

ДИНАМИКА ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ СПИНОВЫХ РЕЗОНАНСОВ

Я. С. Дербенев, А. М. Кондратенко, А. Н. Скринский

Исследуется движение спина частиц в накопителях (ускорителях). Методы и результаты работ [2-7] по изучению спиновых резонансов обобщаются на случай произвольной замкнутой орбиты [1]. Кроме резонансов первого приближения рассмотрены резонансы высших порядков, для которых получены правила отбора резонирующих гармоник. Основная часть работы посвящена прохождению резонансов. Вводится понятие эффективной и адиабатической зон. Дано полное решение задачи об однократном прохождении, объединяющее частные результаты [2, 5-7]. На этой основе, используя общий характер движения спина в периодическом поле, установленный в [1], решается задача о периодическом прохождении резонанса.

1. Введение

Для экспериментов по изучению спиновой зависимости взаимодействия заряженных частиц актуальны вопросы сохранения когерентной поляризации пучка и управления ее направлением и степенью. Специфической особенностью движения частиц в накопителях (ускорителях) является малость отклонений от равновесной орбиты. Благодаря этому спиновые траектории могут расходиться лишь за времена, значительно превышающие период циклического движения частиц. Принципиальное значение для динамики поляризации пучка имеет существование направления устойчивой поляризации \mathbf{n} . В случае плоской равновесной орбиты \mathbf{n} направлено по ведущему магнитному полю ($\mathbf{n} = \text{const}$). Как показано в [1], направление устойчивой поляризации существует и в накопителе с произвольным полем. При этом \mathbf{n} является периодической функцией азимута частицы. Практически оказывается возможным создавать в заданном месте орбиты любое направление \mathbf{n} .

Как известно [1-7], движение спина становится неустойчивым лишь в узких резонансных областях, когда частота прецессии спина близка к какой-либо комбинации из частот орбитального движения. При этом малый разброс траектории частиц может существенно уменьшить начальную степень поляризации пучка. Это явление опасно для экспериментов с поляризованными пучками; с другой стороны, его можно использовать для преднамеренной деполаризации.

Практически важной является ситуация с прохождением резонансов, вызываемым как естественными причинами, так и искусственно (ускорение частиц, модуляция частот движения, синхротронные колебания энергии и т. п.). В работах [2, 5-7] изучалось однократное прохождение. Проблема многократного прохождения, несмотря на ее практическую важность, до сих пор не исследовалась. Причиной этого является ее математическая и физическая сложность.

В данной работе решена задача многократного периодического прохождения. Принципиальным для ее решения является понимание общего характера движения спина в периодическом поле, установленного в [1]. Полученные результаты дают ответ на вопрос о поведении поляризации пуч-

ка в целом при периодическом прохождении резонанса, в частности, определяют условия деполаризации.

Кроме того, в работе обобщаются и уточняются результаты исследования стационарных резонансов и однократного прохождения, что необходимо для практических приложений и исследования многократного прохождения.

2. Резонансы спинового движения

Движение вектора спина описывается уравнением [1, 8, 9]

$$\begin{aligned} d\xi / dt &= [\mathbf{w}_\pi \xi], \\ \mathbf{w}_\pi &= \left(1 + \gamma \frac{q'}{q_0}\right) \frac{[\mathbf{v}\mathbf{v}']}{v^2} - \frac{q}{\gamma} \frac{\mathbf{H}\mathbf{v}}{v^2} + \frac{q}{\gamma^2 v^2} [\mathbf{v}\mathbf{E}], \end{aligned}$$

где $q = q_0 + q' \equiv e/m + q'$ — гиромангнитное отношение, q' — его аномальная часть, $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$, $c = 1$, \mathbf{v} , $\dot{\mathbf{v}}$ — скорость и ускорение частицы, движущейся в электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . Введем обозначения: $\mathbf{w}_s(\theta) = \mathbf{w}_s(\theta + 2\pi)$ — значение \mathbf{w}_π на равновесной траектории; θ — обобщенный азимут частицы, играющий в дальнейшем роль времени; ω_s — равновесная частота обращения ($d\theta_s/dt = \omega_s$).

Как показано в [1], на равновесной траектории решение (2.1) имеет вид ($\gamma_s = \text{const}$)

$$\xi(\theta) = \xi_n \mathbf{n}(\theta) + \text{Re } c \boldsymbol{\eta}(\theta), \quad \xi_n, c = \text{const},$$

где \mathbf{n} , $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\eta}^*$ — ортогональные решения (2.1) на равновесной траектории, обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\theta + 2\pi) &= \mathbf{n}(\theta), \quad \boldsymbol{\eta}(\theta + 2\pi) = e^{-2\pi i \nu} \boldsymbol{\eta}(\theta), \\ \mathbf{n}^2 &= 1, \quad \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^* = 2, \quad \nu = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина $2\pi\nu$ имеет смысл угла поворота спина вокруг \mathbf{n} за период движения частицы по равновесной орбите. В подвижной периодической системе ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$

$$\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e} = \boldsymbol{\eta} e^{i\nu\theta}, \quad (2.3)$$

уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d\xi}{d\theta} \equiv \boldsymbol{\zeta} = [\mathbf{W}\xi], \quad \mathbf{W} = \nu \mathbf{n} + \mathbf{w} \equiv \nu \mathbf{n} + \frac{\mathbf{w}_\pi}{\dot{\theta}} - \frac{\mathbf{w}_s}{\dot{\omega}_s} \quad (2.4)$$

В стационарных условиях движения частиц в накопителе можно представить \mathbf{w} в виде

$$\mathbf{w}\mathbf{n} = \sum_l \omega_l e^{i\nu_l \theta}, \quad \mathbf{w}\mathbf{e} = \sum_k \omega_k e^{i\nu_k \theta} \quad (2.5)$$

(индексами l и k будем обозначать величины, относящиеся соответственно к $\mathbf{w}\mathbf{n}$ и $\mathbf{w}\mathbf{e}$). Частоты ν_l, ν_k являются комбинациями из частот движения частиц. Учет возмущения \mathbf{w} в виду его малости может существенно изменить движение спина лишь вблизи спиновых резонансов, когда ν близка к какому-либо ν_c — комбинации из частот ν_l, ν_k .

