Доклады Академии наук СССР
1959. Том 125, № 5

ФИЗИКА

Б. В. ЧИРИКОВ

ПРОХОЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 14 I 1959)

Рассмотрим нелинейный осциллятор с одной степенью свободы, описываемый гамильтонианом

$$\mathcal{H} = p^2/2M + U(x, \lambda_1) + \varepsilon U_1(x, \lambda, \vartheta),$$
$$\lambda_1 = \lambda_1(\tau), \quad \lambda = \lambda(\tau, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots), \quad d\vartheta/dt = \Omega(\tau). \tag{1}$$

Параметр λ_1 характеризует адиабатические процессы в системе; член с U_1 (периодический по ϑ) характеризует внешние возмущения (в частности, прохождение через резонанс), а также диссипативные и автоколебательные процессы; $\tau = \varepsilon t$ — «медленное время»; ε — малый параметр.

Методика исследования таких нелинейных колебаний рассматривалась в работах [1, 2]. Прохождение через резонанс для случая слабой нелинейности рассматривалось в работах [1, 3]. Кроме того, при исследовании фазового режима в ускорителях релятивистских частиц также фактически изучалось прохождение нелинейного осциллятора через резонанс (см., например, [4–6]). Однако, вследствие применения численных методов в первой группе работ и прикладного характера работ второй группы, это явление не было изучено с достаточной полнотой. Здесь описывается простой метод нахождения решения непосредственно из гамильтониана (1) и исследуется процесс прохождения нелинейного осциллятора через резонанс.

Пусть невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) имеет периодическое решение, зависящее от двух постоянных W и φ и параметра λ_1:

$$x = x(W, \theta, \lambda_1), \quad \theta = \int \omega(W, \lambda_1)\, dt + \varphi, \quad dx/dt = \omega\, \partial x/\partial\theta,$$
$$W = p^2/2M + U(x, \lambda_1). \tag{2}$$

При наличии малых возмущений ($\varepsilon \to 0$) перейдем к медленно изменяющимся переменным W и φ. Используя соотношение $\dot{W} = \dot{\lambda}_1 \partial W/\partial\lambda_1 + [W, \mathcal{H}]$, где [,] — скобки Пуассона, найдем

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{d\lambda_1}{d\tau} \frac{\partial W}{\partial\lambda_1} - \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x} \dot{x}\ . \tag{3}$$

Далее, $dx/dt = \dot{W}\, \partial x/\partial W + (\omega + \dot{\varphi})\, \partial x/\partial\theta + \dot{\lambda}_1\, \partial x/\partial\lambda_1 = \omega\, \partial x/\partial\theta$. Последнее равенство связано с тем, что $dx/dt = \partial\mathcal{H}/\partial p$ и не зависит от возмущений. Так как $\partial x/\partial\theta = \dot{x}/\omega$, то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial W} \omega - \frac{\varepsilon\omega}{\dot{x}} \frac{d\lambda_1}{d\tau} \left(\frac{\partial x}{\partial W} \frac{\partial U}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial x}{\partial\lambda_1} \right). \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) являются точными уравнениями в «медленных» переменных W и φ. Применим к ним общий метод усреднения [7], причем конкретизируем вид U_1: $U_1(x, \lambda, \vartheta) = U_1(x, \vartheta, \tau) + x(\lambda + \lambda')$; $\lambda = \alpha(\tau)\dot{x}$; $\lambda' = -\beta(\tau)\dddot{x}$. Кроме того, не будем рассматривать адиабатические процессы. Разлагая правые части (3), (4) в ряды Фурье по θ и ϑ и усредняя их по периоду невозмущенного движения, получим уравнения первого приближения:

$$\dot{W} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m\Omega \approx l\omega} P_{ml} \cos \psi_{ml} - \varepsilon P_0;$$

$$\dot{\psi}_{ml} = m\Omega(\tau) - l\omega(W) - \frac{\varepsilon}{2} l \sum_{p\Omega \approx q\omega} Q_{pq} \sin \psi_{pq};$$

$$P_{ml}(W, \tau) = l\omega a_l f_{m,0} + \omega \sum_n n a_n (f_{m,|l-n|} - f_{m,l+n});$$

$$Q_{ml}(W, \tau) = \omega \frac{da_l}{dW} f_{m,0} + \omega \sum_n \frac{da_n}{dW} (f_{m,|l-n|} + f_{m,l+n}); \qquad (5)$$

$$P_0(W, \tau) = \frac{\alpha}{2} \omega^2 \sum_n n^2 a_n^2 + \frac{\beta}{2} \omega^4 \sum_n n^4 a_n^2;$$

$$\psi_{ml} = m\vartheta + \gamma_m - l\theta; \quad x = \sum_n a_n(W) \cos n\theta;$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \sum_{m,n} f_{m,n}(W, \tau) \sin(m\vartheta + \gamma_m \pm n\theta).$$

Заметим, что сумма в уравнении для $\dot{\psi}_{ml}$, представляющая поправку к частоте осциллятора, приводит к эффектам второго порядка в изменении W и может быть отброшена в первом приближении, если мы интересуемся изменением только W *.

