замена переменных $\Phi = \pi - \phi, \Phi' = \pi - \phi'$ в матричном элементе дает множитель $(-1)^{m+m'}$ в соотношении между ними:

$$K_{mm'}^{aA} = (-1)^{m+m'} K_{m'm}^{Aa} .$$

Следовательно свойство "шахматной симметрии" верно и для взаимодействия азимутальных мод разных колец несмотря на разный их заряд, который пропорционален функции распределения частиц в синхротронной фазовой плоскости.

Заметим, что во всех преобразованиях мы использовали только свойство симметрии $\arccos(\frac{a}{A} \cos \phi)$ относительно $\pi/2$, а сам вид функции был не важен. Значит, эти свойства переносятся на все системы с симметричными продольными потенциальными ямами (с одним минимумом).

2.5.2 Обобщенная симплектичность и попарно-обратные собственные числа

Полученное свойство "шахматной симметрии" взаимодействия Фурье-гармоник колец, из которых состоит синхротронная фазовая плотность, дает определенную связь между собственными числами данной системы. Буквально оно означает, что моды одинаковой четности взаимодействуют симметрично друг с другом, а разной - антисимметрично. Как

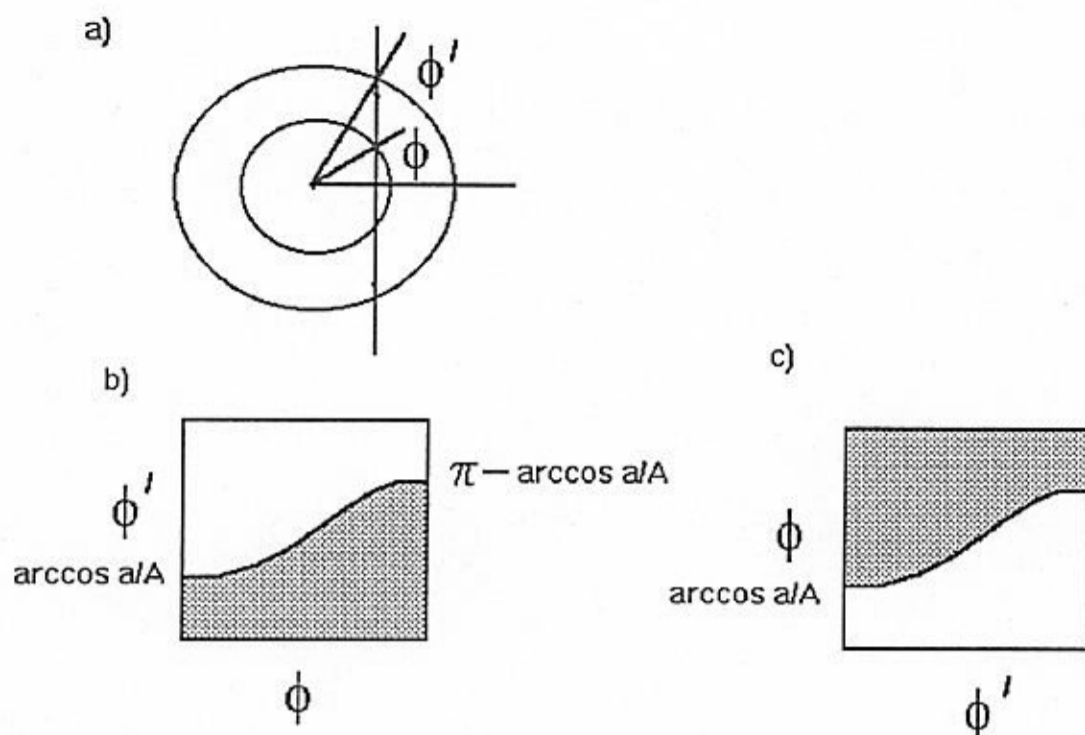


Рис. 2.4: a) соответствие между координатами и углами для двух колец: $A \cos \phi' = a \cos \phi = s$; b), c) области интегрирования для $K_{mm'}^{aA}$ и $K_{mm'}^{aA}$.

отмечалось ранее, антисимметричные члены взаимодействия и дают неустойчивость.

Сделаем неканоническую замену - заменим знаки всех координат (X_m, Y_m) нечетных мод с плюса на минус. Затем умножим координаты мод всех колец на соответствующий им заряд (функцию распределения) $g(H)$. После такой замены мы должны преобразовать матрицы в соответствии с правилами линейной алгебры. Легко убедиться, что после такой замены в циркулянте поменяют знак частоты нечетных мод, т.е. антидиагональные элементы сменят знак, кроме того, все элементы (21) всех блоков умножатся на $g(H)$, а элементы (12) - поделятся на это же число. В целом эта матрица останется симплектической, поскольку состоит из диагональных блоков 2×2 с детерминантом, равным единице. Легко видеть, что в таких переменных взаимодействие преобразованных Фурье-гармоник колец будет симметричным (а значит гамильтоновым), а матрица силы, так же как и транспортная матрица, симплектической.

Для симплектических матриц M выполняется соотношение

$$M^T S M = S,$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$
$$S^2 = -I, \quad S^T = S^{-1} = -S,$$

где I есть единичная матрица.

Для таких матриц имеем [24]:

$$|M - \lambda I| = |S^{-1}(M^T)^{-1}S - \lambda I| = |(M^T)^{-1} - \lambda I| = |I - \lambda M| = \lambda^{2n} |M - \frac{1}{\lambda} I|;$$

равенство означает, что если λ является собственным числом M , то и $\frac{1}{\lambda}$ также есть собственное число.

Поскольку наша система приводится к гамильтоновой, то она имеет попарно-обратные собственные числа.

2.6 Зависимость порога неустойчивости от параметров сгустка

Рассмотрим усредненные уравнения для сгустка (1.15).

$$\omega_S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \tau^2} = -2 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \tau}.$$

Подставим временную зависимость $\mathcal{D} \propto e^{i\alpha}$. Учитывая, что $\bar{F} \propto I\Phi(\mathcal{D}, W, g(H))$, получим:

$$\omega_S^2 \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \varphi^2} + \alpha^2 \mathcal{D} \propto -2i\alpha I\Phi(\mathcal{D}, W, g(H)).$$

Здесь I обозначает ток, $\Phi(\mathcal{D}, W, g(H))$ - интеграл по передним дипольным моментам с функцией распределения, нормированной на единицу.

Легко видеть, что нормируя I, α на ω_S мы получим уравнения, не зависящие от ω_S . Отсюда автоматически

$$I_{th} \propto \omega_S,$$

где I_{th} - пороговый ток; при этом предполагается, что длина сгустка и распределение остаются неизменными. Ранее было отмечено, что данные усредненные уравнения справедливы вдали от синхробетатронных резонансов; при приближении к такому резонансу неустойчивость может случиться раньше и полученная зависимость $I_{th}(\omega_S)$ не выполнится.

Чтобы рассмотреть зависимость порога от длины сгустка, вернемся к простой модели двух мод (с индексами 0 и -1, для примера) с ее матрицей:

$$\begin{array}{l} \alpha\pi + K \int_0^\pi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) d\varphi' \quad K \int_0^\pi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) \cos \varphi' d\varphi' \\ K \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) d\varphi' \quad \frac{\pi}{2}(\alpha + \omega_S) + K \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi W(\Delta s) \cos \varphi' d\varphi', \\ \Delta s = a \cos \varphi' - a \cos \varphi, K \propto I, I\text{-ток сгустка. Или, более компактно:} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \alpha + q_0 I & q_c I \\ -2q_c I & \alpha + \omega_S + q_{-1} I, \end{array}$$

где q_c, q_i - коэффициенты, определяемые из предыдущего уравнения, I -ток сгустка. Из равенства нулю детерминанта находим α :

$$\alpha = -\frac{q_0 I + q_{-1} I + \omega_S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q_0 I - q_{-1} I - \omega_S}{2}\right)^2 - 2q_c^2 I^2}. \quad (2.18)$$

Отсюда видно, что если $q_0 - q_{-1} > 2\sqrt{2}q_c$, то при больших токах сгусток будет устойчивым, т.е. после спаривания мод наступит их разделение с исчезновением мнимых частей.

В первой главе приведена W -функция для щели с зазором d . Такая сила обычно локализована на размере вакуумной камеры r ; можно принять для оценки $W(s) \propto e^{-s/r}$. Возьмем две моды, но не обычного полого сгустка, а сгустка частиц с одной синхротронной скоростью в уплощенной яме. Во-первых, это упрощает счет, а во-вторых, для "коротких" W -функций обычный полый сгусток вообще не соответствует реальности из-за сингулярности плотности на конце.

Для перехода к полностью уплощенной яме нужно заменить ϕ на $s\pi/L$; тогда в обозначениях формулы (2.18)

$$q_c \propto \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi \int_0^\varphi e^{\frac{L}{r}(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \propto (r/L)^2,$$

где L -длина сгустка. Здесь и далее берется асимптотическое значение интегралов при $L \rightarrow \infty$. Аналогично в этом же пределе

$$q_0, q_{-1} \propto r/L.$$

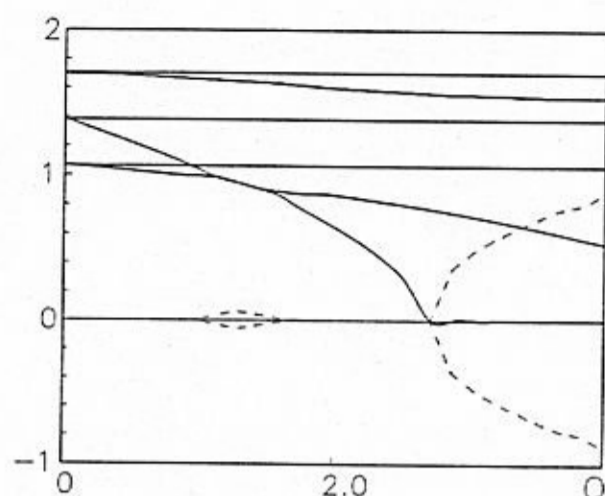


Рис. 2.5: Случай связи мод и их рассоединения. При возрастании тока одна из частот становится нулевой (синхробетатронный резонанс).

Очевидно, что в этом пределе неустойчивость не наступает, поскольку члены связи пренебрежимы в сравнении со самосдвигами мод; моды просто параллельно смещаются с током. На самом деле существуют радиальные моды, которые не сдвигаются из-за модуляции дипольного момента по амплитуде синхротронных колебаний и отсутствия самосдвига. Тогда нулевая основная мода с $q_0 \propto r/L$ пронизывает такие моды. Для них $q_{-1} \simeq 0$, $q_c \leq (r/L)^2$; из формулы (2.18) очевидно, что их спаривание быстро сменяется рассоединением, давая небольшой диапазон неустойчивости по току $\propto r/L$. Возможно и другое поведение сближающихся мод - прохождение их "друг сквозь друга". Такой случай может возникнуть, когда существенно взаимодействие большего числа мод. Это свойство присуще собственным числам симплектических матриц [24].

На рисунке 2.5 приведен пример такого поведения частот с током для $W \propto e^{-s/\tau}$.¹

Итак, если сгусток взаимодействует с неровностями вакуумной каме-

¹здесь и далее расчеты сделаны программой, основанной на аппарате вычислений частот, изложенном в данной главе

ры, то при большой его длине СПМ-неустойчивость может не играть роли; небольшие островки неустойчивости, по-видимому также не играют большой роли. Исключение составляют элементы, аналогичные пластинам (см. Приложение I). В этой ситуации, если длина сгустка больше размеров вакуумной камеры, то все частицы получают один и тот же удар от ТЕМ волн, распространяющихся вдоль линии с ее края (если только длина сгустка не больше длины пластин), т.е. $W = const$. Как было отмечено ранее, в этом случае порог не зависит от длины сгустка.

