

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

С. Т. Беляев

Для системы взаимодействующих бозе-частиц в приближении малой плотности найдена одночастичная функция Грина, при помощи которой определяются энергетические уровни системы вблизи основного состояния (спектр квазичастиц).

1. Введение

В предыдущей статье [1] был развит метод функций Грина для бозе-системы многих частиц и получено выражение для одночастичной функции Грина через эффективные потенциалы парного взаимодействия между частицами Σ_{ik} и химический потенциал системы μ . Для определения Σ_{ik} и μ необходимы приближенные методы. В настоящей работе рассматривается «газовое» приближение, в котором малым параметром является плотность n (отношение объема, занятого частицами, ко всему объему). Взаимодействие между частицами предполагается центральным и короткодействующим, но не обязательно слабым. Первые два приближения выражаются через амплитуды рассеяния f двухчастичной задачи. Но уже в следующем приближении ($\sim (\sqrt{n}f^3)^2$) появляется необходимость учитывать трехчастичные амплитуды, что практически исключает возможность дальнейших приближений.

Из полученного выражения для функции Грина определяется энергетический спектр возбуждений (квазичастиц), а также энергия основного состояния и распределение в нем частиц по импульсам.

2. Оценка графиков, входящих в эффективные потенциалы

Определение величин Σ_{ik} и μ , а также правила построения фейнмановских графиков были сформулированы в работе [1] (ниже обозначаемой I).

Оценим различные графики, дающие вклад в Σ_{ik} и μ , пользуясь теорией возмущений. При этом для фурье-компоненты потенциала $U(\mathbf{p}) \equiv U_{\mathbf{p}}$ примем для простоты: $U_{\mathbf{p}} = U_0$ для $p < 1/a$ и $U_{\mathbf{p}} = 0$ для $p > 1/a$, где a по порядку величины есть радиус частицы¹.

Для определенности будем рассматривать Σ_{20} , графики для Σ_{02} , Σ_{11} и μ по существу аналогичны. В первом приближении теории возмущений, как было найдено в (I, 7), $\Sigma_{20}^{(1)} = n_0 U_{\mathbf{p}}$; $\mu = n_0 U_0$.

В оценку любого графика могут войти три параметра, фигурирующие в задаче: U_0 и a , характеризующие взаимодействие, и n_0 — плотность частиц конденсата. Из этих трех параметров можно образовать две безразмерные комбинации:

$$\xi = U_0/a; \quad \beta = \sqrt{n_0 a^3}. \quad (2.1)$$

Величина ξ есть обычный параметр теории возмущений (в обычных единицах $\xi \sim m U(r) a^2 / \hbar^2$), а β — «газовый» параметр.

¹ p, q, \dots будут употребляться как для обозначения длины 3-векторов, так и как символы 4-векторов. Это не может вызвать недоразумений, так как в последнем смысле p, q, \dots употребляются лишь как аргументы в $G(p), \Sigma(p)$ и т. д.

Единственный не равный нулю график второго приближения изображен на рис. 1, *a*. Для него находим

$$M_a \sim n_0 \int G^0(q + \mu) G^0(-q + \mu) U_0 U_{p+q} d^4 q$$

или, подставляя значение

$$G^0(p) = (p^0 - \varepsilon_p^0 + i\delta)^{-1}, \quad \varepsilon_p^0 = p^2/2, \quad \delta \rightarrow +0 \quad (2.2)$$

и интегрируя по q^0 , получим

$$M_a \sim n_0 U_0^2 \int_{qa < 1} dq \int \frac{dq^0}{(q^0 + \mu - \varepsilon_q^0 + i\delta)(-q^0 + \mu - \varepsilon_q^0 + i\delta)} \sim n_0 U_0^2 \int_{qa < 1} dq \frac{1}{\mu - \varepsilon_q^0 + i\delta}.$$

В последнем интеграле играют роль большие $q \sim 1/a$, при которых $\mu / \varepsilon^0 \sim n_0 U_0 a^2 = \xi \beta^2 \ll 1$, так что

$$M_a \sim n_0 U_0^2 / a = \Sigma_{20}^{(1)} \xi. \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь график третьего порядка 1, *b*. Для него получаем

$$M_b \sim n_0^2 \int G^0(q + \mu) [G^0(-q + \mu)]^2 U_0 U_q U_{p+q} d^4 q \sim \sim n_0^2 U_0^3 \int dq / (\mu - \varepsilon_q^0 + i\delta)^2.$$

Последний интеграл, в отличие от предыдущего случая, сходится на верхнем пределе и в нем главную роль играет область $q \sim \sqrt{\mu} = \sqrt{n_0 U_0}$, так что

$$M_b \sim n_0^2 U_0^3 / \sqrt{\mu} = \Sigma_{20}^{(1)} \xi^{3/2} \beta. \quad (2.4)$$

Из (2.3) и (2.4) видно, что $M_b / M_a \sim \xi^{1/2} \beta$. Это явилось следствием того факта, что M_a содержит интеграл от произведения двух G^0 , формально расходящийся на верхнем пределе, тогда как в M_b интегрируются три G^0 и интеграл сходится без обрезания. На графиках это отличие состоит в числе сплошных линий в замкнутой петле (образованной сплошными и пунктирными линиями). Полученный результат справедлив и в том случае, когда петли являются частью более сложного графика.

Таким образом, каждая петля с числом сплошных линий больше двух вносит малый параметр β , петли же с двумя сплошными линиями не содержат β . В низшем приближении надо учесть поэтому графики с петлями только второго рода. Все такие графики принадлежат к «лестничному» типу (рис. 2). Назовем совокупность таких графиков — $i\Gamma(12; 34)$. Первое приближение по β отличается, таким образом, от первого приближения теории возмущений заменой потенциала U (одна «перекладина» «лестницы») на Γ (совокупность всевозможных лестниц). Аналогичный результат мы получим и для высших приближений: суммирование всех графиков, отличающихся только числом «лестничных» петель, приводит к замене U на Γ . Изображая Γ прямоугольником, можно все графики строить сразу из прямоугольников и сплошных линий. Потенциал U , таким образом, исключается из задачи. Роль эффективного потенциала играет Γ .