Для изучения поведения спина вблизи резонанса применяется метод усреднения. В работах [2-7] рассматривались лишь резонансы первого приближения $\nu \approx \nu_k$ для случая $\mathbf{n}(\theta) = \text{const}$ (плоская равновесная орбита). Результаты этих работ легко распространить и на общий случай $\mathbf{n}(\theta) \neq \text{const}$.

Движение спина вблизи резонанса $\nu \approx \nu_k$ происходит следующим образом. В системе, вращающейся относительно (2.3) с частотой $\nu_k \mathbf{n}$, спин медленно с частотой $[|\omega_k|^2 + (\nu - \nu_k)^2]^{1/2}$ прецессирует вокруг направления, составляющего с \mathbf{n} угол $\alpha = \arctg [|\omega_k| / (\nu - \nu_k)]$.

Комбинационные резонансы $\nu \approx \nu_c$ возникают в высших приближениях. Уравнение, описывающее усредненное движение спина вблизи резонанса произвольного порядка, наиболее просто получается в «резонансной» системе, вращающейся с частотой ν_c вокруг \mathbf{n} . В этой системе спин движется в «поле» $\mathbf{w}' = (w_x', w_y', w_z')$,

$$w_x' + iw_y' = w e \exp\{-i\nu_c \theta\}, \quad w_z' = w \mathbf{n} + \nu - \nu_c. \quad (2.6)$$

Для малых времен $T \ll |\mathbf{w}'|^{-1}$ решение для ξ в момент времени T можно найти в виде ряда

$$\xi_T = (1 + \lambda) \xi_0, \quad \lambda = \int_0^T (w' + w' \tilde{w}' + \dots) d\theta, \quad (2.7)$$

где ξ — столбец из компонент вектора ξ ; w' — матрица

$$w_{ik}' = \sum_{\alpha} \varepsilon_{i\alpha k} w_{\alpha}', \quad \tilde{w}' = \int_0^{\theta} w' d\theta.$$

Метод усреднения в нашем случае означает нахождение такого постоянного эффективного «поля» h , чтобы решение $\xi_T = e^{hT} \xi_0$ усредненного уравнения $\dot{\xi} = h \xi$ через время T совпадало с (2.7):

$$e^{hT} = 1 + \lambda, \quad h = \frac{1}{T} \ln(1 + \lambda) = \frac{1}{T} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \dots \right). \quad (2.8)$$

Выбрав T с учетом соотношений $\theta_{\text{хар}} \ll T \ll 1/|\mathbf{w}'|$, где $\theta_{\text{хар}}$ — характерное время изменения w' , получим

$$\mathbf{h} = \langle \mathbf{w}' - 1/2 [\tilde{w}' \mathbf{w}'] + \dots \rangle, \quad (2.9)$$

угловые скобки означают усреднение по времени θ . При учете n порядков решение (2.9) будет, очевидно, мало отличаться от точного при

$$\theta \lesssim \frac{1}{|\mathbf{w}'|} |\mathbf{w}' \theta_{\text{хар}}|^{1-n}.$$

Собственно резонанс имеет место, когда направление $\mathbf{h}(\nu)$ существенно отличается от \mathbf{n} . При точном резонансе $h_z(\nu_r) = 0$ разность $\nu_r - \nu_c$ есть поправка к положению точного резонанса, обязанная возмущению w' . Эффективная ширина резонанса определяется величиной $h(\nu_r) = |\hbar_x(\nu_r) + i\hbar_y(\nu_r)| \equiv h_{\perp}$, которая для резонанса n -го порядка пропорциональна n -й степени возмущения.

Как видно, во втором приближении возможны лишь резонансы $\nu \approx \nu_c \approx \nu_i + \nu_k$, возникающие вследствие корреляции между колебаниями частоты прецессии и поперечным возмущением. При постоянном $w \mathbf{n}$ ($\nu_i = 0$) второе приближение не дает нового резонанса, а является поправкой к первому.

Укажем простое правило отбора комбинаций частот для резонанса произвольного порядка. В резонансной системе общее условие резонанса n -го порядка можно записать в виде ¹⁾

$$\nu_{i_1} + \dots + \nu_{i_{n_{\parallel}}} + s_1(\nu_{k_1} - \nu) + \dots + s_{n_{\perp}}(\nu_{k_{n_{\perp}}} - \nu) \approx 0,$$

$$s_i = \pm 1, \quad n_{\parallel} + n_{\perp} = n.$$

¹⁾ Среди ν_i и ν_k могут быть одинаковые частоты.