2.6.1 Влияние диффузии в синхротронном движении на частоты

До сих пор мы рассматривали синхротронные колебания как вращение в фазовой плоскости. Кроме этого существует еще диффузия и затухание частиц; два этих фактора и формируют функцию распределения. В целом уравнение на нее таково:

$$g(s, E) = \int G(s, s', E, E') g(s, E) ds dE,$$

где $G(s, s', E, E')$ - функция влияния точечного источника [15], время преобразования соответствует одному обороту.

Наши построения транспортной матрицы (циркулянты) можно усовершенствовать, а именно: мы можем внести члены перемешивания элементов сетки, которые будут означать, сколько частиц пришло из одного элемента фазового объема в другой с учетом выписанного уравнения. Понятно, что возникнут члены связи разных колец (см. рис.2.3), однако матричный подход остается справедливым. Отсюда главный вывод - учет диффузии и затухания в синхротронной плоскости оставляют систему спектральной!

Сделаем грубую оценку для влияния диффузии на высшие моды. Возьмем одномерную гармонику дипольного момента от s ($d(s) = \cos(\pi ns/L)$), оставим только диффузию по s . Функция влияния точечного источника равна

$$G(s, s') = \frac{e^{-(s-s')^2/4DT_0}}{2\sqrt{\pi DT_0}},$$

где D - коэффициент диффузии.

После одного оборота гармоника ($d(s) = \cos(\pi ns/L)$) перейдет в следующую величину:

$$d_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s - s')d(s')d s' = \exp(-D\pi^2 n^2/L^2) \cos(\pi ns/L);$$

т.е. гармоника исчезает с декрементом порядка n^2 .

Эта оценка справедлива для мод с высокими азимутальными номерами; очевидно, что для радиальных мод она тоже верна, если принять n равным σ/λ , где σ есть средний квадрат синхротронных амплитуд, а λ - длина волны или локализации радиальной моды.

2.6.2 Связь между затуханием Ландау и частотами мод

Если внимательно проанализировать решения, полученные для задачи с уплощенной ямой, и свойства мод системы, то можно натолкнуться на противоречие. С одной стороны, частоты всегда попарно-обратны, а полюс Ландау не имеет пары. Эта проблема впервые возникла в физике плазмы в 60е годы и была решена Ван Кампеном. Он обнаружил, что решение Ландау не соответствует собственной моде(модам), а есть результат наложения сингулярных мод с действительными частотами.

Как видно из предыдущего материала, общее уравнение есть однородное уравнение с невозмущенной частотой какой-либо моды с правой частью, которая есть сумма (с распределением и W -функцией) всех мод. Сингулярность мод Ван Кампена связана с тем, что существует точный резонанс собственной частоты коллективной силы с невозмущенными частотами мод, которые занимают целый интервал в ситуации с разбросом; для нахождения силы нужно брать интеграл по дипольным моментам в смысле главного значения (в отличие от правила Ландау).

Очевидно, что моды с действительными частотами в нашей системе с разбросом есть моды Ван Кампена, тогда когда собственные частоты мод лежат в полосе частот невозмущенных мод. В целом, спектр состоит из непрерывной части (моды Ван Кампена) и дискретной, которая и дает неустойчивости.

Затухание Ландау связано с начальной задачей и происходит следующим образом: в начальный момент существует сфазированное состояние многих мод, далее оно разфазировуется и дипольный момент начинает

экспоненциально исчезать. Поскольку сила ведет себя также, как и дипольный момент, то колебания мод, в конечном итоге, складываются из собственных колебаний (с действительными частотами) и экспоненциального затухания, поскольку сила входит в правую часть уравнений. Более подробно об этом написано, например в [16, 17] и т.п.

Впервые этот вопрос применительно к поперечным коллективным колебаниям исследовался в [18, 19]

На практике сингулярные моды резко меняют свой вид из-за диффузии. Их частоты, как показано в предыдущем разделе, имеют большой декремент в связи с резкой локализацией; как следствие этого, исчезает и сама сингулярность.

2.6.3 К вопросу о полноте спектра

Выше мы неявно предполагали, что отыскание мод системы дает полную информацию о ее поведении. Это верно в случае, когда спектр полный, т.е. когда все решения могут быть разложены на моды.

Ранее было показано, что приближения нескольких мод дают хорошую оценку для точного значения порога неустойчивости для $W = const.$ Понятно, что в случае конечных гладких W - функций мы можем также пользоваться конечным набором мод для получения порога неустойчивости, поскольку коэффициенты связи имеют одинаковую асимптотику. Такая же ситуация, по видимому, и с радиальными модами.

С другой стороны, построив сетку в фазовой плоскости, мы имеем матричный подход для описания транспортировки мод и взаимодействия с наведенными полями. Из алгебры известно, что система собственных векторов является полной. Уменьшая размер сетки мы устремляем приближенное описание движения к точному, что в присутствии сходимости спектра доказывает спектральную полноту системы.

С учетом диффузии вклад высших мод резко уменьшается, так как их затухание растет квадратично с номером, поэтому на физическом уровне строгости утверждение о полноте спектра можно считать доказанным.

На практике, в спектре видны всего 2-3 моды; как правило с номерами "0" и "-1"; на накопителе LEP бывает видна еще одна радиальная мода с номером "0".

Глава 3

Взаимодействие интенсивного сгустка с обратной связью

В современных коллайдерах обычно используются сантиметровые сгустки. Это связано с оптимизацией параметров для получения большей светимости и т.д. В этой ситуации определение зависимости дипольного момента сгустка от продольной координаты на одном пролете является сложной задачей. То же самое относится и кикеру - сделать разный "удар" для различных частиц сгустка практически невозможно. Мы не будем выставлять таких требований к этим устройствам. Далее будет подразумеваться, что пикап "интегрирует" сигнал от сгустка, т.е. его показания пропорциональны полному дипольному моменту сгустка. Кроме этого, мы предполагаем, что кикер дает одинаковое изменение угла всех частиц независимо от их продольной координаты. Это приближение хорошо соответствует реальным обратным связям на всех крупных коллайдерах.

Является очевидным, что такие устройства с одинаковым действием на частицы при одном пролете не могут устранить эффект от наведенных полей, которые при ультрарелятивизме резко различаются для частиц головы и хвоста сгустка. Однако изменение собственных частот колебаний за счет обратной связи может дать повышение порога СПМ-неустойчивости или устранить его (как будет показано в следующей главе).

3.0.4 Усредненные уравнения в присутствии однооборотной обратной связи

Рассмотрим простейшие усредненные уравнения для двух мод - вновь для "0" и "-1". Возьмем однооборотную обратную связь, т.е. случай, когда сигнал с двух пикапов идет в некоторой их пропорции на кикер; на следующий оборот и далее этот сигнал не запоминается. С двух пикапов можно установить координату и угол нулевой гармоники. Гармоники с другими азимутальными номерами не имеют дипольного момента и не видны с пикапа. То же самое и с кикером - он не меняет никаких гармоник, кроме нулевой. Коэффициенты пропорциональности между дипольным моментом и углом нулевой гармоники в точке кикера, с одной стороны и его ударом, с другой, зависят от вклада в сигнал разных пикапов, а также от бета-функций в местах пикапов и т.д. Здесь и далее мы не будем обращаться к каким-либо конкретным деталям обратных связей; просто введем коэффициенты пропорциональности удара на кикере относительно дипольного момента и угла в этой же точке, которые могут варьироваться коэффициентами усиления сигнала с пикапов. Очевидно, что в усредненных уравнениях действие обратной связи сводится к действию нулевой гармоники на себя пропорционально сумме с некоторыми коэффициентами собственных координаты и угла, причем угол входит с мнимым коэффициентом.

Выпишем уравнения на нахождение собственных частот для двух мод. Матрица есть:

$$\begin{array}{cc} \alpha + (q_0 + \Delta' + i\Delta'')I & q_c I \\ -2q_c I & \alpha + \omega_S + q_{-1}I, \end{array}$$

где q_c, q_i - коэффициенты, зависящие от W -функции (см. предыдущую главу), I -ток сгустка, Δ', Δ'' - параметры обратной связи.

Из равенства нулю детерминанта находим α :

$$\alpha = -\frac{C_0 I + q_{-1} I + \omega_S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_0 I - q_{-1} I - \omega_S}{2}\right)^2 - 2q_c^2 I^2}. \quad (3.1)$$

$$C_0 = q_0 + \Delta' + i\Delta''.$$

Отсюда видно, что если взять, к примеру, только действительную часть вклада обратной связи (реактивная обратная связь) и компенсировать сближение в первом порядке этих мод ($C_0 I - q_{-1} I = 0$), то порог

отодвинется из-за того, что сближение мод до спаривания будет происходить только из-за членов связи q_c . В случае $W = \text{const}$ $q_{-1} = 0$, $q_0 = \frac{Ne^2 W \beta}{2 \gamma m c T_0}$, $q_c = 2 \frac{Ne^2 W \beta}{\pi \gamma m c T_0}$; порог без обратной связи для двухмодовой модели равен $I_{th} \simeq 3 \frac{\omega s \pi \gamma m c}{e W \beta}$. В случае, когда сдвиг нулевой моды компенсирован ($\Delta' = -q_0$), порог равен $I_{th} \simeq \pi/4 \sqrt{2} \frac{\omega s \pi \gamma m c}{e W \beta}$, т.е. он отодвигается на 85%.

Если мы сделаем обратную связь резистивной, то у нулевой моды сразу появится декремент. Другая мода через связь тоже будет мнимой; можно подобрать параметры так, что обе моды будут затухать. Однако при пороговых токах мнимая часть частоты "-1" моды начинает резко меняться в другую сторону до тех пор, пока не поменяет знак. Это и будет новым порогом неустойчивости. Выигрыш может составить также несколько десятков процентов. Усредненные уравнения для интенсивного сгустка в таком виде и их анализ были приведены в [20].

Из двухмодового решения видно, что удаляя частоты мод можно удалять порог; может показаться, что смещая обратной связью частоту нулевой моды вверх, можно вообще устранять порог. Однако в этом случае двухмодовая модель дает неверный результат, так как порог будет определяться спариванием "0" и "+1" мод.

Эта упрощенная модель в некоторых случаях дает неплохую оценку для увеличения тока с помощью обратной связи: на машинах с небольшим периметром порог неустойчивости повышается на несколько десятков процентов.

3.0.5 Уравнения для осцилляторной обратной связи

В общем, сигнал с пикапов может запоминаться каким-либо образом и использоваться на следующих оборотах, поэтому уравнения с обратной связью должны быть модифицированы. Если взять запоминающее устройство в виде осциллятора (LC-контур и т.п.), то легко описать и этот случай.

У этого осциллятора есть две независимые переменные (в случае LC-контур это напряжение и ток). Опять же не вдаваясь в детали будем считать, что мы можем на кикер посылать сигнал, пропорциональный сумме двух переменных осциллятора со своими коэффициентами. Сам осциллятор получает изменение своих переменных так же пропорционально углу и дипольному моменту сгустка (с двух пикапов). Выпишем

усредненные уравнения для полого сгустка. Положив "медленную" переменную в (1.11) равной

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{m'=-\infty}^{\infty} X_{m'} \cos m' \phi,$$

взяв силу полого сгустка и действуя как в случае вывода уравнений для гармоник в предыдущей главе, получим (считая, что частоты осциллятора и бетатронного движения близки):

$$\begin{aligned} \frac{dX_0}{d\tau} &= iqz + i\Delta X_0 + i \sum_{j=0}^N K_{0j} X_j \\ \frac{dz}{d\tau} &= i\omega_z z + i\bar{q} X_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Действительная и мнимая часть z означают две "медленных" переменных у осциллятора обратной связи; коэффициенты Δ , q , \bar{q} есть комплексные величины, ω_z есть отстройка частоты осциллятора от бетатронной частоты.