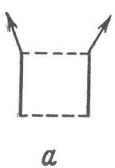


Рис. 1

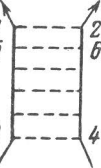
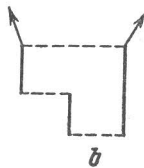


Рис. 2

3. Уравнение для эффективного потенциала Γ^2

Для совокупности членов, представленных графиками «лестничного» типа (рис. 2), можно, очевидно, написать интегральное уравнение

$$\Gamma(12;34) = U(1-2)\delta(1-3)\delta(2-4) + \\ + i \int U(1-2)G^0(1-5)G^0(2-6)\Gamma(56;34)d^4x_5d^4x_6. \quad (3.1)$$

(Обозначения те же, что и в I). Перейдем в (3.1) к импульсному представлению. (Чтобы не усложнять формулы множителями 2π везде в дальнейшем полагаем

$$d^4p = (2\pi)^{-4}dp^1dp^2dp^3dp^0; \delta(p) = (2\pi)^4\delta(p^1)\delta(p^2)\delta(p^3)\delta(p^0),$$

а для dp и $\delta(p)$ аналогичные выражения с множителем $(2\pi)^3$). Полагая

$$\Gamma(p_1p_2; p_3p_4)\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \int \exp\{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip_3x_3 + \\ + ip_4x_4\}\Gamma(12;34)d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4, \quad (3.2)$$

а затем вводя относительные и суммарные импульсы

$$p_1 + p_2 = P'; p_3 + p_4 = P; p_1 - p_2 = 2p', p_3 - p_4 = 2p, \quad (3.3)$$

получим для $\Gamma(p'; p; P) \equiv \Gamma(p_1p_2; p_3p_4)$ из (3.1)

$$\Gamma(p'; p; P) = U(p' - p) + i \int d^4q U(p' - q)G^0(P/2 + q) \times \\ \times G^0(P/2 - q)\Gamma(q; p; P). \quad (3.4)$$

Так как взаимодействие U незапаздывающее, то $U(1-2) = U(x_1 - x_2) \times \delta(t_1 - t_2)$ и, следовательно, в $\Gamma(12;34)$ точки 1,2 и 3,4 одновременны. В импульсном представлении этот факт означает, что $\Gamma(p_1p_2; p_3p_4)$ зависит только от одной комбинации четвертых компонент $p_1^0 + p_2^0 = p_3^0 + p_4^0 = P^0$ и поэтому $\Gamma(p'; p; P)$ не зависит от четвертых компонент первых двух аргументов (относительных импульсов). Это позволяет выполнить в (3.4) интегрирование по q^0 :

$$\int dq^0 G^0\left(\frac{1}{2}P + q\right)G^0\left(\frac{1}{2}P - q\right) = -i\left(P^0 - \frac{1}{4}P^2 - q^2 + i\delta\right)^{-1}, \quad (3.5)$$

после чего (3.4) принимает вид

$$\Gamma(p'; p; P) = U(p' - p) + \int d\mathbf{q} \frac{U(p' - \mathbf{q})\Gamma(\mathbf{q}; p; P)}{k_0^2 - q^2 + i\delta}; k_0^2 = P^0 - \frac{1}{4}P^2. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) нельзя решить в общем виде, но его решение можно выразить через амплитуду рассеяния двухчастичной задачи в пустоте. Если ввести величину $\chi(\mathbf{q}) = (k_0^2 - q^2 + i\delta)^{-1}\Gamma(\mathbf{q}; p; P)$, то для нее из (3.6) следует

$$(k_0^2 - p'^2)\chi(p') - \int U(p' - \mathbf{q})\chi(\mathbf{q})d\mathbf{q} = U(p' - p). \quad (3.7)$$

Пусть $\Psi_{\mathbf{k}}(p')$ — нормированные функции, удовлетворяющие уравнению

$$(k^2 - p'^2)\Psi_{\mathbf{k}}(p') - \int U(p' - \mathbf{q})\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})d\mathbf{q} = 0, \quad (3.8)$$

² Вопросы, связанные с Γ , решались совместно с В. М. Галицким, работавшим одновременно над аналогичными проблемами для ферми-системы.

тогда решение (3.7) может быть записано в виде

$$\chi(\mathbf{p}') = \int \frac{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q})}{k_0^2 - k^2 + i\delta} U(\mathbf{q} - \mathbf{p}) d\mathbf{q},$$

откуда для $\Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P)$ находим

$$\Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P) = (k_0^2 - p'^2) \int \frac{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}') \Psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q})}{k_0^2 - k^2 + i\delta} U(\mathbf{q} - \mathbf{p}) d\mathbf{q}. \quad (3.9)$$

Заметим теперь, что (3.8) является уравнением Шредингера в импульсном представлении и, следовательно, $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ имеет смысл волновой функции задачи рассеяния в потенциале U . Амплитуда рассеяния $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ связана с Ψ -функцией соотношением³

$$f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) = \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int U(\mathbf{p}' - \mathbf{q}) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (3.10)$$

или

$$\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) / (p^2 - p'^2 + i\delta). \quad (3.11)$$

В первом равенстве (3.10) $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ — волновая функция в координатном представлении, имеющая на бесконечности вид плоской волны с импульсом \mathbf{p} и расходящейся волны. Обычно под амплитудой понимают значение $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ при $p = p'$. Мы будем рассматривать произвольные аргументы, считая (3.10) определением амплитуды $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ для всех значений \mathbf{p}' и \mathbf{p} .

Из условий ортогональности $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}')$ по обоим аргументам для $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ следует

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) - f^*(\mathbf{p}'\mathbf{p}) &= \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q}) f^*(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left[\frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta} - \frac{1}{q^2 - p^2 - i\delta} \right] = \\ &= \int d\mathbf{q} f^*(\mathbf{q}\mathbf{p}') f(\mathbf{q}\mathbf{p}) \left[\frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta} - \frac{1}{q^2 - p^2 - i\delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В частном случае $\mathbf{p}' = \pm \mathbf{p}$ из (3.12) определяется мнимая часть амплитуды рассеяния вперед (назад). Используя очевидное соотношение $f(-\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$, получаем из (3.12)

$$\text{Im} f(\pm \mathbf{p}\mathbf{p}) = -i\pi \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}\mathbf{q}) f^*(\pm \mathbf{p}\mathbf{q}) \delta(q^2 - p^2). \quad (3.13)$$

(Для амплитуды рассеяния вперед (3.13) дает известную связь ее мнимой части с полным сечением σ : $\text{Im} f(\mathbf{p}\mathbf{p}) = -i p \sigma$.)