Простейшим случаем является быстрое прохождение через резонанс, когда можно пренебречь скоростью изменения частоты осциллятора ($\dot{W}\omega'$) по сравнению со скоростью изменения частоты внешней силы ($\varepsilon\, d\Omega/d\tau$) [10], что справедливо при условии

$$|l\omega' P_{ml} (d\Omega/d\tau + l\omega' P_0)^{-1}| \ll 1. \qquad (6)$$

При этом решение уравнений (5) выражается известным образом через интегралы Френеля и асимптотически (если пренебречь затухающими колебаниями) имеет вид ($P_0 = 0$) *:

$$\Delta W = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m\Omega \approx l\Omega} P_{ml} \left| m \frac{d\Omega}{d\tau} \right|^{-1/2} \cos\left(\psi_{ml_0} + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (7)$$

Если фазы колебаний в момент прохождения резонанса (ψ_{ml_0}) можно считать случайными, то $\overline{\Delta W} = 0$. Следовательно, в первом приближении имеет место лишь «рассеяние» по энергии — эффект, пропущенный в работах [8,9].

При невыполнении условия (6) рассмотрим вначале случай единственного резонанса ($m = l = 1$) **. Дифференцируя второе уравнение (5) по t и подставляя в него первое, получим

$$\psi''(y) = 1 - A \cos \psi, \qquad (8)$$

$$A = \omega' P / 2\Omega_э', \quad y = t\sqrt{\varepsilon(d\Omega/d\tau + \omega' P_0)} = t\sqrt{\varepsilon\Omega_э'}, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi(0) = \psi_0.$$

В дальнейшем будем считать $\Omega_э'$ и A положительными и постоянными. Если $\Omega_э' < 0$, то в решении нужно изменить знак у времени. Если $A < 0$,

---

* Строго говоря, это справедливо при условии $AP_{ml} \ll lW^2\omega'$, которое может нарушаться в случае слабой нелинейности ($\omega' = d\omega/dW \to 0$).

** Нелинейность осциллятора ($\omega' \neq 0$) не обязательно связана с ангармоничностью. Вращение релятивистской частицы в магнитном поле дает пример нелинейного, но гармонического осциллятора. Наоборот, бетатронные колебания в ускорителе с жесткой фокусировкой могут быть линейными, но не гармоническими.

достаточно изменить все фазы на π. Первый интеграл (8) имеет вид

$$^1/_2 (\psi')^2 = \psi - \psi_0 - A (\sin \psi - \sin \psi_0). \qquad (9)$$

Исследование уравнения (9) удобно производить графически, построив функции $\psi/A + B$ и $\sin \psi$ (рис. 1). Разность между ними дает величину $(\psi')^2/2A$, а точки пересечения соответствуют прохождению резонанса. Так как для действительного движения должно быть всегда $\psi/A + B > \sin \psi$ $(\psi'^2 > 0)$, то после пересечения знак ψ' изменяется на обратный. Из рис. 1 видно, что существуют два качественно различных режима прохождения

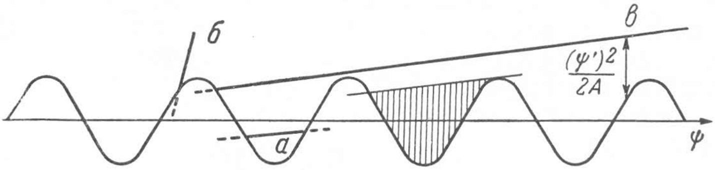

Рис. 1

через резонанс. Первый из них (представленный прямой a, имеющей две точки пересечения) характеризуется ограниченным колебанием фазы ψ и многократным прохождением через резонанс $(\psi' = 0)$. Этот режим хорошо изучен [4—6] для специального случая (ускорители релятивистских частиц), где он известен под названием захвата или автофазировки. Захват возможен лишь при $A > 1$ и при определенных начальных условиях, показанных на рис. 1 штриховкой. Отметим, что в случае $A \gg 1$ захват происходит практически при любой фазе колебаний.

Другой режим (представленный прямыми *б* и *в*) характеризуется однократным прохождением осциллятора через резонанс. Рассмотрим его подробнее. Интегрируя (9) и используя соотношение $\omega' \Delta W = \Delta\omega = \omega_н + \dot{\psi} - \Omega$ (5), найдем асимптотическое (пренебрегая затухающими колебаниями) изменение энергии осциллятора:

$$\Delta W = \frac{\sqrt{2\varepsilon\Omega_э{}'}}{\omega'} C(A, \psi_0) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\varepsilon\Omega_э{}'}}{\omega'} \int_0^\infty \{[\psi - A[\sin(\psi + \psi_0) - \sin\psi_0]]^{-1/2} - \psi^{-1/2}\}\, d\psi, \qquad (10)$$

где произведена замена $\psi - \psi_0 \to \psi$. При быстром прохождении через резонанс $(A \ll 1)$ интеграл в (10) равен

$$C = \sqrt{\pi} A \cos\varphi + (\sqrt{\pi}/2) A^2 (\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sqrt{2}\sin^2\varphi - \sqrt{2}\sin\varphi\cos\varphi),$$

$$\varphi = \psi_0 + \pi/4. \qquad (11)$$

Первый член приводит к (7), второй представляет малую нелинейную добавку. Его среднее значение (при равновероятности фаз φ) отлично от нуля:

$$\bar{C} = \sqrt{\pi/2} A^2/2, \quad \overline{\Delta W} = \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\pi}/8)\,\omega' P^2/\Omega_э{}'^{3/2}, \qquad (12)$$

что приводит к замедлению прохождения осциллятора через резонанс. Знак ΔW совпадает со знаком $\omega'\Omega_э{}'$.