Здесь и далее мы разделяем понятия "гармоника" и "мода". Первая является "модой" лишь на малых токах. При повышении тока моды представляют из себя смесь гармоник. Поэтому не удивительно, что частоты всех мод могут меняться в результате взаимодействия с "интегрирующей" (неразличающей частицы сгустка) обратной связью - высшие моды имеют примесь нулевой гармоники из-за связи мод.

Как было показано выше, однооборотная обратная связь может повышать порог СПМ-неустойчивости; то же самое относится и к многооборотной осцилляторной связи - сдвиг частоты нулевой моды в сторону от "-1" моды или внесение затухания этой обратной связью могут дать повышение порога. Такова экспериментальная ситуация на накопителях Petra, ESRF, ВЭПП-4.

На самом крупном коллайдере LEP однооборотная обратная связь не помогает повысить порог. Основное отличие LEP-а от других машин состоит в большой синхротронной частоте (1/12) и большим когерентным сдвигом частот ($\simeq 1/12$) за время пролета между пикапом и кикером. Для того, чтобы найти частоты мод для такого случая, мы должны перейти от усредненного описания к точному.

3.0.6 Точное описание взаимодействия однооборотной и осцилляторной обратных связей с интенсивным сгустком

Действие обратных связей легче описать в пространственно-временном представлении. Возьмем для начала один пикап. Мы должны разбить кольцо накопителя на две части: часть от пикапа до кикера и оставшуюся часть. Матрица сгустка состоит из произведения матриц этих частей (M_1, M_2), каждая из которых, в свою очередь, состоит из произведения циркулянт и матриц силы. В присутствии однооборотной обратной связи мы должны модифицировать матрицы следующим образом: в точке кикера нужно добавить частицам углы, пропорциональные показаниям пикапа. Для того, чтобы применить матричный подход, нужно трансформировать дипольный момент на пикапе к точке кикера. Полная матрица для преобразования с началом в точке кикера будет равна

$$M_{tot} = M_2 M_1 (E + P \cdot M_1^{-1}),$$

где E -есть единичная матрица, P - есть матрица пикапа. В пространственном представлении она дает изменение углов частиц пропорционально полному моменту, а значит есть матрица, в которой элементы P_{ij} равны плотности элемента сетки (см. рисунок 2.3) $g(H)$ на коэффициент преобразования пикапа, если i соответствует углу какого-либо элемента сетки, а j соответствует дипольному моменту элемента с плотностью $g(H)$. Все другие элементы равны нулю.

Легко получить преобразование и в случае нескольких пикапов:

$$M_{tot} = M (E + \sum_i P_i \cdot M_i^{-1}), \quad (3.3)$$

где M -матрица без обратной связи, M_i - матрицы от пикапов до кикера. Вычисление собственных чисел матрицы M_{tot} дает искомые частоты.

Наиболее простая ситуация возникает, когда пикап и кикер стоят рядом. Этот случай соответствует реактивной обратной связи. Если подобрать силу обратной связи так, что сдвиг нулевой моды компенсирован ее действием, то это соответствует максимальному отодвиганию порога.

На рисунке 3.1 изображены частоты трех мод для полого сгустка для $W = const$. Рисунок 3.2 демонстрирует максимальный выигрыш в пороге, который может дать обратная связь.

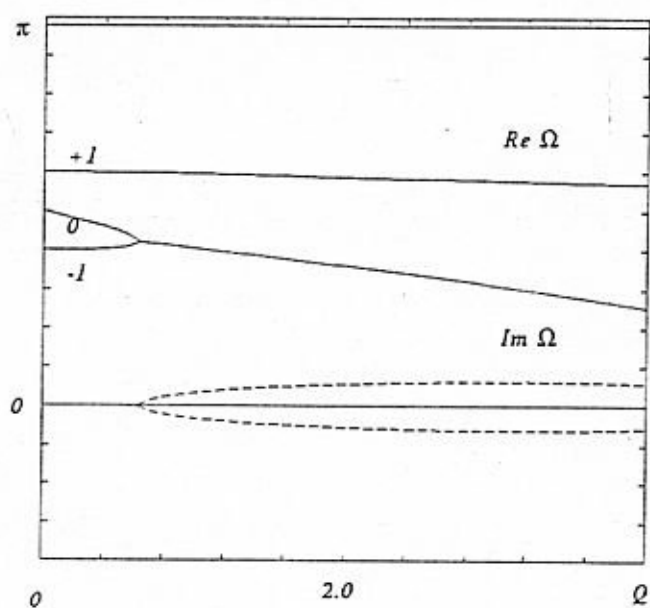


Рис. 3.1: Частоты мод Ω от параметра $Q \propto I$. Параметр Q масштабирован так, что при $Q = 1$ сдвиг нулевой гармоники $m = 0$ равняется ω_S .

Такое "мгновенное" действие обратной связи является нефизическим, поскольку сгусток практически имеет скорость света, и поэтому пикап и кикер разнесены так, чтобы сигнал, распространяющийся по хорде окружности ускорителя, успевал от пикапа к кикеру до прилета сгустка. Следовательно, всегда существует набег бетатронной, синхротронной и коллективной фаз между пикапом и кикером.

Легко видеть, что если между пикапами и кикером коллективные поля малы, то нулевая гармоника здесь не связана с другими, она взаимодействует посредством обратной связи сама с собой, поэтому такой случай может быть сведен, например, к "мгновенному" действию обратной связи путем подбора "реактивной" ($\pi/2$) фазы с пикапов между углом нулевой гармоники и ее дипольным моментом в точке кикера. Это значит, что мы можем повысить порог в соответствии с двухмодовыми оценками и рисунком 3.2. Оказывается, решающим параметром является сдвиг фазы частиц за счет коллективных полей между пикапом и кикером: когда он не мал, то одновременной устойчивости трех мод (к примеру "-1", "0" и "+1") за счет такой обратной связи получить нельзя! Докажем это.

Если коллективные поля не малы, то гармоники связаны между собой, а значит все они имеют значительную примесь нулевой и взаимодействуют с обратной связью. Рассмотрим, к примеру, "мгновенное" взаимодействие мод с пикапом-кикером (рисунок 3.2). Обратная связь меняет только собственную частоту нулевой гармоники (как и в усредненных уравнениях); чтобы найти частоты мод, нужно учесть еще связь между гармониками. Из-за антисимметрии членов связи мод их частоты притягиваются друг к другу. Если обратная связь удалит частоту нулевой гармоники от "-1"-й, то из-за ослабления притяжения последняя сдвинется к своему старому значению. А это означает, что обратная связь сдвигает частоты соседних мод в разные стороны! Такое их поведение обусловлено антисимметричными членами связи мод; прибегнув к аналогиям, можно сказать, что такие моды имеют "отрицательную" массу или заряд при взаимодействии с кикером (или пикапом). При доказательстве обобщенной симплектичности мы уже указывали на этот факт и даже совершили неканоническую замену (знак координат нечетных мод) для перехода к обычным гамильтоновым отображениям. При переходе к однотипным для всех мод гамильтоновым (с симметричными членами связи) уравнениям "новые" нечетные моды имеют частоту другого знака (смена знака антидиагональных элементов в матрице перехода; см. 2.5.2),

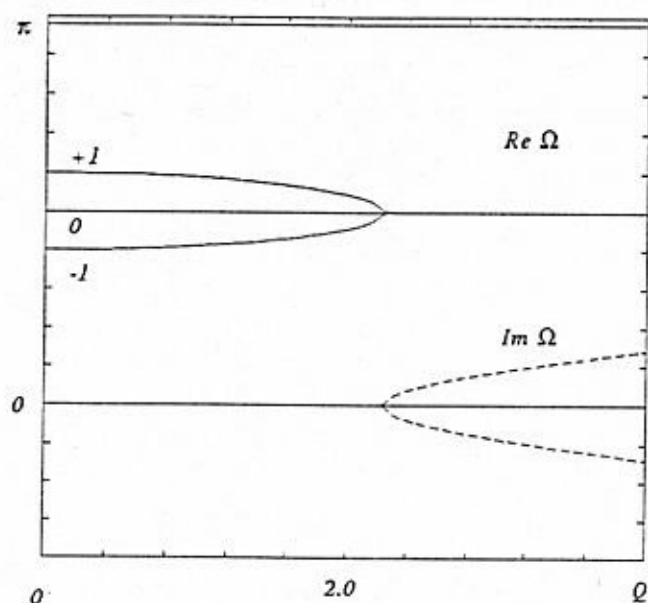


Рис. 3.2: Случай компенсации сдвига моды с $m = 0$ однооборотной обратной связью.

или, что то же самое, набег фазы "новых" нечетных мод отличается от старого на π .

В первом порядке изменение частот за счет обратной связи сводится к действию мод на себя. Добавка в высшие моды от нулевой гармоники имеет с учетом "отрицательной массы" и без учета связи набег фазы $\pi + \phi_b$, из-за связи с "+1" гармоникой она смещается к ее частоте на величину $\phi_{c+} > 0$; то же самое относится к "-1" гармонике.

Тогда три одинаково взаимодействующие с обратной связью моды "0" и "новые" "+1" и "-1" характеризуются тем, как меняется полный дипольный момент и полный угол от пикапа до кикера. Набег фаз между пикапом и кикером в терминах полного дипольного момента и полного угла есть $\phi_b, \pi + \phi_b + \phi_{c+}$ и $\pi + \phi_b - \phi_{c-}$. Здесь $\phi_b, \phi_{c\pm} > 0$ есть набег бетатронной фазы и сдвиг фаз (± 1) мод за счет их связи соответственно.

Из расположения набег фаз мод на окружности легко видеть, что если эти моды взаимодействуют с обратной связью, то нельзя подобрать ее фазу так, чтобы обеспечить одновременную устойчивость трех мод.

На рисунке 3.3 показано поведение мод, когда между пикапом и кикером находится локализованный элемент $\mathcal{E} W = const$, фаза обратной

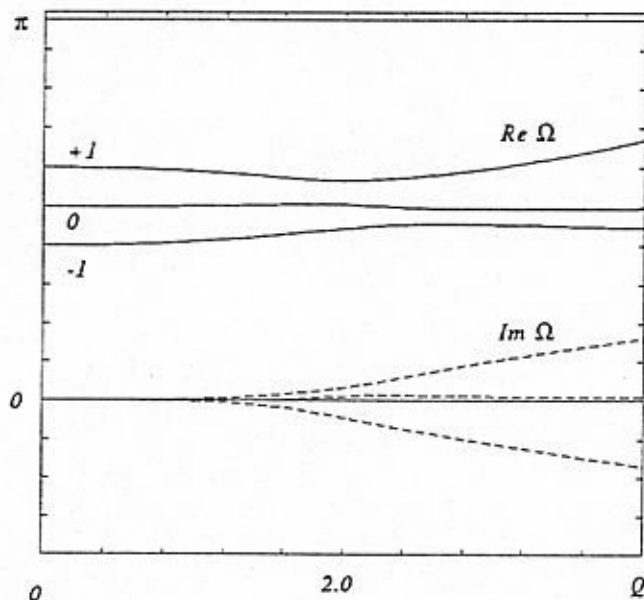


Рис. 3.3: Однооборотная обратная связь в присутствии элемента между пикапом и кикером, на котором сгустком наводятся большие поля. Фаза связи и ее сила подобраны так, чтобы компенсировать сдвиг нулевой моды.