Подставляя (3.11) в (3.9) и используя (3.12), получим для $\Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P)$ два эквивалентных выражения

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P) &= f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) + \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q}) f^*(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left[\frac{1}{k_0^2 - q^2 + i\delta} + \frac{1}{|q^2 - p^2 - i\delta} \right] = \\ &= f^*(\mathbf{p}\mathbf{p}') + \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}'\mathbf{q}) f^*(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left[\frac{1}{k_0^2 - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2 - p'^2 + i\delta} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.14) дает выражение эффективного потенциала $\Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P)$ через амплитуды рассеяния двухчастичной задачи в пустоте.

³ Величина $f(\mathbf{p}'\mathbf{p})$ отличается множителем от обычно определяемой амплитуды $a(\mathbf{p}'\mathbf{p})$, а именно: $f = -4\pi a$.

4. Функция Грина первого приближения

Эффективные потенциалы Σ_{ik} определяются частными значениями Γ , когда две из четырех участвующих в процессе частиц принадлежат конденсату, т. е. имеют $\mathbf{p} = 0$; $p^0 = \mu$. Принимая также во внимание, что каждая конденсатная частица вносит дополнительный множитель $\sqrt{n_0}$, найдем

$$\Sigma_{20}(p + \mu) = n_0 \Gamma(\mathbf{p}; 0; 2\mu); \quad \Sigma_{02}(p + \mu) = n_0 \Gamma(0; \mathbf{p}; 2\mu), \quad (4.1)$$

$$\Sigma_{11}(p + \mu) = n_0 \Gamma(\mathbf{p}/2; \mathbf{p}/2; p + 2\mu) + n_0 \Gamma(-\mathbf{p}/2; \mathbf{p}/2; p + 2\mu).$$

Для получения химического потенциала следует все частицы в Γ считать конденсатными («вакуумная петля»), но общую степень n_0 уменьшить на единицу (см. I,3.20). Таким образом, получим

$$\mu = n_0 \Gamma(0; 0; 2\mu). \quad (4.2)$$

Подставляя в (4.1) и (4.2) значения Γ из (3.14), найдем

$$\begin{aligned} \mu &= n_0 f(00) + n_0 \int d\mathbf{q} |f(0\mathbf{q})|^2 \left[\frac{1}{2\mu - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2} \right], \\ \Sigma_{20}(p + \mu) &= n_0 f(\mathbf{p}0) + n_0 \int d\mathbf{q} f(\mathbf{p}\mathbf{q}) f^*(0\mathbf{q}) \left[\frac{1}{2\mu - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2} \right], \\ \Sigma_{02}(p + \mu) &= n_0 f^*(\mathbf{p}0) + n_0 \int d\mathbf{q} f(0\mathbf{q}) f^*(\mathbf{p}\mathbf{q}) \left[\frac{1}{2\mu - q^2 + i\delta} + \frac{1}{q^2} \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(p + \mu) &= 2n_0 f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2} \frac{\mathbf{p}}{2} \right) + 2n_0 \int d\mathbf{q} \left| f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2} \mathbf{q} \right) \right|^2 \left[\frac{1}{p^0 + 2\mu - p^2/4 - q^2 + i\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q^2 - p^2/4 - i\delta} \right]. \end{aligned}$$

В последнем выражении введена симметризованная амплитуда

$$f_s(\mathbf{p}'\mathbf{p}) = [f(\mathbf{p}'\mathbf{p}) + f(-\mathbf{p}'\mathbf{p})]/2.$$

Все интегралы в (4.3) сходятся при больших импульсах даже если считать амплитуды константами, так что из соображений размерности эти члены имеют порядок $n_0 f^2 \sqrt{\mu}$, т. е. по сравнению с первыми членами в (4.3) лишний множитель $\sqrt{n_0 f^3}$ — «газовый» параметр (2.1), в котором роль радиуса частицы играет теперь амплитуда f . Опуская в первом приближении интегральные члены в (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \mu &= n_0 f(00); \quad \Sigma_{20}(p + \mu) = \Sigma_{02}^*(p + \mu) = n_0 f(\mathbf{p}0); \\ \Sigma_{11}^\pm &\equiv \Sigma_{11}(\pm \mathbf{p} + \mu) = 2n_0 f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2} \frac{\mathbf{p}}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Функция Грина G , согласно (I, 5.6), равна

$$G(p + \mu) = \frac{p^0 + \varepsilon_p^0 + \Sigma_{11}^- - \mu}{[p^0 - (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-)/2]^2 - [\varepsilon_p^0 + (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^-)/2 - \mu]^2 + \Sigma_{20}\Sigma_{02} + i\delta} \quad (4.5)$$

и после подстановки (4.4) принимает вид

$$G(p + \mu) = \frac{p^0 + \varepsilon_p^0 + 2n_0 f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2} \frac{\mathbf{p}}{2} \right) - n_0 f(00)}{p^{02} - \varepsilon_p^2 + i\delta}, \quad (4.6)$$

где

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left[\varepsilon_p^0 + 2n_0 f_s \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right) - n_0 f(00) \right]^2 - n_0^2 |f(p0)|^2}. \quad (4.7)$$

Значение $p^0(p)$ в полюсе функции Грина $G(p + \mu)$ определяет энергию ε_p элементарных возбуждений (квазичастиц) с импульсом p [2]. Для определения ε_p нужно знать три различные амплитуды. $f_s \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right)$ является обычной симметризованной амплитудой рассеяния вперед, $f(00)$ — ее частное значение. Величина же $f(p0)$ не имеет наглядного смысла в двухчастичной задаче, так как описывает процесс, запрещенный для двух частиц в пустоте.

При малых импульсах зависимостью $f_s \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right)$ и $f(p0)$ от p можно пренебречь и положить $f_s \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right) \approx f(p0) \approx f(00) \equiv f_0$. Такое приближение справедливо, если длина волны больше характерных размеров области взаимодействия, которая по порядку величины определяется амплитудой рассеяния f_0 . Таким образом, при $p < f_0^{-1}$ можно считать все амплитуды в (4.6) и (4.7) константами. Для более высоких возбуждений с $p \gg f_0^{-1}$ существенна зависимость амплитуд от импульса, так что задача не может быть рассмотрена в общем виде. Высокие возбуждения будут рассмотрены на частном примере упругих шаров (см. раздел 8).