В обратном предельном случае $(A \gg 1)$

$$C(A, \xi) = \sqrt{\frac{2}{A}} \ln \frac{64}{(1/A + \xi)(4\pi/A - \xi^2)} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{A\left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right) + 2\pi}, \qquad (13)$$

причем фаза $\xi = \psi_0 - \pi/2$ в момент резонанса заключена в узких пределах (рис. 1)

$$-1/A < \xi < \sqrt{4\pi/A}. \qquad (14)$$

Для большинства фаз (исключая экспоненциально малые области на границах (14)) результат прохождения резонанса не зависит от фазы. Знак ΔW противоположен знаку $\omega' \Omega_э'$.

При $A \to \infty$

$$\Delta W = -(4/\pi)\sqrt{2P/\omega'} \tag{15}$$

и не зависит от $\Omega_э'$. Это означает, что в рассматриваемом режиме нет непрерывного перехода к стационарному случаю при $\Omega_э' \to 0$. Такой переход имеет место лишь при наличии захвата. Заметим, что под стационарностью понимается в данном случае не только постоянство частоты внешнего возмущения, но и консервативность колебательной системы ($P_0 \ll P$, см. (8)).

Если колебания осциллятора и внешнее возмущение не являются гармоническими, то одновременно проходится целый ряд резонансов ($km\Omega = kl\omega$; k — любое целое положительное число). Уравнения (5) принимают в этом случае вид

$$\dot{W} = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k} P_{km,\,kl}\cos k\psi_{ml}, \quad \dot{\psi}_{ml} = m\Omega - l\omega\,. \tag{16}$$

Но стоящая справа сумма есть некоторая периодическая функция фазы ψ_{ml}. Поэтому все отличие решения (16) от решения (8) сведется к замене гармонических функций на другие периодические, т. е., по существу, к изменению числовых коэффициентов.

В настоящей заметке задача о прохождении нелинейного осциллятора через резонанс решена в первом приближении. Эффекты второго порядка: поправка к частоте, медленное изменение A, действие не учтенных в (16) резонансов могут, вообще говоря, качественно изменить решение. Так, в режиме захвата может произойти постепенный выход из резонанса, а при однократном прохождении резонанса может, наоборот, произойти захват.

Устойчивость обоих режимов по отношению к действию неучтенных факторов определяется адиабатическим изменением амплитуды фазовых колебаний после захвата. При возрастании амплитуды устойчивым является режим однократного прохождения через резонанс, при уменьшении — режим захвата. Кроме того, можно показать, что в случае отсутствия явной зависимости A от времени и при выполнении условия* $\varepsilon^2 Q^2 \ll \varepsilon P\omega' \ll (\Delta\Omega)^2$ действие перечисленных выше факторов незначительно; в частности, мала вероятность захвата при однократном прохождении через резонанс.

Подчеркнем, что наиболее интересной и важной особенностью нелинейных эффектов при медленном прохождении через резонанс ($A \gg 1$) является их независимость от начальной фазы колебаний. Это приводит, в частности, к обратимости процесса даже при наличии «размешивания» по фазе.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Г. И. Будкеру и Ю. Ф. Орлову за интересные дискуссии и полезные советы.

Поступило
19 XII 1958

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, АН УССР, 1955. [2] В. М. Волосов, ДАН, **121**, № 1, 22 (1958). [3] Ю. Ф. Орлов, ЖЭТФ, **32**, в. 2, 316 (1957). [4] В. И. Векслер, ДАН, **44**, № 9, 393 (1944). [5] E. M. McMillan, Phys. Rev., **68**, № 5—6, 143 (1945). [6] Е. М. Мороз, Кандидатская диссертация, ФИАН, 1958. [7] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958. [8] N. M. Blachman, Rev. Sci. Inst., **21**, № 11, 908 (1950). [9] Л. Л. Гольдин, Д. Г. Кошкарев, ЖЭТФ, **31**, в. 5, 803 (1956). [10] Ю. Ф. Орлов, ЖЭТФ, **32**, в. 1, 130 (1957).

* Это условие имеет простой физический смысл: частота фазовых колебаний $\sqrt{\varepsilon P\omega'}$ должна быть много больше ширины резонансной кривой εQ, но много меньше интервала между резонансами $\Delta\Omega$, равного наименьшей из частот Ω, ω.