связи подобрана так, чтобы действие ее на нулевую моду было реактивным. Из рисунка видно, что одна из мод является неустойчивой.

На небольших машинах набег коллективной фазы мал, и мнимые части мод могут не проявляться из-за радиационного затухания, диффузии и т.д., однако на больших машинах когерентный сдвиг фазы сравним с единицей, что может служить причиной неэффективной работы однооборотной обратной связи на подавление СПМ-неустойчивости.

В случае осцилляторной обратной связи матричный подход применяется самым естественным образом: к матрице сгустка нужно добавить два столбца и строки от осциллятора обратной связи. В точке пикапа мы должны добавить к переменным осциллятора величину, пропорциональную дипольному моменту, в точке кикера добавить угол частицам пропорционально этим же переменным. Записав это в матричной форме мы должны перемножить матрицы пикапов, кикеров, W -функций и свободных промежутков (матрица свободного промежутка для осциллятора есть матрица обычной колебательной системы со своими частотой

тора есть матрица обычной колебательной системы со своими частотой и затуханием). Получившаяся матрица и даст нам новые собственные частоты, которых станет на одну больше.

В произвольном случае, когда обратная связь не является ни осцилляторной, ни однооборотной, поведение системы является, как правило, не спектральным, т.е. поведение мод сгустка во времени будет не экспоненциальным.

3.1 Обратная связь с запаздыванием

В общем обратная связь означает произвольный частотный фильтр для передачи сигнала с пикапа на кикер. Рассмотрим случай, когда сигналы с предыдущих оборотов не запоминаются в реактивных элементах. В пространственно-временном представлении такая обратная связь подразумевает использование сигналов с предыдущих оборотов для удара на кикере в некоторой линейной их комбинации.

По аналогии с однооборотной связью, введем матрицы от пикапа до кикера M_1 и дополнительную к ней M_2 (для начала вновь рассмотрим один пикап). Чтобы привести координаты на пикапе в предыдущие обороты к удару на кикере, мы должны пересчитать их выражения через координаты и углы на нем. Для пересчета требуются знания предыдущих ударов кикера, поскольку они происходят между измерениями пикапа. Предыдущие удары опять же выражаются через ранние измерения пикапа, т.е. получить замкнутое отображение дипольных моментов и углов сгустка в этом случае невозможно. Оказывается, можно построить замкнутое выражение для отображения матриц, преобразующих дипольные моменты и углы сгустка!

Предположим, нам известны матрицы " S_i ", которые преобразуют углы и дипольные моменты сгустка (в действительности, сетки на синхротронной фазовой плоскости) в точке пикапа с " i "-го оборота. Пусть обратная связь использует всего L предыдущих показаний пикапа. Тогда легко по аналогии с однооборотной связью получить матрицу, которая отображает углы и дипольные моменты с точки пикапа на следующий оборот.

$$\bar{S}_0 = M_1 \left(E + \sum_{i=1}^L P_i k_i S_i^{-1} M_1^{-1} \right) M_2,$$

где k_i есть коэффициенты обратной связи, P_i -матрицы пикапов.

Поскольку нам стала известна матрица нового оборота, мы можем преобразовать старые; так, чтобы получить новую матрицу преобразования с "i"-го оборота мы должны взять матрицу с "i-1"-го оборота и умножить на \bar{S}_0 :

$$\bar{S}_i = \bar{S}_0 S_{i-1}.$$

В целом, отображение есть

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= M_1 \left(E + \sum_{i=1}^L k_i S_i^{-1} M_1^{-1} \right) M_2, \\ &\dots \\ \bar{S}_i &= \bar{S}_0 S_{i-1}, \\ &\dots \\ \bar{S}_L &= \bar{S}_0 S_{L-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Чтобы итерировать отображение для L матриц, нужны начальные условия. Понятно, что они получаются из первых оборотов сгустка, когда первые L значений пикапа равны нулю, а следовательно начальные матрицы известны. Данное отображение эквивалентно нелинейному многомерному отображению (переменными являются элементы матриц) и его полный анализ выходит за рамки возможностей современной науки. Очевидно, что здесь могут существовать стационарные точки (как устойчивые, так и неустойчивые), сложные сепаратрисные структуры и т.д. Очевидно также, что когда связь мод мала, то система описывается с помощью теории возмущений и анализа стационарных точек. По-видимому, когда стационарные точки устойчивы, тогда система является почти спектральной на малых токах и для ее описания годится аппарат Фурье. В общем случае, если даже отображение является сжимающим, то устойчивое движение не гарантировано - примером могут служить "странные" аттракторы (см., например, [21]).

В самом общем случае обратных связей ситуация становится еще сложнее; без каких-либо упрощающих факторов изучение таких систем является очень трудным.

Оказывается, относительно просто такие системы сделать спектральными и уйти от анализа сложных отображений!

Выделение спектральных отображений

Ранее мы предполагали, что сигнал на каждом обороте использует всегда одну и ту же комбинацию предыдущих показаний пикапа. Так работают все обратные связи. Можно однако посылать на кикер разные комбинации показаний пикапа. Например, если у нас имеется L основных мод, то мы можем не ударять сгусток кикером L оборотов, снять с пикапа информацию о динамических переменных этих мод и на L -й оборот послать сигнал на кикер в нужной комбинации. Система является спектральной в этом случае; полная матрица включает L свободных оборотов с умножением на матрицу кикера (аналогично случаю однооборотной обратной связи) в конце; так строится простейший цикл взаимодействия сгустка и обратной связи.

Мы можем и не пропускать кикером несколько оборотов, если у нас имеются несколько пикапов на обороте; вопрос только в точности измерений динамических переменных мод.

В общем, спектральные системы можно получить так: если мы начинаем цикл из L оборотов, то в начале для удара на кикере будем использовать ту информацию, которая у нас к этому моменту есть, т.е. на первом обороте всего одно показание пикапа, на k -м - k показаний пикапа; между этими показаниями будут происходить удары кикера, но их значения нам будут известны, поскольку мы не используем показаний пикапа из предыдущих циклов. На L -м обороте цикл обрывается; соответствующая матрица будет состоять из произведений матриц известных преобразований и известных матриц кикеров, а значит система будет замкнутой!

В чем преимущества таких систем? Во-первых, в отличие от однооборотной обратной связи мы можем использовать более полную информацию о модах; во-вторых, в отличие от произвольной обратной связи, мы можем проанализировать поведение спектральной системы точно. Как будет показано в следующей главе, такие обратные связи могут решить проблему СПМ-неустойчивости.

Глава 4

Устранение порога СПМ-неустойчивости с помощью обратной связи

4.1 Устранение неустойчивости с помощью осцилляторной обратной связи

Полученные выше отображения сгустка в присутствии обратной связи можно сделать устойчивыми для всех мод путем выбора параметров обратной связи. Оказывается, это можно сделать большим числом способов; в данной работе будут приведены наиболее простые и наглядные. Начнем с простейших уравнений связанных осцилляторов.

4.1.1 Основной принцип

Возьмем вначале две моды с несимметричным членом связи между ними; кроме того пусть, для простоты, действие их на себя и взаимодействие с другими равно нулю. Тогда выше полученные уравнения дают:

$$\begin{aligned} X' &= P_x \\ P_x' + \omega_x^2 X &= -kY \\ Y' &= P_y \\ P_y' + \omega_y^2 Y &= kX, \end{aligned} \tag{4.1}$$

здесь член связи k пропорционален току, ω_x, ω_y - невозмущенные собственные частоты мод.

Отсюда собственные частоты равны:

$$\omega^2 = \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2 \pm \sqrt{(\omega_x^2 - \omega_y^2)^2 - 4k^2}}{2},$$

откуда очевиден порог при $k = \frac{1}{2}(\omega_x^2 - \omega_y^2)$

Отвлекаясь от подробностей представим обратную связь в виде осциллятора (LC -контур), который связан с нулевой модой (осциллятор X выше). Пусть это действие не модулировано во времени; в принципе, это соответствует усредненным уравнениям. Возьмем связь осциллятора обратной связи с нулевой модой такой же, что нулевой с первой, только симметричной (гамильтоновой); частоту же его возьмем равной частоте первой моды (моды Y); коэффициент связи ее с Y равен нулю в силу предыдущих рассуждений. Имеем:

$$\begin{aligned} X' &= P_x \\ P_x' + \omega_x^2 X &= -kY + kZ \\ Y' &= P_y \\ P_y' + \omega_y^2 Y &= kX \\ Z' &= P_z \\ P_z' + \omega_z^2 Z &= kX, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где Z означает обратную связь.

Путем простых вычислений можно убедиться, что собственные частоты этой системы являются независимо от тока (здесь k) всегда невозмущенными!

То есть несмотря на невозможность устранения эффекта целиком, возможно устранить зависимость собственных частот от тока (собственные вектора же меняются с током).

Далее нужно отметить, что сколько бы ни было мод, связанных с нулевой, то действуя аналогично можно добиться такого же результата. Приведем алгоритм для произвольного числа мод в усредненном случае.

4.2 Усредненное движение

Возьмем усредненные уравнения (2.12) и допишем уравнения осцилляторов обратной связи (3.2), кроме того считаем, что однооборотная обратная связь присутствует и дает сдвиг частоты нулевой гармоники.

Пусть z_l , как и ранее, обозначают переменные осцилляторов, с частотами $\bar{\omega}_l$ и коэффициентами связи с нулевой гармоникой q_l, \bar{q}_l .¹

Для того, чтобы изменить нужным образом частоты системы из N высших гармоник и одной нулевой, достаточно N управляемых осцилляторов. Уравнение на нулевую гармонику, связанную с N гармониками и N осцилляторами такое:

$$X_0' = i\Delta X_0 + i \sum_{i=0}^N K_{0i} X_i + i \sum_{l=1}^N q_l z_l, \quad (4.3)$$

где Δ обозначает коэффициент однооборотной обратной связи². Уравнения для осцилляторов есть:

$$\begin{aligned} z_1' - i\bar{\omega}_1 z_1 &= i\bar{q}_1 X_0 \\ &\dots \\ z_N' - i\bar{\omega}_N z_N &= i\bar{q}_N X_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для отыскания собственных частот ω подставим

$$\begin{aligned} X_i &= A_i e^{i\omega t} \\ z_i &= Z_i e^{i\omega t} \end{aligned}$$

в уравнения и получим для нулевой моды:

$$A_0(\omega - \Delta + K_{00}) = \sum_{i=1}^N K_{0i} A_i + \sum_{l=1}^N q_l Z_l \quad (4.5)$$

и для осцилляторов:

$$\begin{aligned} Z_1(\omega - \bar{\omega}_1) &= \bar{q}_1 A_0 \\ &\dots \\ Z_N(\omega - \bar{\omega}_N) &= \bar{q}_N A_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹На практике коэффициенты связи осцилляторов и других гармоник с нулевой входят всегда в произведении, оно дает только один независимый коэффициент.

²штрих в формуле означает производную по времени

Мы можем выразить амплитуды осцилляторов Z_l и подставить в уравнение для нулевой моды:

$$A_0(\omega - \Delta + K_{00} - \sum_{l=1}^N \frac{q_l \bar{q}_l}{\omega - \bar{\omega}_l}) = \sum_{i=1}^N K_{0i} A_i. \quad (4.7)$$

Новые частоты могут быть найдены из уравнения $\det \tilde{B} = 0$.

$$\det \tilde{B} = \begin{vmatrix} \Psi - \omega + K_{00} & +K_{01} & \dots & +K_{0N} \\ +K_{10} & & & \\ \dots & M & - & \omega E \\ +K_{N0} & & & \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\Psi = -\Delta + \sum_{l=1}^N \frac{q_l \bar{q}_l}{\bar{\omega}_l - \omega},$$

а M -матрица связи нулевой гармоники с высшими модами.