Ограничиваясь случаем $pf_0 < 1$, находим из (4.6) и (4.7)

$$G(p + \mu) = (p^0 + \varepsilon_p^0 + n_0 f_0) / (p^{02} - \varepsilon_p^2 + i\delta), \quad (4.8)$$

где

$$\varepsilon_p = \sqrt{\varepsilon_p^{02} + 2n_0 f_0 \varepsilon_p^0}. \quad (4.9)$$

(4.8) и (4.9) по виду совпадают с аналогичными выражениями, полученными по теории возмущений (I, 7.3; 7.4), но вместо фурье-компоненты потенциала U_p теперь входит амплитуда рассеяния f_0 .

Как следует из (4.9), квазичастицы при $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ имеют звуковую дисперсию $\varepsilon_p \approx p \sqrt{n_0 f_0}$, а при $p \gg \sqrt{n_0 f_0}$ переходят в «почти свободные» частицы с $\varepsilon_p \approx \varepsilon_p^0 + n_0 f_0$. (Такой вид спектра возникает при рассмотрении частицы, движущейся в сплошной среде с некоторым коэффициентом преломления.) Переход между областью фононов и областью свободных частиц происходит при $p \sim \sqrt{n_0 f_0} \ll 1/f_0$, так что обе области законно рассматривать в приближении постоянных амплитуд.

Отметим, что неравенства $\sqrt{n_0 f_0^3} \ll 1$ и $pf_0 \ll 1$ фактически связаны между собой. Если ограничиваться импульсами p , не сильно превышающими $\sqrt{n_0 f_0}$, то второе условие является следствием первого. Поэтому пренебрегая величинами $\sim \sqrt{n_0 f_0^3}$, мы обязаны считать амплитуды константами.

В (I,5) была введена величина $\hat{G}(p + \mu)$, аналог функции Грина G , но не с одним выходящим свободным концом, а с двумя входящими концами. Аналогичную величину с двумя выходящими концами обозначим $\check{G}(p + \mu)$. Нетрудно видеть, что она получается из $\hat{G}(p + \mu)$ заменой Σ_{02} на Σ_{20} . Согласно (I,5.7) и (4.4) получаем в приближении постоянных амплитуд

$$\hat{G}(p + \mu) = \check{G}(p + \mu) = -n_0 f_0 / (p^{02} - \varepsilon_p^2 + i\delta). \quad (4.10)$$

5. Второе приближение для функции Грина

Во втором приближении в Σ_{ih} и μ нужно учесть величины порядка $\sqrt{n_0 f_0^3}$. Согласно сказанному в конце предыдущего раздела, одновременно следует учитывать члены порядка $p f_0$ в амплитудах. Действительная часть амплитуды разлагается только по четным степеням p , а мнимая часть — только по нечетным, поэтому член порядка $p f_0$ определяет в низшем приближении мнимую часть амплитуды. Мнимая часть $f_s\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ опреде-

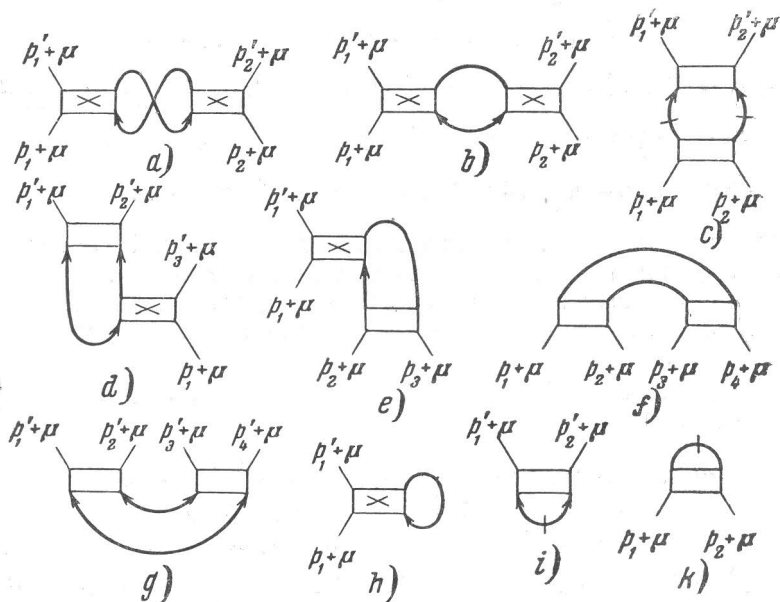


Рис 3.

ляется из (3.13), а амплитуда $f(p_0)$ действительна, что легко увидеть из определения (3.10) (к тому же в рассматриваемом приближении входит только квадрат ее модуля).

Члены порядка $\sqrt{n_0 f_0^3}$ от графиков первого приближения определяются интегральными выражениями в (4.3). В них, как и в интеграле (3.13), можно считать амплитуды константами. Как было выяснено в разделе 2, тот же порядок имеют графики, содержащие петлю с тремя или более сплошными линиями. Нетрудно видеть, что суммирование графиков, отличающихся только числом сплошных линий в петле, приведет к замене функций Грина нулевого приближения G^0 на G , \hat{G} или \check{G} первого приближения. Можно поэтому сразу рассматривать петли, образованные из G , \hat{G} , \check{G} и Γ . Всего можно сконструировать десять существенно различных петель (рис. 3). Прямоугольники с крестом обозначают сумму двух прямоугольников для обменного и необменного взаимодействия (отличающихся взаимным расположением верхних и нижних концов) и соответствуют $-i[\Gamma(12; 34) + \Gamma(12; 43)]$ или в импульсном представлении $-i[\Gamma(\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P) + \Gamma(-\mathbf{p}'; \mathbf{p}; P)]$. Если разлагать G , \hat{G} и \check{G} по степеням эффективного потенциала Γ , то в низшем приближении графики 3, c, i, k будут представлены петлей с двумя сплошными линиями. Но все такие петли уже учтены в Γ и поэтому должны быть исключены. Это условно обозначено на рис. 3 штрихами у сплошных линий. Вводя для графиков рис. 3 обозначения $-iF_{a,b \dots}(p_1', \dots, p_1 \dots)$, найдем в