(Выбор знака перед v_l можно включить в индекс « l », так как частоты v_l образуют спектр действительной величины \mathbf{w}_\perp .) Так как для спиновой системы возможны только линейные резонансы $v \approx v_c$ [1], то должно быть

$$s_1 + \dots + s_{n_\perp} = 1. \quad (2.10)$$

Отсюда, в частности, следует нечетность n_\perp . Таким образом, в n -м порядке возможны резонансы

$$v \approx v_{i_1} + \dots + v_{i_{n_\parallel}} + s_1 v_{k_1} + \dots + s_{n_\perp} v_{k_{n_\perp}} \quad (2.11)$$

с соблюдением условия (2.10). Мощность резонанса пропорциональна произведению $\omega_{i_1} \dots \omega_{i_{n_\parallel}} \omega_{k_1} \dots \omega_{k_{n_\perp}}$. Резонансы n -го порядка сводятся к поправке низших резонансов, когда из полной комбинации (2.11) выделяется малая по величине часть, причем числа частот v_k , входящих в эту подкомбинацию с положительными ($s_i > 0$) и с отрицательными знаками ($s_i < 0$), должны совпадать. Например, в третьем порядке возможны резонансы

$$v \approx v_l + v_{l'} + v_k, \quad v \approx v_k + v_{k'} - v_{k''}.$$

Они сводятся к поправкам резонансов первого или второго порядков, если $v_l + v_{l'} \approx 0$, $v_{k'} \approx v_{k''}$ либо $v_l \approx 0$.

Описанный метод усреднения применим непосредственно для уединенного резонанса, т. е. когда условие

$$|v - v_c| \lesssim |w| \quad (2.12)$$

выполнено только для одной комбинации v_c . Если условию (2.12) удовлетворяет несколько комбинаций v_c , то после усреднения по быстрым частотам эффективное поле \mathbf{h} будет функцией времени, частоты изменения которой сравнимы с величиной $|\mathbf{h}|$:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \Delta(\theta), \quad \Delta(\theta) = \sum_{m \neq 0} \Delta_m e^{i\Omega_m \theta} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{h}_0 = (h_\perp, 0, \varepsilon), \quad |\Omega_m| \lesssim h,$$

где h_\perp , ε — ширина и расстройка выбранного (основного) резонанса, Δ_m характеризуют мощность остальных резонансов.

Такая ситуация означает, вообще говоря, наличие в спектре возмущения малых частот (синхротронные колебания энергии, внешняя модуляция и т. п.).

Рассмотрим случай перекрывающихся резонансов существенно разной мощности. Пусть $|\Delta_m| \ll |\Omega_m|$. Для решения такой задачи опять оказывается возможным воспользоваться методом усреднения. При $\Delta = 0$ имеет место уединенный (основной) резонанс, спин прецессирует вокруг \mathbf{h}_0 . Учет Δ приводит к существенному искажению движения лишь вблизи «модуляционных» резонансов. В первом приближении возможны резонансы $\Omega_m \approx \approx h_0$. Их ширина $\omega_m \approx h_0^{-1} |\Delta_m \mathbf{h}_0|$.

Рассмотренный подход дает результаты, существенно отличающиеся от теории уединенного резонанса лишь при $|\varepsilon| \lesssim h_\perp$. В противном случае ($|\varepsilon| \gg h_\perp$) боковые резонансы фактически отделены от основного и могут рассматриваться как уединенные.

В случае $\Delta \gg |\Omega_m|$, когда перекрывается много резонансов одинаковой (по порядку величины) мощности, метод усреднения неприменим. При этом более полезным оказывается подход к задаче не как к наложению отдельных резонансов, а как к повторяющимся прохождением «основного» резонанса.

3. Однократное прохождение резонанса

Однократное прохождение впервые рассматривалось в [2] для постоянной скорости прохождения ($\dot{h}_z, h_{\perp} = \text{const}$) и специальном начальном условии поляризации по полю. При произвольном начальном условии известен результат только для быстрого прохождения ($|\dot{h}_z| \gg h_{\perp}^2$) [2, 5-7].

Полный ответ в задаче об однократном прохождении представляет не только самостоятельный интерес, но и необходим для построения решения в случае периодического прохождения. Оказывается возможным решить такую задачу в несколько более широкой постановке.

Пусть спин в резонансной системе движется в «поле»

$$\mathbf{h} = (h_{\perp}, 0, h_z). \quad (3.1)$$

(Вращение \mathbf{h}_{\perp} всегда можно исключить переходом в систему, вращающуюся относительно резонансной вместе с \mathbf{h}_{\perp} .)

Заданы начальные условия для спина при $h_z \rightarrow -\infty$. Требуется найти решение ξ после прохождения резонанса при $h_z \rightarrow \infty$. В области адиабатического изменения $\mathbf{h}(\theta)$ движение спина представляет собой прецессию вокруг \mathbf{h} с частотой h . Для выполнения адиабатичности необходима малость изменения угловой скорости вращения спина \mathbf{h} за время оборота вокруг поля $2\pi/h$:

$$h^2 \gg |\dot{\mathbf{h}}| = \sqrt{\dot{h}_z^2 + \dot{h}_{\perp}^2}. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) обеспечивает экспоненциальную точность решения в адиабатической зоне при монотонном изменении \mathbf{h} . Если \mathbf{h} при прохождении испытывает колебания, то необходимо дополнительное условие малости частоты колебаний Ω :

$$\Omega \ll h. \quad (3.2')$$

Заметим, что если (3.2) выполнено для всех значений h_z ($h_{\perp}^2 \gg |\dot{h}_z|$), то адиабатическое решение справедливо всюду с экспоненциальной точностью по параметру адиабатичности. При этом экспоненциально малое отличие от точного набирается в области, где (3.2) выполнено наименее сильно, т. е. в области $|h_z| \leq h_{\perp}$. Поэтому под границей эффективной резонансной области (зоны) мы будем понимать

$$h_z^{\text{эфф}} \sim \max(h_{\perp}, \sqrt{\dot{h}_z^2 + \dot{h}_{\perp}^2}). \quad (3.3)$$