Приведенная к одному знаменателю форма Ψ есть:

$$\Psi = -\Delta + \frac{F(\omega)}{\prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)},$$

где $F(\omega)$ есть полином N -го порядка.

Полный детерминант может быть выражен через первый ряд (M_i есть миноры элементов K_{0i}):

$$(\Psi - \omega + K_{00}) |M - \omega E| + \sum_{i=1}^N K_{0i} M_i(\omega)$$

Собирая все члены в один с общим знаменателем, приведем его к виду

$$\frac{H(\omega)}{\prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)}$$

где H есть полином порядка $2N + 1$.

Для того, чтобы уравнение имело $2N + 1$ желаемых корней Ω_i , H должен иметь форму:

$$H(\omega) = \prod_{i=1}^{2N+1} (\Omega_i - \omega)$$

и соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(\Psi - \omega + K_{00})|M - \omega E| + \sum_{i=1}^N K_{0i} M_i(\omega) = \frac{H(\omega)}{\prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)},$$

или

$$(\Psi - \omega - K_{00})|M - \omega E| = \frac{H(\omega)}{\prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)} - \sum_{i=1}^N K_{0i} M_i(\omega),$$

и, наконец,

$$(\Psi - \omega + K_{00}) = \frac{H(\omega) - \left(\sum_{i=1}^N K_{0i} M_i(\omega) \right) \cdot \prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)}{|M - \omega E| \prod_{l=1}^N (\bar{\omega}_l - \omega)}.$$

Из вида Ψ мы можем заключить, что последнее уравнение выполняется тогда, и только тогда, когда числитель правой части делится на N -го порядка полином $|M - \omega E|$. Пусть x_k есть все корни полинома. Имея ввиду делимость полиномов, такие же корни x_k должны быть корнями числителя. Следовательно, мы имеем N нелинейных уравнений для N неизвестных ω_l .

Из правой части предыдущего уравнения мы имеем симметрический полином по $\bar{\omega}_l$:

$$\prod_{l=1}^N (x_k - \bar{\omega}_l) = - \frac{H(x_k)}{\sum_{i=1}^N K_{0i} M_i(x_k)}$$

где $k = 1, \dots, N$; произведение может быть разложено:

$$\prod_{l=1}^N (x_k - \bar{\omega}_l) = x_k^N - \sigma_1 x_k^{N-1} \dots + (-1)^N \sigma_N.$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$ есть элементарные симметрические функции ω_l :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_N \\ \sigma_2 &= \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{N-1} \bar{\omega}_N \\ &\dots \\ \sigma_N &= \bar{\omega}_1 \cdot \dots \cdot \bar{\omega}_N.\end{aligned}$$

В случае, когда N корней x_k различны, мы получаем N линейных уравнений N для $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$. По определению элементарных симметрических функций, неизвестные $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_N$ могут быть найдены как корни нелинейного уравнения N -го порядка:

$$z^N - \sigma_1 z^{N-1} \dots + (-1)^N \sigma_N = 0.$$

Таким образом, N неизвестных из $2N + 1$ находятся отдельно.

Восстановим прежний вид Ψ .

$$\Psi = -\Delta - \sum_{l=1}^N \frac{q_l \bar{q}_l}{\bar{\omega}_l - \omega}.$$

Оставшиеся $N + 1$ неизвестных, а именно, коэффициенты связи y_l и параметр однооборотной обратной связи Δ находятся из системы $N + 1$ линейных уравнений, которые возникнут, когда мы подставим $N + 1$ желаемых величин ω в (4.8).

Здесь все величины могут быть комплексными, поэтому для обеспечения стабильности системы мы можем сделать так, чтобы все частоты имели мнимую часть, соответствующую затуханию.

Пример применения алгоритма

Продemonстрируем алгоритм на примере двух мод. Здесь Δ есть параметр однооборотной обратной связи; параметры дополнительного осциллятора есть его неизвестная пока частота $\bar{\omega}_1$ и коэффициент связи $y_1 = q_1 \bar{q}_1$. Характеристическое уравнение таково:

$$\begin{vmatrix} -\Delta - \omega + K_{00} - \frac{y_1}{\omega - \bar{\omega}_1} & +K_{01} \\ +K_{10} & \omega_1 - \omega + K_{11} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.8)$$

Для простоты здесь $K_{00} = K_{11} = 0$ и $K_{10} = -K_{01} = q$; пусть частоты будут равны $\omega_0, \omega_1, \omega_1$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} -\Delta - \omega - \frac{y_1}{\omega - \bar{\omega}_1} & q \\ -q & \omega_1 - \omega \end{vmatrix} = \frac{-\omega(\omega_1 - \omega)^2}{\bar{\omega}_1 - \omega}, \quad (4.9)$$

или

$$\left(-\Delta - \omega - \frac{y_1}{\omega - \bar{\omega}_1}\right)(\omega_1 - \omega) + q^2 = \frac{-\omega(\omega_1 - \omega)^2}{\bar{\omega}_1 - \omega}. \quad (4.10)$$

Согласно алгоритму полином

$$\frac{(\omega_0 - \omega)(\omega_1 - \omega) - q^2(\bar{\omega}_1 - \omega)}{\bar{\omega}_1 - \omega}$$

должен делиться на $\omega_1 - \omega$; значит ω_1 должен быть корнем знаменателя, а отсюда, $\bar{\omega}_1 = \omega_1$. Таким образом, частота осциллятора совпала с частотой 1-й моды.

Подставив в начале $\omega = \omega_0$, затем $\omega = \omega_1$ в характеристическое уравнение, получаем пару уравнений:

$$\begin{aligned} -\Delta(\omega_1 - \omega_0) - y_l + q^2 &= 0 \\ -y_l + q^2 &= 0 \end{aligned}$$

из которых имеем $\Delta = 0$ и $y_l = q^2$; эти решения соответствуют примеру, приведенному в начале главы.

4.3 Алгоритм для уравнений с локализованными по азимуту силами и обратной связью

Алгоритм для усредненных уравнений может быть преобразован в алгоритм получения произвольных собственных частот для общего случая. Опишем его вкратце.

Введем обозначение $A = \|a_{ij}\|$ для матрицы отображения $N+1$ мод; ее порядок равен $2(N+1)$ и два первых ряда и колонки соответствуют преобразованию моды X_0 . На рисунке 3.1 изображены собственные частоты матрицы от тока (используется 3-х модовая модель и $W = const$).

для получения матрицы $B = \bar{A} \cdot FB$:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 a_{11} + \Delta_2 a_{12} & a_{12} & \dots & \dots & a_{12} & 0 & a_{12} & 0 & \dots \\ \Delta_1 a_{21} + \Delta_2 a_{22} & a_{22} & & & a_{22} & 0 & a_{22} & 0 & \\ \Delta_1 a_{31} + \Delta_2 a_{32} & a_{32} & & & a_{32} & \dots & & & \\ \Delta_1 a_{41} + \Delta_2 a_{42} & a_{42} & & & a_{42} & & & & \\ \dots & & & & & & & & \\ y_1 s_1 & 0 & \dots & \dots & p_1 & s_1 & 0 & 0 & \dots \\ y_1 c_1 & 0 & & & r_1 & c_1 & 0 & 0 & \\ y_2 s_2 & 0 & & & 0 & 0 & p_2 & s_2 & \\ y_2 c_2 & 0 & & & 0 & 0 & r_2 & c_2 & \\ \dots & & & & & & & & \dots \end{pmatrix} \cdot \quad (4.13)$$

Выберем переменные для уравнений $\Delta_1, \Delta_2, y_i s_i, y_i c_i, p_i, c_i$. Мы найдем их из уравнений $2(2N + 1)$

$$|B - \lambda_k I| = 0,$$

где λ_k есть назначенные частоты.

Коэффициенты $\Delta_1, \Delta_2, y_1 s_1, y_1 c_1$ входят в уравнениях линейно, они могут быть исключены из уравнений. Коэффициенты p_i, c_i могут быть найдены из алгебраических уравнений в полной аналогии с предыдущим разделом (они входят в уравнения симметрически). На рисунках 4.1 – 4.3 приведены случаи различных сил однооборотной и 2-х осцилляторной обратной связи (на рисунке 4.2 приведен случай полного устранения зависимости частот от тока).

4.3.1 Расширение алгоритмов на радиальные моды

Все полученные алгоритмы относились к случаю, когда у нас есть только одна гармоника с ненулевым полным дипольным моментом. Часто радиальные моды не важны на практике, поэтому решения для "полого" сгустка могут быть взяты за основу для создания обратной связи, значительно отодвигающей порог СПМ-неустойчивости.

В общем случае у нас существует много нулевых гармоник, соответствующих разным радиальным поясам.

Однако мы можем составить из них одну комбинацию с ненулевым дипольным моментом, а остальные - без дипольного момента. Эта возможность следует из линейной алгебры: линейное пространство может

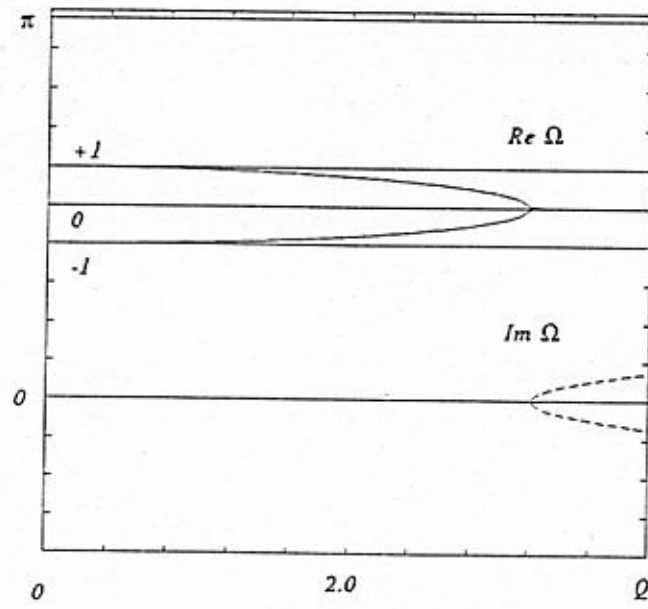


Рис. 4.1: Частоты мод Ω от параметра Q ; добавлено два осциллятора обратной связи. 50% компенсация порога СПМ-неустойчивости.

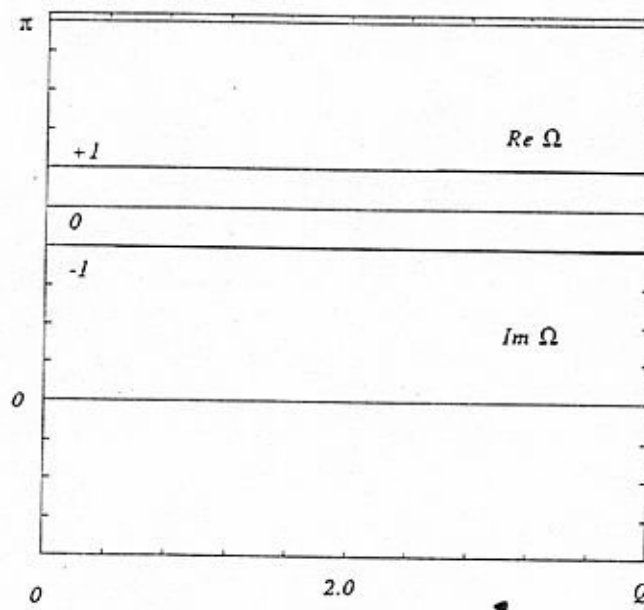


Рис. 4.2: Полное устранение порога.