приближении постоянных амплитуд:

$$\begin{aligned}
 F_a(p'_1 p'_2; p_1 p_2) &= i4f_0^2 \int G(q + \mu) G(p_1 - p'_1 + q + \mu) d^4 q; \\
 F_b &= i4f_0^2 \int \hat{G}(q + \mu) \check{G}(p_1 - p'_1 + q + \mu) d^4 q; \\
 F_c &= if_0^2 \int \{G(q + \mu) G(p_1 + p_2 - q + \mu) - G^0(q + \mu) G^0(p_1 + p_2 - q + \mu)\} d^4 q; \\
 F_d &= i2f_0^2 \int \hat{G}(q + \mu) G(p'_2 + p'_3 - q + \mu) d^4 q, \\
 F_e &= i2f_0^2 \int \check{G}(q + \mu) G(p'_1 + p'_2 - q + \mu) d^4 q; \\
 F_f &= if_0^2 \int \hat{G}(q + \mu) \hat{G}(p_1 + p_2 - q + \mu) d^4 q; \\
 F_g &= if_0^2 \int \check{G}(q + \mu) \check{G}(p'_1 + p'_2 - q + \mu) d^4 q; \quad F_h = i2f_0 \int G(q + \mu) d^4 q; \\
 F_i &= if_0 \int \{\check{G}(q + \mu) - n_0 f_0 G^0(q + \mu) G^0(-q + \mu)\} d^4 q; \\
 F_k &= if_0 \int \{\hat{G}(q + \mu) - n_0 f_0 G^0(q + \mu) G^0(-q + \mu)\} d^4 q.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

(Везде предполагаются выполненными законы сохранения $\Sigma p = \Sigma p'$. Интегрирование по q^0 в F_h производится с замыканием в верхнюю полуплоскость, так как соответствующий график при $G \rightarrow G^0$ должен исчезать.) В правых частях (5.1) вместо μ следует подставить значение первого приближения $\mu^{(1)} = n_0 f_0$.

В Σ_{ik} входят частные значения F (с множителями $\sqrt{n_0}$ для каждой конденсатной частицы):

$$\begin{aligned}
 \Sigma'_{20}(p + \mu) &= n_0 F_a(p - p; 00) + n_0 F_b(p - p; 00) + n_0 F_e(p0 - p; 0) + \\
 &\quad + n_0 F_e(0p - p; 0) + n_0 F_e(-p0p; 0) + \\
 &\quad + n_0 F_e(0 - pp; 0) + n_0 F_g(p0 - p0;) + n_0 F_g(p00 - p;) + F_i(p - p); \\
 \Sigma'_{02}(p + \mu) &= n_0 F_a(00; p - p) + n_0 F_b(00; p - p) + n_0 F_d(0; p - p0) + \\
 &\quad + n_0 F_d(0; p0 - p) + n_0 F_d(0; -pp0) + n_0 F_d(0; -p0p) + \\
 &\quad + n_0 F_f(; p0 - p0) + n_0 F_f(; p00 - p) + F_k(; p - p); \\
 \Sigma'_{11}(p + \mu) &= n_0 F_a(p0; 0p) + n_0 F_b(p0; 0p) + n_0 F_c(p0; p0) + n_0 F_c(p0; 0p) + \\
 &\quad + n_0 F_d(p; 0p0) + n_0 F_d(p; 00p) + n_0 F_e(p00; p) + n_0 F_e(0p0; p) + F_h(p; p).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для того чтобы отобразить вакуумные петли, входящие в μ , следует (I,4) предварительно выделить одну выходящую (или входящую) конденсатную частицу. После этого следует суммировать петли, различные как по геометрической структуре, так и по месту выделенной частицы. Вакуумные петли включают прямоугольники трех типов, отличающиеся числом входящих и выходящих сплошных линий ($\Sigma_{11}^{(1)}$, $\Sigma_{02}^{(1)}$ или $\Sigma_{20}^{(1)}$). Выделенная конденсатная частица может выходить либо из $\Sigma_{11}^{(1)}$, либо из $\Sigma_{02}^{(1)}$. Совокупность всех графиков первого типа равна $-iF_h(0; 0)$, тогда как $-iF_i(00;)$ дает сумму всех графиков второго типа (конденсатная частица выходит из $\Sigma_{02}^{(1)}$). Таким образом, вклад рассматриваемых петель в μ равен

$$\mu' = F_h(0; 0) + F_i(00;). \tag{5.3}$$

При интегрировании в (5.1) по q^0 удобно представить G и $\hat{G} = \check{G}$ в следующем виде

$$G(q + \mu) = \frac{A_q}{q^0 - \varepsilon_q + i\delta} - \frac{B_q}{q^0 + \varepsilon_q - i\delta}; \tag{5.4}$$

$$\hat{G} = \check{G}(q + \mu) = -C_q \left[\frac{1}{q^0 - \varepsilon_q + i\delta} - \frac{1}{q^0 + \varepsilon_q - i\delta} \right],$$

где

$$A_q = (\varepsilon_q + \varepsilon_q^0 + n_0 f_0) / 2\varepsilon_q;$$

$$B_q = (-\varepsilon_q + \varepsilon_q^0 + n_0 f_0) / 2\varepsilon_q = n_0^2 f_0^2 / 2\varepsilon_q (\varepsilon_q + \varepsilon_q^0 + n_0 f_0); C_q = n_0 f_0 / 2\varepsilon_q \quad (5.5)$$

и зависят только от $|\mathbf{q}|$. Производя в (5.1) интегрирование по q^0 , из (5.2) и (5.3) после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Sigma'_{02(20)}(p + \mu) &= 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} [(A_q; B_k) - (A_q + B_q; C_k) + 3C_q C_k] \times \\ &\times \left(\frac{1}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{1}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} \right) - f_0 \int d\mathbf{q} \left\{ C_q + \frac{n_0 f_0}{2n_0 f_0 - 2\varepsilon_q^0 + i\delta} \right\}, \\ \Sigma'_{11}(p + \mu) &= 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left\{ \frac{(A_q; B_k) + 2C_q C_k + A_q A_k - 2(A_q; C_k)}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \right. \\ &- \frac{(A_q; B_k) + 2C_q C_k + B_q B_k - 2(B_q; C_k)}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} - \frac{1}{p^0 + 2n_0 f_0 - \varepsilon_q^0 - \varepsilon_k^0 + i\delta} \left. \right\} + 2f_0 \int d\mathbf{q} B_q, \\ \mu' &= 2f_0 \int d\mathbf{q} B_q - f_0 \int d\mathbf{q} \left\{ C_q + \frac{n_0 f_0}{2n_0 f_0 - 2\varepsilon_q^0 + i\delta} \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$, а символ (;) означает симметризацию: $(A_q; B_k) = A_q B_k + B_q A_k$ (подынтегральные выражения для удобства симметризованы по \mathbf{q} и \mathbf{k}).