Наша цель состоит в сшивке адиабатических решений справа и слева от эффективной зоны (3.3). Данная задача может быть полностью решена для произвольной скорости прохождения \dot{h}_z при условии малости относительного изменения \dot{h}_z и h_{\perp} в эффективной зоне:

$$|\delta\dot{h}_z/h_z| \ll 1, \quad |\delta h_{\perp}/h_{\perp}| \ll 1. \quad (3.4)$$

Для этого удобнее использовать уравнение для переменной χ ²⁾

$$i\dot{\chi} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{h}\chi, \quad \xi = \chi^+\sigma\chi, \quad (3.5)$$

где σ — матрицы Паули.

²⁾ Для спина $s = 1/2$ переменная χ есть спиновая волновая функция. В случае произвольного спина уравнение (3.5) можно интерпретировать как уравнение для волновых функций χ_a ($a = 1, 2, \dots, 2s$) $2s$ независимых частиц со спином $1/2$, из которых можно формально составить частицу со спином s [10].

Адиабатическое решение уравнения (3.5) в системе, где ось 3 направлена по полю \mathbf{h} , имеет вид

$$\chi = S_{\theta_0} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad S_{\theta_0} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sigma_z \int_0^{\theta_0} h d\theta \right\}. \quad (3.6)$$

Для нахождения связи A, B при $\theta < 0$ и $\theta > 0$ воспользуемся методом сшивки решений путем выхода в комплексную плоскость времени θ . Особые точки, определяемые из уравнения

$$h = (h_z^2 + h_{\perp}^2)^{1/2} = 0,$$

в нашем случае лежат в комплексной плоскости θ , и данная задача математически эквивалентна задаче о надбарьерном отражении в квантовой механике. Если \dot{h}_z, h_{\perp} постоянны, то имеются только две особые точки — точки «поворота» $\theta_{\pi} = \pm i h_{\perp} / \dot{h}_z$. Отклонения \dot{h}_z и h_{\perp} от постоянных приводят к смещению этих точек и появлению новых, которыми при условии (3.4) можно пренебречь. Следуя работам [11–13], обойдем эффективную зону по окружности большого радиуса, на которой решение имеет вид (3.6). Получаем искомую связь A, B ³⁾:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta > 0} = R \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\theta < 0}$$

$$R(\dot{h}_z > 0) = [1 - e^{-2\delta}]^{1/2} e^{-i\sigma_z \varphi} + i e^{-\delta} \sigma_y = R^T(\dot{h}_z < 0), \quad (3.7)$$

$$2\delta = \left| \int_{\theta_{\pi}}^{\theta_0} h d\theta \right|, \quad (3.8)$$

φ — постоянная фаза, которая в [11–13] остается неопределенной. Момент $\theta = 0$ выбран так, чтобы

$$\operatorname{Re} \theta_{\pi} = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.6), (3.7) можно получить связь $\chi_{\theta_2} = S_{\theta_2} R S_{\theta_0} \chi_{\theta_1} \equiv U \chi_{\theta_1}$. Фазу φ можно найти из сравнения с точным решением при постоянных \dot{h}_z и h_{\perp} , которое построено в Приложении. В этом случае

$$\delta = 1/4 \pi h_{\perp}^2 / |\dot{h}_z| \equiv 1/4 \pi a^2 \quad (3.10)$$

в согласии с (3.8), а

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4} \ln \frac{a^2}{4e} - \arg \Gamma \left(i \frac{a^2}{4} \right) \quad (3.11)$$

где Γ — гамма-функция. График зависимости $\varphi(a^2/4)$ приведен на рисунке [14]. При малом отклонении \dot{h}_z и h_{\perp} от постоянных в эффективной зоне отличим φ от (3.11) всегда можно пренебречь. (Заметим, что для медленного прохождения ($a^2 \gg 1$) абсолютное изменение δ и сдвиг $\theta = 0$ при этом могут быть немалыми.) Таким образом, при условии (3.4) матрица R дается выражением (3.7) с φ из (3.11).

Из (3.5), (3.10) можно получить связь проекций $\zeta_h = \zeta \mathbf{h} / h$ и фаз вращения ψ вокруг \mathbf{h} . Приведем выражение для ζ_h :

$$\zeta_h(\theta_2) = (1 - e^{-2\delta}) \zeta_h(\theta_1) - 2e^{-\delta} (1 - e^{-2\delta})^{1/2} (1 - \zeta_h^2(\theta_1))^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \cos \left(\varphi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} h d\theta + \psi(\theta_1) \right). \quad (3.12)$$

³⁾ В работах [11–13] разрез в комплексной плоскости θ проведен между точками поворота. В нашем определении h положительно всюду на действительной оси.

При медленном прохождении ($|\dot{h}_z| \ll h_{\perp}^2$) спин сохраняет свою проекцию на \mathbf{h} с экспоненциальной точностью, переворачиваясь вместе с \mathbf{h} . В быстром случае ($|\dot{h}_z| \gg h_{\perp}^2$) изменение проекции на \mathbf{n} мало ($\sim \sqrt{\delta}$). Формула (3.12) обобщает результат [2].