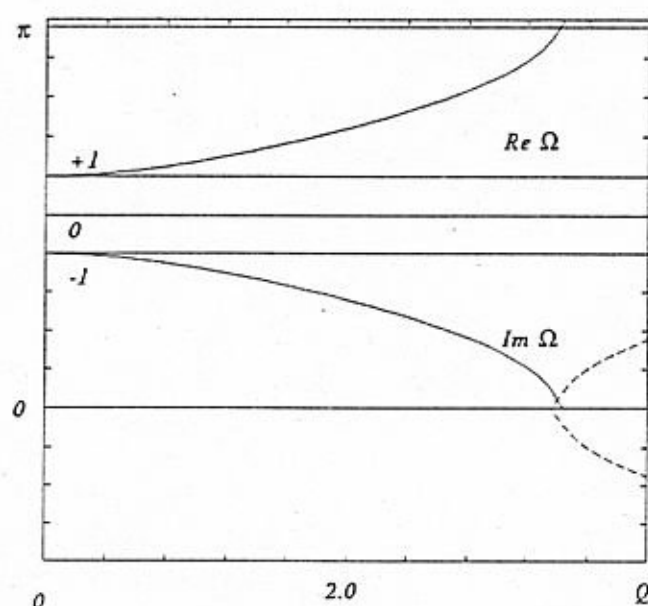


Рис. 4.3: 5-кратно увеличенная сила осцилляторов.

быть разложено в прямую сумму подпространств:

- i) одномерное av с произвольным a и $v = (1, \dots, 1)$;
- ii) гиперплоскость, натянутую на векторы $x = (\dots, x_i, \dots)$, которые ортогональны v , так что $(x \cdot v) = 0 \Rightarrow \sum x_i = 0$.

После этого один вектор v имеет ненулевой дипольный момент, а остальные - нулевой.

Далее мы можем применить полученные алгоритмы.

4.4 Обратная связь с запаздыванием

Как было упомянуто выше, произвольная обратная связь и интенсивный сгусток являются слишком сложной системой для ее изучения, поэтому мы возьмем только те случаи, когда система является спектральной (см. 3.3.1). В самом простом случае, когда между ударами кикера мы можем вычислить динамические переменные интересующих нас мод путем обработки сигналов пикапов, получение устойчивой системы элементарно. Пусть перед приходом пучка на кикер у нас есть данные о N наиболее выраженных модах (на практике перед порогом проявляются 2-3 моды).

Мы должны ударить сгусток пропорционально некоторой комбинации углов и координат мод. Пусть у нас есть матрица преобразования для N мод A ; полная матрица, как и ранее, получится после домножения на матрицу кикера

$$K = \begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \dots & \Delta_N \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая означает изменение угла нулевой гармоники пропорционально переменным гармоник⁴; Δ_i есть искомые коэффициенты пропорциональности. Для их нахождения у нас есть $2N$ линейных уравнений, которые получатся из условий

$$|K \cdot A - \lambda_i E| = 0,$$

где $\lambda_i (i \leq 2N)$ есть те собственные числа, которые получатся у новой системы и которые мы, в общем случае, можем сделать произвольными.

Более сложные спектральные системы могут быть проанализированы аналогично, правда уравнения на коэффициенты получатся нелинейными, что может затруднить их поиск.

4.5 Практические аспекты использования полученных алгоритмов

Как показывает практика и моделирование, существует ряд сложностей в использовании приведенных выше приемов устранения порога.

Слабая связь с нулевой гармоникой, например, не позволит воздействовать на высшие моды, которые могут спариться между собой. В данном случае обратная связь, которая не может воздействовать на высшие моды без посредства нулевой, не может как либо повлиять на порог неустойчивости. Однако хроматизм частот может изменить ситуацию; в его присутствии высшие моды приобретают дипольный момент. Для этого случая алгоритмы должны быть модифицированы.

⁴здесь первый элемент преобразовываемого вектора относится к углу нулевой моды

Кратные корни могут осложнить отыскание нужных параметров обратной связи. Однако в этом случае легко дописать недостающие уравнения на параметры путем дифференцирования полиномов, как и делается в алгебре.

Однооборотная обратная связь, присутствующая в решениях, может быть опущена. И вообще, приведенные способы являются примерами устранения порога. На деле, если у нас проявляются N мод, то мы должны найти $2N$ параметров для получения нужных собственных чисел преобразования ⁵.

В случае накопителя LEP однооборотная обратная связь не дает повышения порога (как считается, из-за большого когерентного сдвига между пикапом и кикером). В работе [22] было предложено для сдвига нулевой моды использовать осциллятор. Его преимущество состоит в том, что мы можем использовать совмещенные пикап и кикер без осложнений; поскольку для удара на кикере используется та динамическая переменная осциллятора, которая не меняется на пикапе, то проблемы, аналогичной проблеме однооборотной связи, не существует (для однооборотной обратной связи совмещенные пикап и кикер означают задержку в действии на один оборот). В идеале он давал 80% повышения порога; как показал эксперимент, такая обратная связь действительно стала повышать порог ($\approx 10\%$); для получения большего тока она должна быть усилена. В целом эксперимент показал, что осцилляторная обратная связь может выполнять все функции от сдвигов частот мод до внесения затухания (см. [23]).

На рисунках 4.4 и 4.5 приведены частоты мод от тока с нулевой и оптимальной силой обратной связи соответственно.

Шумы систем могут быть существенны и спектр из-за них сильно искажен. Очевидно, что в перспективе возможности реализации обратной связи, запоминающей предыдущие обороты, будут упираться в затухание корреляций между сигналами пикапа и состоянием сгустка через несколько оборотов.

⁵это в случае спектральной неосцилляторной связи; в случае добавления осцилляторов количество собственных частот увеличивается и мы должны предусмотреть добавочные параметры

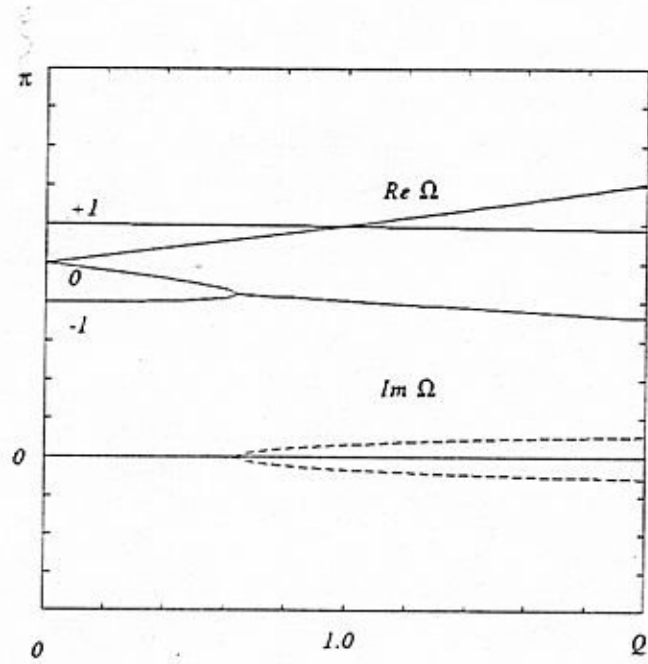


Рис. 4.4: Частоты мод Ω с дополнительным осциллятором. Сила обратной связи мала.

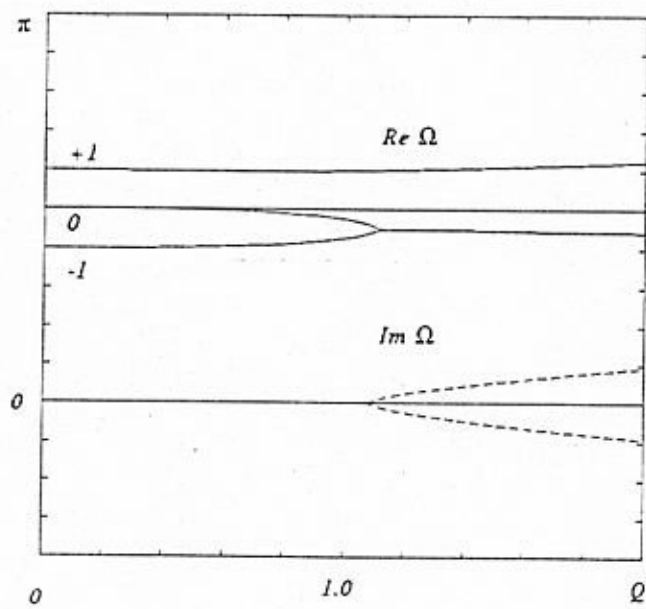


Рис. 4.5: Частоты мод Ω с одним осциллятором обратной связи. Взаимодействие с осциллятором устраняет сдвиг нулевой моды.

Глава 5

Продольное движение

Известно, что коллективные уравнения для поперечного движения дипольного момента с учетом синхротронных колебаний сходно с уравнением продольного движения (см., например, [10]). Вкратце изложим вывод уравнений для коллективного движения.

Кинетическое уравнение для функции распределения есть:

$$\frac{df}{dt} = St, \quad (5.1)$$

где St член возникает из-за диффузии и затухания.

Стационарный сгусток наводит стационарные поля с гамильтонианом

$$H = \alpha\delta^2/2 + U(S),$$

где α есть коэффициент уплотнения орбит (см. страницу 13). Будем использовать далее две переменные: H и ϕ ($\frac{d\phi}{dt} = 2\pi/\omega(H)$). Пусть стационарным решением уравнения 5.1 является функция f_0 (она есть функция только H). Рассмотрим малое возмущение \tilde{f} этой функции. На нее получим линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \omega(H) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} + \frac{\partial f_0}{\partial H} \alpha \delta F = 0,$$

где F есть сила

$$F = e^2 \int_{\Gamma} \tilde{f} W(\Delta s) d\Gamma.$$

Здесь W -функция имеет другой смысл; она дает силу в продольном направлении; Γ есть фазовое пространство.

Нормируем функцию \tilde{f} на $\frac{\partial f_0}{\partial H}$.

$$g = \frac{\tilde{f}}{\frac{\partial f_0}{\partial H}}.$$

Получим уравнение на g

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \omega(H) \frac{\partial g}{\partial \phi} + \alpha \delta F = 0,$$

здесь силу F нужно выразить через новую переменную g :

$$F = e^2 \int_{\Gamma} \frac{\partial f_0}{\partial H} g W(\Delta s) d\Gamma.$$

Далее можно ввести переменные $h = g^+ + g^-$ и $\bar{h} = g^+ - g^-$, сложить и вычесть уравнение на g для разных знаков δ ¹. Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \omega(H) \frac{\partial h}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \omega(H) \frac{\partial \bar{h}}{\partial \phi} &= 2\alpha |\delta| F. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эти уравнения с точностью до множителя в силе $2\alpha |\delta|$ и замены \bar{D} на h и D на \bar{h} совпадают с 1.14. Кроме того, в силе в 1.15 используется функция распределения частиц в синхротронной плоскости, а в данном случае - её производная.

Множитель $2\alpha |\delta|$ меняет коэффициенты связи между модами; в остальной системе схожи, поэтому основные свойства поперечных коллективных колебаний переносятся на продольные колебания. Итак:

- система взаимодействующих мод интенсивного сгустка является спектральной;
- спектр является смешанным (непрерывно-дискретным) и полным.