Прежде чем прибавить к (5.6) члены второго порядка из (4.2), преобразуем несколько выражение для Σ_{11} в (4.3). Замечая, что

$$q^2 + p^2 / 4 = \varepsilon_{p/2+q}^0 + \varepsilon_{p/2-q}^0$$

и вводя новую переменную интегрирования $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{p} / 2$, получим в рассматриваемом приближении вместо (4.3)

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(p + \mu) &= 2n_0 f_0 + 2n_0 \operatorname{Im} f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{p}}{2} \right) + \\ &+ 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left[\frac{1}{p^0 + 2n_0 f_0 - \varepsilon_q^0 - \varepsilon_k^0 + i\delta} - \frac{1}{\varepsilon_p^0 - \varepsilon_q^0 - \varepsilon_k^0 + i\delta} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.6), (4.3) и (5.7) после некоторых преобразований найдем для совокупности всех членов второго порядка

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} &= 2f_0 \int d\mathbf{q} B_q + \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left(\frac{1}{\varepsilon_q^0} - \frac{1}{\varepsilon_q} \right), \\ \Sigma_{20}^{(2)}(p + \mu) &= 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} [(A_q; B_k) - (A_q + B_q; C_k) + 3C_q C_k] \times \\ &\times \left(\frac{1}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{1}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} \right) + \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left(\frac{1}{\varepsilon_q^0} - \frac{1}{\varepsilon_q} \right); \\ \Sigma_{11}^{(2)}(p + \mu) &= 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left\{ \frac{(A_q; B_k) + 2C_q C_k + A_q A_k - 2(A_q; C_k)}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \right. \\ &- \frac{(A_q; B_k) + 2C_q C_k + B_q B_k - 2(B_q; C_k)}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon_q} + \frac{1}{\varepsilon_k} \right) \left. \right\} + 2f_0 \int d\mathbf{q} B_q + \\ &+ 2n_0 \operatorname{Im} f_s \left(\frac{\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{p}}{2} \right) - 2n_0 f_0^2 \int d\mathbf{q} \left[\frac{1}{\varepsilon_p^0 - \varepsilon_q^0 - \varepsilon_k^0 + i\delta} + \frac{1}{4\varepsilon_q} + \frac{1}{4\varepsilon_k} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Находя $\text{Im} f_s \left(\frac{p}{2} \frac{p}{2} \right)$ из (3.13) и подставляя значения интегралов, не содержащих p^0 (которые вычисляются точно), находим

$$\Sigma_{20(02)}^{(2)}(p + \mu) = \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int \frac{dq}{\varepsilon_q \varepsilon_k} R(qk) \left[\frac{1}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{1}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} \right] + \frac{1}{\pi^2} \sqrt{n_0 f_0^3} n_0 f_0, \quad (5.9)$$

$$\Sigma_{11}^{(2)}(p + \mu) = \frac{1}{2} n_0 f_0^2 \int \frac{dq}{\varepsilon_q \varepsilon_k} \left[\frac{Q^-(qk)}{p^0 - \varepsilon_q - \varepsilon_k + i\delta} - \frac{Q^+(qk)}{p^0 + \varepsilon_q + \varepsilon_k - i\delta} + \varepsilon_q + \varepsilon_k \right] + \frac{8}{3\pi^2} \sqrt{n_0 f_0^3} n_0 f_0, \quad (5.10)$$

$$\mu^{(2)} = (5/3\pi^2) \sqrt{n_0 f_0^3} \cdot n_0 f_0, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} R(qk) &= 2\varepsilon_q \varepsilon_k^0 - 2\varepsilon_q \varepsilon_k + n_0^2 f_0^2, \\ Q^\mp(qk) &= 3\varepsilon_q^0 \varepsilon_k^0 - \varepsilon_q \varepsilon_k + n_0 f_0 (\varepsilon_q^0 + \varepsilon_k^0) + \\ &+ n_0^2 f_0^2 \mp [n_0 f_0 (\varepsilon_q + \varepsilon_k) - \varepsilon_q \varepsilon_k^0 - \varepsilon_k \varepsilon_q^0]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Функцию Грина (4.5) удобно представить в виде, аналогичном (5.4). В рассматриваемом приближении находим

$$G(p + \mu) = \frac{A_p + \alpha_p}{p^0 - \varepsilon_p - \Lambda_p^-} - \frac{B_p + \alpha_p}{p^0 + \varepsilon_p + \Lambda_p^+}, \quad (5.13)$$

где α_p и Λ_p^\mp — поправки второго приближения:

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{n_0 f_0}{4\varepsilon_p^3} \{ 2\varepsilon_p^0 \Sigma_{20}^{(2)} - n_0 f_0 (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^- - 2\mu - 2\Sigma_{20})^{(2)} \}; \\ \Lambda_p^\mp &= \frac{\varepsilon_p^0}{2\varepsilon_p} (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^- - 2\mu)^{(2)} + \\ &+ \frac{n_0 f_0}{2\varepsilon_p} (\Sigma_{11}^+ + \Sigma_{11}^- - 2\mu - 2\Sigma_{20})^{(2)} \pm \frac{1}{2} (\Sigma_{11}^+ - \Sigma_{11}^-)^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