Медленное прохождение резонанса можно, например, использовать в накопителе для получения пучков электронов и позитронов с одинаковым направлением поляризации (под действием синхротронного излучения пучки должны поляризоваться в противоположных направлениях [15, 16]). Включением радиального электрического поля E_r можно развести пучки по энергиям (при совпадающих орбитах). После этого, медленно проведя через спиновый резонанс один из пучков ($v_{\text{поз}} \neq v_{\text{эл}}$), можно изменить его поляризацию на противоположную⁴⁾.

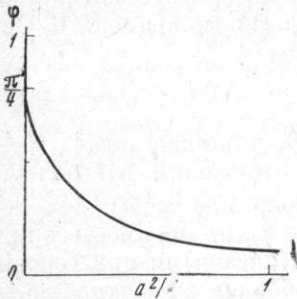


График функции $\varphi(a^2/4)$. При быстром прохождении резонанса ($a^2/4 \ll 1$)

$$\varphi \approx \frac{\pi}{4} - \frac{a^2}{4} \left(\ln \frac{4e}{a^2} - 0,577 \right) + \dots$$

При медленном прохождении ($a^2/4 > 1$)

$$\varphi \approx \frac{\pi}{3a^2} + \frac{\pi}{45a^6} + \dots$$

ку резонанса $\gamma_s = \gamma_r$ выберем значение энергии, при котором ν наиболее близка к целому числу k :

$$\nu(\gamma_r) - k = \Delta v_{\min} \quad (4.1)$$

(в частности, Δv_{\min} может быть равна нулю). Запишем уравнения движения спина в периодической системе $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}(\gamma_r, \theta)$, $\mathbf{e}_r \equiv \mathbf{e}(\gamma_r, \theta)$:

$$\dot{\zeta} = [w' \zeta], \quad w' = \left(\Delta v_{\min} + \mathbf{n}_r \frac{\mathbf{w}_s}{\omega_s} \right) \mathbf{n}_r + \text{Re} \left(\delta \frac{\mathbf{w}_s}{\omega_s} \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r,$$

$$\delta \frac{\mathbf{w}_s}{\omega_s} = \frac{\mathbf{w}_s(\gamma_s, \theta)}{\omega_s(\gamma_s)} - \frac{\mathbf{w}_s(\gamma_r, \theta)}{\omega_s(\gamma_r)} \quad (4.2)$$

(отклонения от равновесной орбиты несущественны). После усреднения по θ получаем

$$\langle w' \rangle = \Delta v_{\min} \mathbf{n}_r + \text{Re} \left\langle \mathbf{e}_r^* \delta \frac{\mathbf{w}_s}{\omega_s} \right\rangle \mathbf{e}_r \quad (4.3)$$

$\langle \langle \mathbf{n}_r, \delta(\mathbf{w}_s / \omega_s) \rangle \rangle = 0$ по определению точки резонанса γ_r : $(\partial \nu / \partial \gamma)_r = 0$. Формула (4.3) дает связь $\mathbf{n}(\gamma_s, \theta)$ и $\nu(\gamma_s)$ с \mathbf{n}_r и Δv_{\min} :

$$(\nu(\gamma_s) - k) \mathbf{n}(\gamma_s, \theta) = \langle w' \rangle. \quad (4.4)$$

Ширина резонанса определяется величиной Δv_{\min} .

⁴⁾ Отметим, что этот способ неосуществим вблизи точек $\gamma_{\text{кр}}$, в которых $(\partial \nu / \partial \gamma)_{\text{эл}} = (\partial \nu / \partial \gamma)_{\text{поз}}$. Для плоской равновесной орбиты $\gamma_{\text{кр}} = (q/q')^{1/2}$. (При этом ν не зависит от E_r .)

В соответствии с обычным поведением оси прецессии в области спинового резонанса направление \mathbf{n} за шириной резонанса поперечно к \mathbf{n}_r .

Все полученные в данной работе результаты применимы и к резонансу $\nu \approx k$ с заменой

$$h_{\perp} \rightarrow \Delta v_{min}; \quad h_z \rightarrow (\gamma - \gamma_r) \frac{d}{d\gamma} \left| \left\langle \frac{\mathbf{w}_s(\gamma, \theta) \mathbf{e}_r}{\omega_s(\gamma)} \right\rangle \right|_r.$$

5. Периодические прохождения

С общей точки зрения задача о периодическом прохождении резонанса является задачей о движении спина в периодическом поле

$$\mathbf{h}(\theta) = \mathbf{h}(\theta + T) = (h_{\perp}, 0, h_z), \quad (5.1)$$

$2\pi/T$ — частота проходов.