¹здесь индексы + и - у функций относятся к частицам с $\delta > 0$ и $\delta < 0$

Однако существует одно существенное отличие. Нарастающие продольные колебания меняют функцию распределения и система может выйти из режима линейных колебаний. Если стационарная функция неустойчива за счет связи мод, то, нарастая, она меняет коэффициенты связи мод. Система нескольких мод будет эквивалентна многомерному нелинейному дифференциальному уравнению, при этом основное неустойчивое распределение является неустойчивой стационарной точкой в пространстве этих мод; в нелинейной системе движение в ее окрестности является, как правило, стохастическим (гомоклиническая структура Пуанкаре) и это порождает "турбулентные" колебания в продольном направлении. Это объяснение микроволновой неустойчивости аналогично приведенному в [24] для обычной турбулентности (уравнения Навье-Стокса).

Сила и действие обратной связи в продольном направлении аналогичны поперечной обратной связи, поэтому для малых продольных колебаний пригодны методы устранения поперечной неустойчивости.

Заключение

Перечислим основные результаты работы:

- построен аппарат расчетов спектра поперечных колебаний для общего случая;
- проанализирована зависимость порога СПМ-неустойчивости от параметров сгустка;
- получены уравнения (отображения), описывающие взаимодействие интенсивного сгустка с произвольными обратными связями;
- предложены способы устранения неустойчивости с помощью некоторых вариантов обратных связей;
- результаты перенесены на случай продольных колебаний.

Таким образом получилось, что способы устранения порога сильных неустойчивостей являются универсальными и могут быть положены в основу создания накопителей с большими интенсивностями сгустков.

Используя представившуюся возможность, выражаю благодарность А.Н.Скринскому за полезные обсуждения некоторых аспектов работы и постоянное внимание к ней; Ю.М.Шатунову за общее руководство работой и за полезные замечания в процессе подготовки рукописи; Е.А.Переведенцеву, без обсуждения с которым не был получен практически ни один из результатов, за руководство работой. Выражаю признательность Д.В.Пестрикову за полезные дискуссии; И.Н.Нестеренко - за беседы, в ходе которых появились некоторые из направлений данной работы; Д.Г.Виллевальду - за ценные поправки и помощь в подготовке Приложения I.

Я благодарен Ж.Гарету за постановку задачи, а также ему, А.Хоффману и Б.Зоттеру за полезные обсуждения данной работы в ЦЕРНе (последнему также за помощь, оказанную в исследовании эффектов, связанных с нелинейным синхротронным движением); Д.Брандту - за большой вклад в выработку линии практического применения изложенных выше идей на коллайдере LEP. Выражаю признательность Ж.-Л. Сабби за предоставление программы, моделирующей движение частиц в накопителях. В заключении, хочу поблагодарить Е.Пешарда, Р.Ольсена, Л.Арнодона за реализацию одной из предложенных здесь конфигураций обратных связей на LEPe.

Приложение I

Поля в ТЕМ-линии

Электромагнитное поле в линии удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \end{cases}$$

где ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума, \vec{j} — вектор плотности тока. Поскольку поле ТЕМ-волны внутри длинной линии не имеет продольной компоненты, ее возбуждение возможно лишь за счет поперечного движения сгустка. В тоже время вблизи концов поля трехмерны и на краях линии ТЕМ волны будут возбуждаться орбитальным движением сгустка.

Следуя работе [25], поля в линии могут быть представлены в виде

$$\begin{cases} \vec{E} = V(s, t) \vec{\mathcal{E}}(x, y) \\ \vec{H} = I(s, t) \vec{\mathcal{H}}(x, y) \end{cases}$$

где V, I — напряжение и ток в линии, которые могут быть определены обычным способом. Векторные функции $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}$ являются решением статической задачи. Они имеют только поперечные компоненты и удовлетворяют нормировке

$$\int_{\sigma_{\perp}} (\mathcal{E}_x \mathcal{H}_y - \mathcal{E}_y \mathcal{H}_x) d\sigma_{\perp} = 1$$

где интеграл берется по поперечному сечению линии.

Подставляя это электромагнитное поле в уравнения Максвелла, и производя интегрирование по поперечному сечению линии, получаем телеграфные уравнения на ток и напряжение в линии:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} + L_o \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial s} + C_o \frac{\partial V}{\partial t} = - \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}} d\sigma_{\perp} \end{cases}$$

где L_o и C_o имеют смысл погонных индуктивности и емкости линии:

$$L_o = \int_{\sigma_{\perp}} \mu \mathcal{H}^2 d\sigma_{\perp}, \quad C_o = \int_{\sigma_{\perp}} \varepsilon \mathcal{E}^2 d\sigma_{\perp}$$

а член в правой части описывает возбуждение ТЕМ волны поперечным током сгустка.

Решение телеграфных уравнений для двигающейся в положительном направлении оси s частицы с током

$$\vec{j} = e \cdot \vec{v} \delta(x) \delta(y) \delta(v_s t - s) \Theta(t)$$

есть

$$V(s, t) = \begin{cases} -\frac{Z_o}{2(1+\beta)} \vec{\mathcal{E}}_o \vec{j}_o \Theta(ct + s), & s < v_s t \\ -\frac{Z_o}{2(1-\beta)} \vec{\mathcal{E}}_o \vec{j}_o \Theta(ct - s), & s > v_s t \end{cases}$$

$$I(s, t) = \begin{cases} +\frac{1}{2(1+\beta)} \vec{\mathcal{E}}_o \vec{j}_o \Theta(ct + s), & s < v_s t \\ -\frac{1}{2(1-\beta)} \vec{\mathcal{E}}_o \vec{j}_o \Theta(ct - s), & s > v_s t \end{cases}$$

где введено обозначение $\beta = v_s/c$, $\vec{j}_o = e \cdot \vec{v}$.

Для решения задачи о возбуждении коллективных полей в длинной линии конечной протяженности необходимо найти граничные условия на ее концах. Граничные условия определяются включенными на концах линии нагрузками Z_1 и Z_2 . Следуя [25], электрическое поле на концах линии может быть представлено как

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= V(s=0, t) \vec{\mathcal{E}}_1(x, y, s) \\ \vec{E}_2 &= V(s=L, t) \vec{\mathcal{E}}_2(x, y, s) \end{aligned}$$

где $\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{E}}_2$ - векторные функции, имеющие как поперечные, так и продольные компоненты, описывающие краевые поля в линии и непрерывно

переходящие в $\vec{\mathcal{E}}$ непосредственно на линии. $s = 0$ и $s = L$ — координаты начала и конца линии. Легко показать, что, исключая из пары телеграфных уравнений переменную I , получаем волновое уравнение для напряжения в линии

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = L_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}} d\sigma_{\perp}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \left(\frac{V}{Z_1} - \frac{1}{L_0} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial s} d\tau \right)_1 = - \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}}_1 d\sigma_{\perp} \\ \left(\frac{V}{Z_2} + \frac{1}{L_0} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial s} d\tau \right)_2 = - \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}}_2 d\sigma_{\perp} \end{cases}$$

Будем искать решение в виде $V(s, t) = V'(s, t) + V''(s, t)$, где V' есть решение неоднородного волнового уравнения с однородными граничными условиями, т.е. волна, возбуждаемая частицей при ее движении непосредственно в длинной линии, а V'' — решение однородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями, т.е. волна, излучаемая при пролете частицей концов длинной линии.

Рассмотрим случай согласованной линии, т.е.

$$Z_1 = Z_2 = Z_0$$

Волна, излучаемая при пролете частицей линии конечной длины может быть получена из решения для бесконечно длинной линии. В результате имеем

$$V'(s, t) = \begin{cases} -\frac{eZ_0}{2(1+\beta)} \vec{\mathcal{E}}_0 \vec{v}_{\perp} \left[\Theta(ct + s) - \Theta \left(ct + s - L \frac{1+\beta}{\beta} \right) \right], & s < v_s t \\ -\frac{eZ_0}{2(1-\beta)} \vec{\mathcal{E}}_0 \vec{v}_{\perp} \left[\Theta(ct - s) - \Theta \left(ct - s - L \frac{1-\beta}{\beta} \right) \right], & s > v_s t \end{cases}$$

Легко убедиться простой подстановкой, что полученное решение удовлетворяет однородным граничным условиям.

Как было упомянуто выше, возбуждение TEM волны происходит и на концах линии орбитальным движением пучка. Указанная волна является решением однородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями. Решением однородного волнового уравнения являются прямая и обратная волны:

$$V''(s, t) = f(ct - s) + g(ct + s)$$

Подставляя это выражение в граничные условия, получаем условия на функции f и g :

$$\left(\frac{V''}{Z_0} - \int_0^t \frac{c}{Z_0} \frac{\partial V''}{\partial s} d\tau \right)_{s=0} = \frac{2f(ct)}{Z_0} = - \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}}_1 d\sigma_{\perp}$$

$$\left(\frac{V''}{Z_0} + \int_0^t \frac{c}{Z_0} \frac{\partial V''}{\partial s} d\tau \right)_{s=L} = \frac{2g(ct+L)}{Z_0} = - \int_{\sigma_{\perp}} \vec{j} \vec{\mathcal{E}}_2 d\sigma_{\perp}$$

Найдем векторные функции $\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{E}}_2$, описывающие электрическое поле на концах линии. Согласно определению эти функции являются решением трехмерной электростатической задачи. Предполагая что край достаточно тонким, поперечное электрическое поле вблизи концов будем описывать как

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 [\Theta(s) - \Theta(s-L)]$$

Применение уравнений Максвелла дает выражения для продольных компонент векторных функций $\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_2$

$$\mathcal{E}_{1s} = \vec{\mathcal{E}}_0 \vec{r} \delta(s) \quad \mathcal{E}_{2s} = -\vec{\mathcal{E}}_0 \vec{r} \delta(s-L)$$

где $\vec{r} = (x; y)$. Очевидно, что если частица имеет ненулевые поперечные координаты при пролете концов линии, будет происходить возбуждение электромагнитной волны орбитальным движением частицы. Воспользовавшись выражением для плотности тока заряженной частицы

$$\vec{j} = e \delta(v_s t - s) \delta(y - y_0) \delta(x - x_0) \vec{v}$$

получаем

$$V''(s, t) = -\frac{e Z_0 c}{2} \vec{\mathcal{E}}_0 \cdot \vec{r}_0 \left\{ \delta(ct - s) - \delta\left(ct + s - L \frac{1 + \beta}{\beta}\right) \right\}$$

где введено обозначение $\vec{r}_0 = (x_0; y_0)$ — координата частицы на линии.

В заключении заметим, что выражения для тока $I(s, t)$ можно получить из соответствующих выражений для напряжения $V'(s, t), V''(s, t)$, используя соотношение

$$I(s, t) = - \int_0^t \frac{c}{Z_0} \frac{\partial V}{\partial s} d\tau$$

Считая, что набег бетатронной фазы на пластинах мал и его длина пренебрежима в сравнении с длиной пластин, найдем изменение угла задней частицы при координате x и угле x' передней. Пусть зазор пластин по горизонтали есть a , ширина b (считаем для простоты $b \ll a$) и длина L . Из выражений для полей имеем (в системе СГС)

$$\Delta p = e^2 \left(\frac{Z_0}{2a^2} x - \frac{Z_0}{2a^2} L x' \right),$$

где $Z_0 = \frac{4\pi a}{c b}$. Здесь учитывалось действие только задней волны; действие передней волны для случая частиц больших энергий пренебрежимо². Отсюда находим введенные в работе W и G функции.

$$W = \frac{Z_0}{2a^2}$$

и

$$G = -\frac{Z_0}{2a^2} L.$$

²ее вклад будет значительным при $L_{сз} \leq L/\gamma^2$

Приложение II

Построение циркулянтной матрицы

Разобьем кольцо (аналог "полого" сгустка) в синхротронной фазовой плоскости на $2k+1$ частей с центром в каждой из них, имеющих угол $\phi_m = \frac{2\pi m}{2k+1} + \frac{\pi}{2k+1}$ (где m - ее номер, $m \leq 2k+1$).