α_p и Λ_p^\mp выражаются через комбинации интегралов (5.9) и (5.10). В предельных случаях малых и больших импульсов (по сравнению с $\sqrt{n_0 f_0}$) можно получить явные выражения для функций $\alpha_p = \alpha(p^0; \mathbf{p})$ и $\Lambda_p^\mp = \Lambda^\mp(p^0; \mathbf{p})$, исследование которых показывает, что новых полюсов у функции Грина не возникает. Для определения функции Грина вблизи полюсов $p_0 \approx \pm \varepsilon_p$ можно в α_p положить $|p^0| = \varepsilon_p$, а в Λ_p^\mp сохранить только первые степени разности $(\varepsilon_p \mp p^0)$. Для малых импульсов ($p \ll \sqrt{n_0 f_0}$), при этом найдем

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \sqrt{n_0 f_0^3} \left(\frac{2}{3\pi^2} \frac{n_0 f_0}{\varepsilon_p} + i \frac{1}{64\pi} \frac{\varepsilon_p}{n_0 f_0} \right) \quad (p \ll \sqrt{n_0 f_0}; \varepsilon_p \approx p \sqrt{n_0 f_0}), \\ \Lambda_p^\mp &\equiv \Omega_p + \lambda_p (\varepsilon_p \mp p^0) = \sqrt{n_0 f_0^3} \left(\frac{7}{6\pi^2} \varepsilon_p - i \frac{3}{640\pi} \frac{\varepsilon_p^5}{n_0^4 f_0^4} \right) + \\ &+ (\varepsilon_p \mp p^0) \sqrt{n_0 f_0^3} \left(\frac{1}{2\pi^2} + i \frac{1}{32\pi} \frac{\varepsilon_p^2}{n_0^2 f_0^2} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

При больших импульсах существенной оказывается только мнимая часть Λ_p^\mp :

$$\Lambda_p^\mp = \Omega_p = -\frac{i}{4\pi} p f_0 n_0 f_0 \quad (p \gg \sqrt{n_0 f_0}). \quad (5.16)$$

Для малых импульсов функция Грина вблизи полюсов с учетом (5.13) и (5.15) может быть записана в следующем виде:

$$G(p + \mu) = (1 - \lambda_p) \left[\frac{A_p + \alpha_p}{p^0 - \varepsilon_p - \Omega_p} - \frac{B_p + \alpha_p}{p^0 + \varepsilon_p + \Omega_p} \right]. \quad (5.17)$$

В случае больших импульсов в (5.17) надо пренебречь α_p и λ_p .

6. Спектр квазичастиц. Энергия основного состояния

Как уже было сказано, энергия квазичастиц определяется значением $p^0(p)$ в полюсах $G(p + \mu)$, причем надо отбирать лишь те полюса, которые дают отрицательную мнимую часть в энергии (затухание). Для случая $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ из (5.15) и (5.17) находим

$$\varepsilon = p \sqrt{n_0 f_0} \left(1 + \frac{7}{6\pi^2} \sqrt{n_0 f_0^3} \right) - i \frac{3}{640\pi} \sqrt{n_0 f_0^3} \frac{p^5}{(n_0 f_0)^{3/2}} \quad (p \ll \sqrt{n_0 f_0}), \quad (6.1)$$

а в области больших импульсов, согласно (5.16), получаем

$$\varepsilon = \varepsilon_p^0 + n_0 f_0 \left(1 - \frac{i}{4\pi} p f_0 \right) \approx \varepsilon_p^0 + n_0 f(p) \quad (p \gg \sqrt{n_0 f_0}). \quad (6.2)$$

Как следует из (6.1), при малых p квазичастицы являются фононами. Второе приближение дает поправку к скорости звука и затухание ($\sim p^5$), которое связано с процессом развала одного фонона на два. В области больших p во втором приближении возникает затухание, связанное с мнимой частью амплитуды рассеяния вперед (т. е. с полным сечением).

В (I, 7) показана связь функции Грина с некоторыми физическими характеристиками системы. Средние числа частиц с данным импульсом \bar{N}_p в основном состоянии связаны с вычетом в верхнем полюсе функции Грина:

$$\bar{N}_p = i \int G dp^0 / 2\pi = (B_p + \alpha_p) (1 - \lambda_p). \quad (6.3)$$

Для $p \ll \sqrt{n_0 f_0}$ из (5.15) и (5.5) найдем

$$\bar{N}_p = \frac{n_0 f_0}{2\varepsilon_p} \left(1 + \frac{5}{6\pi^2} \sqrt{n_0 f_0^3} \right) \quad (6.4)$$

(мнимые части α_p и λ_p , как и следовало ожидать, сократились). Для нахождения полного числа частиц с $p \neq 0$ необходимо знать \bar{N}_p для всех импульсов. Мы ограничимся поэтому только первым приближением для $\bar{N}_p (= B_p)$. Для плотности частиц с $p \neq 0$ находим

$$n - n_0 = i \int G(p + \mu) d^4 p = \int B_p dp = \sqrt{n_0 f_0^3} n_0 / 3\pi^2. \quad (6.5)$$

Соотношение (6.5) связывает плотность частиц в конденсате n_0 , которая в качестве параметра входила во все формулы, с полным числом частиц в системе.

Отметим следующее существенное обстоятельство. Как следует из проведенных вычислений, для применимости «газового» приближения необходима малость n_0 , а не полной плотности n , которая явно не входит в задачу. Но (6.5) показывает, что из малости n_0 следует и малость n .

Это означает, что путем увеличения взаимодействия или плотности нельзя уменьшить (до $n_0 \ll f_0^{-3}$) плотность конденсата. Этот результат дополняет и усиливает утверждение, сделанное в I о том, что конденсат не исчезает при включении взаимодействия.

Энергию основного состояния можно найти, пользуясь выражением для химического потенциала μ , для которого, согласно (4.4) и (5.11), имеем

$$\mu = n_0 f_0 \left(1 + \frac{5}{3\pi^2} V \overline{n_0 f_0^3} \right), \quad (6.6)$$

или, выражая n_0 через n , из (6.5) в том же приближении найдем

$$\mu = n f_0 \left(1 + \frac{4}{3\pi^2} V n f_0^3 \right). \quad (6.7)$$

Так как по определению $\mu = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{E}{V} \right)$, то, интегрируя (6.7) по n , получаем для энергии основного состояния

$$\frac{E_0}{V} = \frac{1}{2} n^2 f_0 \left(1 + \frac{16}{15\pi^2} V n f_0^3 \right), \quad (6.8)$$

что совпадает с выражением, полученным в [3] для упругих шаров (при сравнении надо иметь в виду, что $f_0 = 4\pi a$).