Из результатов [1] вытекает общий характер движения спина при периодическом прохождении. Существует некоторое периодическое решение $\mathbf{m}(\theta)$ для спина, повторяющееся через T . Все остальные решения поворачиваются за период вокруг \mathbf{m} на один и тот же угол $2\pi\mu$. Таким образом, наша задача сводится к отысканию периодического решения \mathbf{m} и частоты прецессии μ . Пусть известна матрица Λ : $\chi_T = \Lambda\chi_0$; по смыслу \mathbf{m} и μ матрица Λ имеет вид ($\Lambda^+ \Lambda = 1$)

$$\Lambda = e^{-i\pi\mu\sigma\mathbf{m}}, \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{m}(0),$$

откуда

$$\cos \pi\mu = \frac{1}{2} \text{Sp } \Lambda, \quad \mathbf{m} = \frac{i}{2 \sin \pi\mu} \text{Sp } \sigma \Lambda. \quad (5.2)$$

Рассмотрим случай, когда в эффективной зоне выполняется условие (3.4). (Предполагается при этом, что амплитуда колебаний h_z достаточно велика.) Тогда матрицу Λ можно построить, используя результаты раздела 3:

$$\Lambda = S_{T\theta_2} R_2 S_{\theta_2\theta_1} R_1 S_{\theta_1 0}. \quad (5.3)$$

Здесь θ_2 и θ_1 — моменты прохождения резонанса, удовлетворяющие условию (3.9). Вводя обозначения

$$x = \varphi_1 + \varphi_2 + \frac{\kappa}{2}, \quad \kappa = \kappa_+ + \kappa_- = \int_0^T h d\theta,$$

$$y = \frac{\kappa_+ - \kappa_-}{2}, \quad \kappa_{\pm} = \int_0^{\theta_1} h d\theta + \int_{\theta_2}^T h d\theta \equiv \kappa_{\pm}^{(1)} + \kappa_{\pm}^{(2)}, \quad (5.4)$$

$$\varphi_{1,2} = \varphi(a_{1,2}^2/4),$$

из (5.3) получаем матричные элементы

$$\Lambda_{11} = \sqrt{(1 - e^{-2\delta_1})(1 - e^{-2\delta_2})} e^{-ix} + e^{-\delta_1 - \delta_2 + iy},$$

$$\Lambda_{12} = \sqrt{1 - e^{-2\delta_1}} \exp\{-\delta_2 + i(x+y)/2\} - \sqrt{1 - e^{-2\delta_2}} \exp\{-\delta_1 - i(x+y)/2\} \exp\{i(\varphi_1 + \kappa_-^{(1)} - \varphi_2 - \kappa_-^{(2)})/2\}. \quad (5.5)$$

Таким образом,

$$\cos \pi\mu = \sqrt{(1 - e^{-2\delta_1})(1 - e^{-2\delta_2})} \cos x + \exp\{-\delta_1 - \delta_2\} \cos y, \quad (5.6)$$

$$m_h = \frac{\text{Im } \Lambda_{11}^*}{\sin \pi\mu}, \quad m_1 + im_2 = -i \frac{\Lambda_{12}^*}{\sin \pi\mu}. \quad (5.7)$$

Полученные формулы дают всю необходимую информацию о поведении спина. Вектор \mathbf{m} задает направление периодического решения в моменты $0, T, \dots$ (Момент $\theta = 0$ выбран в адиабатической зоне, где спиновое движение известно.) Формула (5.6) определяет угол 2π , на который спин поворачивается вокруг \mathbf{m} через период T .

Практически интересно проследить, как при периодическом прохождении изменяется проекция на \mathbf{n} в зоне адиабатичности. Очевидно, ее изменение существенно зависит от ориентации \mathbf{m} относительно \mathbf{h} . Например, при начальном условии $\zeta_n = 1$ проекция ζ_n меняется в интервале $1 \div (2m_h^2 - 1)$.

Посмотрим, как зависит ориентация \mathbf{m} от параметров задачи.

а) Быстрое прохождение ($\delta_1 \ll 1, \delta_2 \ll 1$). При этом, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} \sin \mu &\approx (\sin^2 y + 2(\delta_1 + \delta_2) - 4\sqrt{\delta_1 \delta_2} \cos x \cos y)^{1/2}, \\ m_h &\approx \sin y / \sin \mu. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Как видно, почти всегда $m_h = 1$, за исключением узких полос по y :

$$|y - k\pi| \lesssim (\delta_1 + \delta_2 - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2} (-1)^k \cos x)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) определяет «резонансную» область, в которой периодическое решение сильно зависит от параметров. Поляризация ζ_n может существенно измениться лишь в этой области. При этом спин медленно поворачивается вокруг \mathbf{m} с частотой $\sim \sqrt{\delta}$. Например, для симметричного прохождения $\kappa_+ = \kappa_-; \delta_1 = \delta_2 = \delta$:

$$\mu = \frac{2\sqrt{2\delta}}{\pi} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{h_{\perp}}{(|\hbar_z|)^{1/2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x h d\theta \right).$$

Уже малое нарушение симметричности прохождения ($1 \gg |\kappa_+ - \kappa_-| \gg \sqrt{\delta}$) отодвигает резонанс (5.9), и тогда проекция ζ_n сохраняется.

б) Медленное прохождение ($e^{\delta_1} \gg 1, e^{\delta_2} \gg 1$). В этом случае

$$\begin{aligned} \sin \mu &\approx (\sin^2 x + e^{-2\delta_1} + e^{-2\delta_2} - 2e^{-\delta_1 - \delta_2} \cos x \cos y)^{1/2}, \\ m_h &= \sin x / \sin \mu. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Так же, как и в предыдущем случае, почти всегда $m_h = 1$, за исключением резонансной области:

$$|x - k\pi| \lesssim (e^{-2\delta_1} + e^{-2\delta_2} - 2e^{-\delta_1 - \delta_2} (-1)^k \cos y)^{1/2}. \quad (5.11)$$

в) Смешанный случай ($\delta_1 \ll 1, e^{\delta_2} \gg 1$). При этом

$$\begin{aligned} \mu &\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2\delta_1}}{\pi} \cos x - \frac{1}{\pi} e^{-\delta_2} \cos y, \\ m_h &\approx \sqrt{2\delta_1} \sin x - e^{-\delta_2} \sin y, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$m_1 + im_2 = i \exp \left\{ \frac{i}{2} (\kappa_+ + \kappa_-^{(2)} - \kappa_-^{(1)}) \right\}.$$

Смысл этого решения легко понять следующим образом. При быстром движении «снизу вверх» ζ_n не успевает измениться. Затем при медленном прохождении «сверху вниз» ζ_n меняет знак. Следовательно, спин совершает поворот ($\mu \approx 1/2$) вокруг некоторого направления, поперечного к оси \mathbf{n} .