Будем далее понимать каждую часть кольца как группу частиц (далее - "частица") с дипольным моментом D_m и углом D'_m .

Разбиение кольца таково, что "частицы" с номером m и $2k+1-m$ имеют одинаковые координаты и противоположные синхротронные скорости ($\frac{\delta E}{E}$). Исключение составляет задняя непарная частица. Такое расположение, а именно наличие пар "частиц" с противоположными скоростями и равными координатами дает возможность ввести переменные "разность" и "сумма" дипольных моментов в каждой точке и наиболее естественно построить численную процедуру решения.

Найденные невозмущенные моды (с номером $\pm n$) имеют следующую зависимость дипольного момента от синхротронного угла ϕ :

$$D(\phi)(D'(\phi)) = d(d') \cos(n\phi)$$
$$\bar{D}(\phi)(\bar{D}'(\phi)) = \bar{d}(\bar{d}') \sin(n\phi),$$

где $d, d' \dots$ зависят только от времени.

Здесь D, \bar{D} есть сумма и разность дипольных моментов в одной точке по координате.

Ранее найденные комбинации d, d', \bar{d}, \bar{d}' , составляющие моду (т.е. подчиняющиеся осциляторным уравнениям без связи), таковы:

$$X'_n = d' - \bar{d}, X_n = d + \bar{d}'$$

для собственной частоты $\omega_b + n\omega_s$ и

$$Y'_n = d' + \bar{d}, Y_n = d - \bar{d}$$

для собственной частоты $\omega_b - n\omega_s$.

На основании точных формул построим приближенные вектора гармоник, совпадающие с точными в $2k + 1$ точках (центрах разбиений кольца) с синхротронными углами $\phi_m = \frac{2\pi m}{2k+1} + \frac{\pi}{2k+1}$ (где m - ее номер, $m \leq 2k + 1$). Точным решениям для гармоник соответствуют вектора

$$X'_n \rightarrow D_n = \cos n\phi_m, D'_n = -\sin n\phi_m X_n \rightarrow D_n = \sin n\phi_m, D'_n = \cos n\phi_m$$

для собственной частоты $\omega_b + n\omega_s$, которые мы получим из формул первой главы после зануления Y_n и взяв $d = 1/2$. Аналогично

$$Y'_n \rightarrow D_n = \cos n\phi_m, D'_n = \sin n\phi_m Y_n \rightarrow D_n = -\sin n\phi_m, D'_n = \cos n\phi_m$$

для собственной частоты $\omega_b - n\omega_s$.

Легко убедиться, что в точках с номером m или $2k + 1 - m$ полный дипольный момент $D \propto \cos m\phi$, а разность $\bar{D} = D(m) - D(2k + 1 - m) \propto \sin m\phi$, а соотношение знаков и амплитуд таково, чтобы составить собственные комбинации X_n, Y_n .

По определению, матрица перехода в базисе таких пар векторов есть

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

где α есть собственная частота, соответствующая данному вектору.

Всего число точек (а значит и число независимых пар векторов) равно $2k + 1$, потому имеется возможность описать взаимодействие лишь первых мод с частотами $\omega_b - k\omega_s, \dots, \omega_b, \dots, \omega_b + k\omega_s$.

Матрица перехода в построенном выше базисе является блочно-диагональной с блоками 2×2 , приведенными выше.

Матрица свободного пространства в этом представлении строится следующим образом. Каждый сектор синхротронного кольца (названный выше "частица") не вращается в синхротронной плоскости как реальные частицы, потому изменение его дипольного момента связано с переносом частиц по кольцу за счет синхротронного движения, а также с бетатронными колебаниями. Матрицей, которая осуществляет

такие преобразования, является блочная циркулянта. Для ее построения используем полученные решения.

Действуя по обычным правилам линейной алгебры, мы должны взять блочно-диагональную матрицу в представлении фурье гармоник, умножить слева на матрицу, состоящую из столбцов собственных векторов и справа - на ей обратную.

Введем соответствующую нумерацию строк и столбцов (т.е. собственных векторов). Во первых, собственные вектора идут парами X_n, X'_n . Поместим их в матрицу так, чтобы пара векторов "нулевой" моды шла на первом месте, далее пары "-1" и "+1" мод, "-2" и "+2" и т.д. В строках парами последовательно должны идти дипольные моменты и их производные "частиц" согласно их нумерации против часовой стрелки (т.е. по направлению синхротронного вращения). Собственные вектора были найдены выше:

$$X'_n \rightarrow D_n = \cos \phi_n, D'_n = -\sin \phi_n X_n \rightarrow D_n = \sin \phi_n, D'_n = \cos \phi_n$$

для собственной частоты $\omega_b + n\omega_s$ и

$$Y'_n \rightarrow D_n = \cos \phi_n, D'_n = \sin \phi_n Y_n \rightarrow D_n = -\sin \phi_n, D'_n = \cos \phi_n$$

для собственной частоты $\omega_b - n\omega_s$.

Матрица собственных векторов будет выглядеть так:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \cos m\phi_1 & \sin m\phi_1 & \cos m\phi_1 & -\sin m\phi_1 & \dots \\ 0 & 1 & & -\sin m\phi_1 & \cos m\phi_1 & \sin m\phi_1 & \cos m\phi_1 & \\ 1 & 0 & & \cos m\phi_2 & \sin m\phi_2 & \cos m\phi_2 & -\sin m\phi_2 & \\ 0 & 1 & & -\sin m\phi_2 & \cos m\phi_2 & \sin m\phi_2 & \cos m\phi_2 & \\ 1 & 0 & & \cos m\phi_3 & \sin m\phi_3 & \cos m\phi_3 & -\sin m\phi_3 & \\ 0 & 1 & & -\sin m\phi_3 & \cos m\phi_3 & \sin m\phi_3 & \cos m\phi_3 & \\ \dots & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

где $\phi_m = \frac{2\pi n}{2k+1} + \frac{\pi}{2k+1}$.

Матрица перехода равна соответственно:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \Omega_0 T & \sin \Omega_0 T & \dots & 0 & & & & \dots \\ -\sin \Omega_0 T & \cos \Omega_0 T & & & & & & \\ 0 & & \dots & \cos \Omega_{-m} T & \sin \Omega_{-m} T & 0 & 0 & \\ \dots & & & -\sin \Omega_{-m} T & \cos \Omega_{-m} T & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \cos \Omega_m T & \sin \Omega_m T & \\ & & & 0 & 0 & -\sin \Omega_m T & \cos \Omega_m T & \dots \end{pmatrix}$$

где $\Omega_m = \omega_\beta + m\omega_s$, и T есть интервал времени, равный пролету секции (свободной от наведенных полей).

Матрица перехода равна соответственно:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \Omega_0 T & \sin \Omega_0 T & \dots & 0 & & & & \dots \\ -\sin \Omega_0 T & \cos \Omega_0 T & & & & & & \\ 0 & & \dots & \cos \Omega_{-n} T & \sin \Omega_{-n} T & 0 & 0 & \\ \dots & & & -\sin \Omega_{-n} T & \cos \Omega_{-n} T & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \cos \Omega_n T & \sin \Omega_n T & \\ & & & 0 & 0 & -\sin \Omega_n T & \cos \Omega_n T & \dots \end{pmatrix}$$

где $\Omega_n = \omega_b + n\omega_s$, T есть время перехода.

Таким образом блочная циркулянта равна

$$C_B = M T M^{-1}$$

или, после вычислений (в виде прямого произведения матриц)

$$C_B = C \otimes T_2$$

где

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix},$$

μ есть набег бетатронной фазы, и

$$C_{ij} = \frac{\sin(2k+1)\varphi_{ij}}{(2k+1)\sin \varphi_{ij}},$$

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{2}(\omega_s T - (2k + 1 - i + j) * \frac{2\pi}{2k + 1}),$$

где T есть время перехода, который описывается этой матрицей.

Полученная матрица C_B с размерностью $2(2k + 1)$ описывает свободное движение $2k + 1$ мод в пространственно-временном представлении (т.е. в представлении дипольных моментов секторов разбиения полого сгустка).

Библиография

- [1] C.Pellegrini, Nuovo Cimento, NS-16, (1969) 1073.
- [2] M.Sands,Slac TN-69-8, Stanford (1969).
- [3] Н.С.Диканский,
М. М. Карлинер, А.Н. Скринский и др.*Взаимодействие когерентных бетатронных колебаний с внешними системами.* Атомная энергия,22 (1967) 188.
- [4] Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. *О демпфировании когерентных бетатронных колебаний пучка в накопителе,* Препринт 315-ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск (1969).
- [5] R.Ruth, Proc. of 12th Int. Conf. on High Energy Accelerators, Fermi Nat. Lab.(1983)389.
- [6] S.Myers,IEEE Trans.Nucl.Science NS-32, (1985) 2341.
- [7] Н.С.Диканский, Д.В. Пестриков. *Физика интенсивных пучков в накопителях,* Наука, Новосибирск (1989).
- [8] F.Sacherer,IEEE Trans.Nucl.Science NS-24, 3(1977)1393.
- [9] R.D. Kohaupt, *DESY report.* 80/22 (1980).
- [10] A.W.Chao, *Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators,* John Wiley & Sons, Inc., (1993).
- [11] Е.А.Переведенцев, частное сообщение.

- [12] В.В.Мигулин, В.И.Медведев, Е.Р.Мустель, В.Н.Парыгин, *Основы теории колебаний*, Наука, Москва (1988).
- [13] V.V. Danilov and E.A. Perevedentsev, "Strong Head-Tail Effect and Decoupled Modes in the Spacetime Domain", 15th Int. Conf. on High-Energy Accelerators, Hamburg, July 20-24, 1992.
- [14] V.V. Danilov, I.A.Кооп, I.N.Nesterenko, E.A. Perevedentsev, E.I.Zinin, "Current dependence of bunch dimensions in BEP storage ring", 15th Int. Conf. on High-Energy Accelerators, Hamburg, July 20-24, 1992.
- [15] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва (1977).
- [16] Г.Эккер. *Теория полностью ионизованной плазмы*, Мир, Москва (1974).
- [17] R.Balescu, *Statistical mechanics of charged particles*, Interscience, New York (1963).
- [18] G.Besnier, D.Brandt and B.Zotter, *Particle Accelerators*, 17,(1985) 51
- [19] Y.Chin, K.Satoh and K.Yokoya, *Particle Accelerators*, 13, (1983) 45.
- [20] V.V. Danilov and E.A. Perevedentsev, "Transverse Feedback System vs. Strong Head-Tail Effect", CERN Report SL/92-58 (AP).
- [21] Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
- [22] V.V. Danilov and E.A. Perevedentsev, "Feedback system for elimination of the transverse mode coupling instability", CERN Report SL/93-38 (AP).
- [23] L.Arnaudon, D.Brandt, K.Cornelis, V.Danilov, M.Jonker, R.Olsen, E. Perevedentsev, E. Pesschardt, G. Sabbi, "First test with a new transverse reactive feedback system", CERN SL-MD Note 158 (1994).
- [24] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York (1978)

[25] М. М. Карлинер *Когерентные неустойчивости пучка в электронных накопителях вследствие электромагнитного взаимодействия с окружающей структурой. часть 1*, Новосибирск, 1974.