Заметим, что условие термодинамической устойчивости системы $\partial P / \partial V = -\partial^2 E / \partial V^2 < 0$ совпадает с условием $f_0 > 0$. Только для систем с таким взаимодействием имеют смысл полученные результаты.

7. О возможности более высоких приближений

В двух первых приближениях все результаты выражаются через амплитуды f , т. е. задача многих взаимодействующих частиц сводится к решению двухчастичной задачи.

В следующем приближении следует учитывать в Σ_{ik} члены, пропорциональные $n_0 f_0^3$. Среди других графиков следует учесть и изображенные на рис. 4 «тройные лестницы». Интегралы, соответствующие графикам такого типа, расходятся при больших импульсах и становятся конечными только при учете зависимости f от импульсов. Для оценки можно обрезать интегралы при $p \sim f_0^{-1}$. Нетрудно видеть, что увеличение числа «ступенек» не меняет порядка графика. Действительно, каждая «ступенька» добавляет множитель $f_0 G^2$ и одно интегрирование по 4-импульсу. Для грубой оценки, полагая $q^0 \sim q^2$, $G \sim q^{-2}$, найдем

$$\int f_0 G^2 d^4 q \sim f_0 \int dq \sim 1,$$

откуда следует, что графики с произвольным числом «ступенек» необходимо учитывать одновременно. Совокупность всех «тройных лестниц» описывает взаимодействие трех частиц, поэтому их сумма выразится через трехчастичные амплитуды.

Таким образом, в следующем приближении ($\sim n_0 f_0^3$) войдут величины трехчастичной задачи (ср. [4]). В связи с тем, что задачу трех сильно взаимодействующих частиц в общем случае решить нельзя, высшие приближения по плотности в задаче многих частиц теряют смысл.

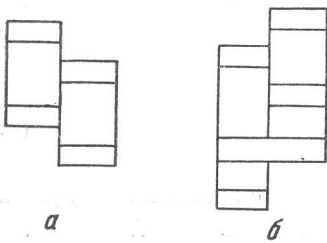


Рис. 4

8. Высокие возбуждения ($pf_0 \sim 1$). Случай упругих шаров

Высокие возбуждения, когда становится существенной зависимость амплитуд от импульсов, мы рассмотрим на частном примере газа из упругих шаров радиуса $a/2$. Мы ограничимся при этом первым приближением по плотности, т. е. формулой (4.6). Амплитуда $f(p_0)$ по формуле (3.10) вычисляется точно. Для $f_s(\frac{p}{2}, \frac{p}{2})$ мы ограничимся s -волной: следующие члены (симметризованная амплитуда разлагается только по четным l) дают численно незначительный вклад (уже d -волна при $pa \sim 1$ составляет $\sim 10\%$). Подставляя в (4.7) значения амплитуд

$$f(p_0) = 4\pi \frac{\sin pa}{p}; \quad f_s\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right) = \frac{8\pi}{p} \sin \frac{pa}{2} e^{-ipa/2}, \quad (8.1)$$

находим для энергии квазичастиц

$$\varepsilon = \left[\left(\frac{p^2}{2} + 8\pi n_0 \frac{\sin pa}{p} - 4\pi n_0 a \right)^2 - 16\pi^2 n_0^2 \frac{\sin^2 pa}{p^2} \right]^{1/2}, \quad (8.2)$$

или для больших импульсов

$$\varepsilon \approx \frac{p^2}{2} + 4\pi n_0 a \left(2 \frac{\sin pa}{pa} - 1 \right). \quad (8.3)$$

Второй член в (8.3) при $pa \approx 1,9$ меняет знак, в результате чего на основной параболе возникает волнообразный изгиб. Однако это существенно не сказывается на дисперсии ввиду малости этого члена (при $pa \sim 1$ его относительный порядок $n_0 a^3$). Если формально увеличивать в (8.3) или (8.2) параметр $n_0 a^3$, то изгиб на кривой дисперсии, вызываемый вторым членом в (8.3), увеличивается и при достаточно большой плотности возникает сначала перегиб, а затем максимум и минимум, так что спектр качественно совпадает с постулированным Л. Д. Ландау для объяснения свойств гелия II [5]. Такая экстраполяция является, конечно, незаконной, но она позволяет предположить, что отличие жидкого гелия от неидеального бозе-газа чисто количественное и при переходе от газа к жидкости не возникает качественно новых явлений.

9. Заключение

Отметим основные черты рассмотренного приближения:

1) Взаимодействие между частицами описывается не потенциалом, а точной амплитудой рассеяния, что позволяет рассматривать сильные взаимодействия. После замены потенциала амплитудой появляется возможность развить теорию возмущений по амплитуде (точнее по $\sqrt{n_0 f_0^3}$).

2) Разлагается в ряд не энергия квазичастиц (т. е. знаменатель функции Грина), а эффективные потенциалы взаимодействия Σ_{ik} и химический потенциал μ . Связь же функции Грина с Σ_{ik} и μ устанавливается точно.

Из (4.7) или (4.9) видно, что разлагать ε_p в ряд по f можно лишь для высоких возбуждений с $p \gg \sqrt{n_0 f_0^3}$, а состояния системы, близкие к основному, в принципе не могут быть получены по теории возмущений. По этой причине выражение для энергии нижних состояний бозе-системы из упругих шаров, полученное в [4] из теории возмущений по «псевдопотенциалу», является неправильным. (Оно совпадает с формальным разложением (4.7) по f_0 .)

В заключение я хочу поблагодарить А. Б. Мигдала и особенно В. М. Галицкого за плодотворные дискуссии, а также Л. Д. Ландау за обсуждение результатов.

Литература

- [1] С. Т. Беляев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр., 417.
- [2] В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 34, 139, 1958.
- [3] T. D. Lee, C. N. Yang. Phys. Rev., 105, 1119, 1957.
- [4] K. Huang, C. N. Yang. Phys. Rev., 105, 767, 1957.
- [5] Е. М. Лифшиц. УФН, 34, 512, 1948.

ENERGY SPECTRUM OF A NON-IDEAL BOSE-GAS

S. T. Belyaev

The single particle Green's function is derived for a system of interacting Bose particles in the low density approximation. The Green's function is used to determine the energy levels near the ground state (spectrum of quasiparticles).