В отличие от предыдущих случаев малость m_h не означает резонанса ($\mu \neq k$).

г) Промежуточный случай ($\delta_1 \sim 1$, $\delta_2 \sim 1$). В отличие от рассмотренных случаев направление \mathbf{m} здесь существенно зависит от (x, y) во всем интервале их изменения. При этом m_h пробегает все возможные значения

$$0 \leq |m_h| \leq ((1 - e^{-2\delta_1})(1 - e^{-2\delta_2}))^{1/2} + e^{-\delta_1 - \delta_2}. \quad (5.13)$$

Наибольшая чувствительность к положению точки (x, y) наблюдается вблизи резонансов $\mu = k$, когда

$$\delta_1 \approx \delta_2 = \delta, \quad \cos x \approx \cos y \approx \pm 1.$$

Приближенные формулы вблизи резонанса имеют вид

$$\sin \pi \mu \approx \left[\frac{(\delta_1 - \delta_2)^2}{e^{2\delta} - 1} + (1 - e^{-2\delta})(\Delta x)^2 + e^{-2\delta}(\Delta y)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.14)$$

$$m_h \approx \frac{1}{\sin \pi \mu} [e^{-2\delta} \Delta y - (1 - e^{-2\delta}) \Delta x].$$

Здесь Δx , Δy — отклонения от резонансной точки $\cos x = \cos y = \pm 1$.

6. Быстрые прохождения с произвольной периодической зависимостью $h(\theta)$

Формулы (5.6), (5.7) периодического решения справедливы при условии (3.4). В важном случае быстрых прохождений можно решить задачу без ограничений на вид периодической зависимости. При быстром прохождении спин в эффективной зоне не успевает существенно измениться, и поэтому решение в этой зоне может быть найдено по теории возмущений.

При однократном прохождении связь χ справа и слева от резонанса в системе, вращающейся относительно резонансной со скоростью $h_n \mathbf{n}$, в первом приближении имеет вид

$$\chi_{\theta_2} = \left(1 - \frac{i}{2} \sigma \mathbf{H}_0 \right) \chi_{\theta_1}, \quad H_x^0 + iH_y^0 = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\perp} \exp \left\{ -i \int_{\theta_0}^{\theta} h_z d\theta \right\} d\theta, \quad (6.1)$$

$$h_z(\theta_0) = 0, \quad \theta_2 > \theta_0 > \theta_1, \quad H_n^0 = 0.$$

Возвращаясь в исходную систему и сшивая с решениями в адиабатических зонах, получаем матрицу Λ' (в резонансной системе)

$$\chi_T = \Lambda' \chi_0, \quad \Lambda' = \exp \{ -1/2 i \sigma_z \kappa_T \} (1 - 1/2 i \sigma \mathbf{H}),$$

$$H_x + iH_y = \int_0^T h_{\perp} e^{-i\kappa_0} d\theta, \quad H_n \approx 0,$$

$$\kappa_0 = \int_0^{\theta} \varepsilon^{\sigma \Phi} d\theta, \quad \varepsilon^{\sigma \Phi} = \begin{cases} h_z & \text{в эффективной зоне} \\ h h_z / |h_z| & \text{в адиабатической зоне.} \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sin \pi \mu &= (\sin^{21} \kappa_T + 1/4 H^2)^{1/2}, \\ m_n &\sim \frac{\sin 1/2 \kappa_T}{\sin \pi \mu}, \quad m_x + i m_y = \frac{H_x + i H_y}{2 \sin \pi \mu} \exp \left\{ i \frac{\kappa_T}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

При наличии зон адиабатичности и условия (3.4) решение (6.2) переходит в (5.8). Периодическое решение, как и ранее, направлено всегда по

оси n , за исключением резонансной области (ср. (5.9)):

$$|\frac{1}{2}\kappa_T - k\pi| \lesssim H. \quad (6.3)$$

Заметим, что решение (6.2) в отличие от (5.8) применимо и в том случае, когда адиабатическая зона не достигается ($\kappa_T = \langle h_z \rangle T \ll 1$).

При этом, как видно из (6.2), спин движется в среднем поле:

$$\langle \mathbf{h} \rangle = (\langle h_{\perp} \rangle, 0, \langle h_z \rangle).$$

Условие $\kappa_T \ll 1$ тем самым указывает границу применимости метода усреднения при рассмотрении многократных быстрых прохождений.

7. Заключение

Остановимся кратко на применении полученных результатов к задаче о поведении средней по пучку поляризации при периодических прохождениях. Разброс по входящим в задачу параметрам приводит к разбросу m и μ . Разброс по μ обеспечивает размешивание фаз прецессии вокруг m . Поэтому средняя поляризация после многократного прохождения будет равна (в отсутствие перемешивания траекторий частиц)

$$\bar{\xi} = \overline{(\xi m)}_{t=0} m.$$

Для устранения начальной поляризации по n при многократном периодическом прохождении требуются весьма специальные условия. Так, при быстрых либо медленных прохождениях изменение ξ_n происходит лишь в узких резонансных полосах (5.9), (6.3), (5.11). Обращает на себя внимание смешанный случай быстромедленного прохождения, когда для деполаризации пучка практически не требуется никаких дополнительных условий.

Авторы благодарят В. Н. Байера, С. Т. Беляева, Н. С. Диканского, Ю. М. Шатунова за обсуждения и интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения (3.5) при постоянных \dot{h}_z , h_{\perp} решаются точно. Эти уравнения в резонансной системе

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \dot{\chi}_+ &= -\frac{1}{2} i \dot{h}_z \theta \chi_+ - \frac{1}{2} i \dot{h}_{\perp} \chi_- \\ \dot{\chi}_- &= \frac{1}{2} i \dot{h}_z \theta \chi_- - \frac{1}{2} i \dot{h}_{\perp} \chi_+ \end{aligned}$$

представляют собой функциональные соотношения для функций параболического цилиндра $D_p(z)$ [17].

Решение имеет вид ($\dot{h}_z > 0$)

$$\chi(\theta) = \begin{pmatrix} D_p(z), & D_p(-z) \\ \frac{1}{2} a e^{i\pi/4} D_{p-1}(z), & -\frac{1}{2} a e^{i\pi/4} D_{p-1}(-z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \equiv M(\theta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (П.1)$$

где

$$a = h_{\perp} / \dot{h}_z^{1/2}, \quad p = -ia^2 / 4, \quad z = e^{i\pi/4} \dot{h}_z^{1/2} \theta,$$

α , β — постоянные, определяемые начальными условиями. Для нахождения U (см. (3.10)) необходимо матрицу $M(\theta_2)M^{-1}(\theta_1)$ преобразовать в систему, связанную с направлением \mathbf{h} , что осуществляется поворотом вокруг оси y на угол $\alpha = \arctg(h_{\perp} / h_z)$:

$$U = \exp\{\frac{1}{2} i \sigma_y \alpha(\theta_2)\} M(\theta_2) M^{-1}(\theta_1) \exp\{-\frac{1}{2} i \sigma_y \alpha(\theta_1)\}. \quad (П.2)$$

Для нахождения постоянной фазы φ в (3.7) достаточно сравнить матричные элементы U_{11} (3.10) и (П.2) в пределе $|\theta_1|, |\theta_2| \rightarrow \infty$,

$$U_{11} = (1 - e^{-2\delta})^{1/2} \exp \left\{ -i \left(\varphi + \int_{\theta_1}^{\theta_2} h d\theta \right) \right\} \approx (M(\theta_2)M^{-1}(\theta_1))_{12}.$$

Подставляя $\delta = \pi a^2 / 4$, $h = (\dot{h}_z^2 \theta^2 + h_\perp^2)^{1/2}$ и используя предельные асимптотики для $D_F(z)$ [17], получаем для фазы φ выражение (3.11).

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13 августа 1970 г.

Литература

- [1] Я. С. Дербенёв, А. М. Кондратенко, А. Н. Скринский. Препринт ИЯФ СО АН СССР 2-70; ДАН СССР, 192, 1255, 1970.
- [2] M. Froissart, R. Stora. Nucl. Instrum. and Methods, 7, 297, 1960.
- [3] X. A. Симонян, Ю. Ф. Орлов. ЖЭТФ, 45, 173, 1963.
- [4] Ю. Ф. Орлов, С. А. Хейфец. Изв. АН АрмССР, 13, 169, 1960.
- [5] X. A. Симонян. Тр. IV Международной конференции по ускорителям, Дубна, 1963.
- [6] Ю. А. Плис, Л. М. Сороко. Тр. IV Международной конференции по ускорителям, Дубна, 1963.
- [7] П. Р. Зеркевич. Тр. IV Международной конференции по ускорителям, Дубна, 1963.
- [8] V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi. Phys. Rev. Lett., 2, 435, 1959.
- [9] V. N. Baier, V. M. Katkov, V. M. Strakhovenko. Phys. Lett, 31A, 4, 1970.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, ОГИЗ, 1948.
- [11] E. G. Stueckelberg. Helv. Phys. Acta, 5, 370, 1932.
- [12] Г. М. Заславский. Лекции по применению метода ВКБ в физике, НГУ, Новосибирск, 1965.
- [13] Д. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов, «Мир», 1965.
- [14] А. А. Абрамов. Таблицы $\ln \Gamma(z)$ в комплексной области. Изд. АН СССР, 1953.
- [15] А. А. Соколов, И. М. Тернов. ДАН СССР, 153, 1052, 1963.
- [16] В. Н. Байер, В. М. Катков. ЖЭТФ, 52, 1422, 1967.
- [17] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

DYNAMICS OF PARTICLE POLARIZATION NEAR SPIN RESONANCES

Ya. S. Derbenyov, A. M. Kondratyenko, A. N. Skrinisky

The motion of particle spins in storage rings (accelerators) is investigated. The methods and results of investigations [2-7] on spin resonances are extended to the case of an arbitrary closed orbit [1]. Besides first approximation resonances, those of higher order are considered for which selection rules of resonating harmonics are obtained. The major part of the work is dedicated to passage of resonances. The concept of an effective and adiabatic band is introduced. A complete solution of the single passage problem is presented which embraces the particular solutions [2, 5-7]. On this basis the problem of periodic passage of resonance is solved by employing the general nature of motion of a spin in a periodic field [1].