1960 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXX, в. 5
1960 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXX, № 5

К ТЕОРИИ СКИН-ЭФФЕКТА В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

В. И. Волосов и *Б. В. Чириков*

Рассмотрим частный случай переходного режима — включение периодического магнитного поля. В простейшем одномерном случае для полупространства ($x > 0$), занятого проводником (проводимость σ, магнитная проницаемость μ), задача сводится, как известно, к уравнению (гауссова система единиц)

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1}$$

Пусть заданы граничные условия $H(0, t) = 0$ при $t < 0$ и $H(0, t) = H_0 \sin \omega t$ при $t \geqslant 0$ и начальные условия $H(x, 0) = 0$. Решение этой задачи с помощью интеграла Дюгамеля имеет вид [1]

$$\left.\begin{aligned} &H(x, t) = H_0 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \int\limits_0^\tau \sin(\tau - u)\, e^{-\frac{A}{u}} u^{-3/2} du, \\ &A = \frac{x^2}{2\Delta^2}; \quad \Delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}; \quad \tau = \omega t. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуем это выражение [1]

$$H(x, t) = H_0 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \left(\int\limits_0^\infty \sin(\tau - u)\, e^{-\frac{A}{u}} u^{-3/2} du - \int\limits_\tau^\infty \sin(\tau - u)\, e^{-\frac{A}{u}} u^{-3/2} du \right).$$

Первое слагаемое представляет решение задачи о скин-эффекте в установившемся режиме, имеющее, как известно, вид: $H_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \sin\left(\tau - \frac{x}{\Delta}\right)$. Второе слагаемое обозначим через $H_0 \sqrt{\frac{A}{\pi}} \varphi(\tau)$. Функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi''(\tau) + \varphi(\tau) = f(\tau); \quad f(\tau) = e^{-\frac{A}{\tau}} \tau^{-3/2}, \tag{3}$$

которое является уравнением вынужденных колебаний гармонического осциллятора. Физически очевидно, что если функция $f(\tau)$ мало изменяется в течение периода собственных колебаний осциллятора, в уравнении (3) можно пренебречь инерционным членом ($\varphi''(\tau)$) и тогда

$$\varphi(\tau) \simeq f(\tau). \tag{4}$$

---

[1] Аналогичный метод применялся при расчетах переходных процессов в электрических цепях [2, 3]. Решения были получены в виде рядов, сходимость которых не исследовалась и анализ решения не производился.

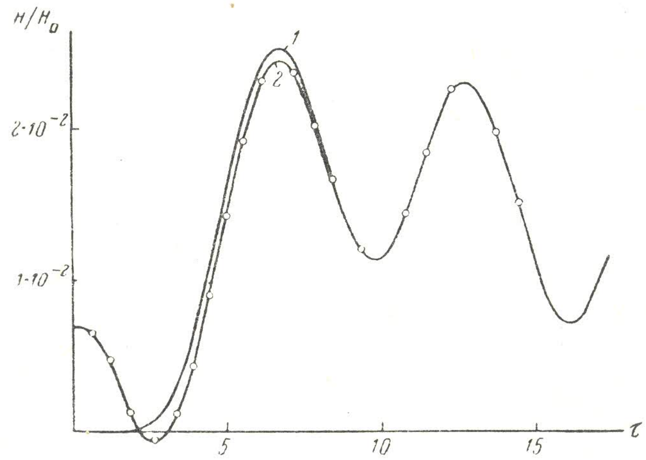
Так как период осциллятора равен 2π, то условие справедливости (4) есть $2\pi f'(\tau) \ll f(\tau)$, или при $A \gg 1$

$$\tau^2 \gg A. \tag{5}$$

С учетом (5) решение для переходного процесса принимает следующий простой вид

$$H(x, t) \simeq H_0 \sqrt{\frac{A}{\pi}} f(\tau) + H_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \sin\left(\tau - \frac{x}{\Delta}\right). \tag{6}$$

Точность этой формулы возрастает с уменьшением отношения $\frac{f'}{f} \simeq \frac{A}{\tau^2}$. Для примера на рисунке произведено сравнение точного (2)



Зависимость магнитного поля от времени на глубине $x = 5\Delta$.

1 — Результат численного интегрирования выражения (2); *2* — приближенное решение по формуле (6).

и приближенного (6) решений для $A = 12.5$. Более строгая, хотя и более грубая оценка члена $\varphi''(\tau)$ в выражении (3) дана в „Приложении".

Первое слагаемое в формуле (3), связанное с переходным процессом, имеет при заданном x максимум в момент времени $\tau = \frac{2}{3} A = \frac{x^2}{3\Delta^2}$, равный $0.46\ H_0 \left(\frac{\Delta}{x}\right)^2$. Таким образом, в отличие от установившегося режима, при котором амплитуда магнитного поля убывает с глубиной экспоненциально $\left(H \sim e^{-\frac{x}{\Delta}}\right)$, в переходном режиме максимальное значение магнитного поля убывает гораздо медленнее, всего как $\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2$.

Для граничных условий вида $H(0, t) = 0$ при $t < 0$ и $H(0, t) = H_0 \cos \omega t$ при $t \geqslant 0$ аналогичным путем получается формула

$$H(x, t) = H_0 \sqrt{\frac{A}{\pi}} f'(\tau) + H_0 e^{-\frac{x}{\Delta}} \cos\left(\tau - \frac{x}{\Delta}\right). \tag{7}$$

При включении постоянного магнитного поля H_0 переходный процесс описывается точным выражением [4]

$$H(x, t) = H_0 \left[1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{A}{\tau}}\right]. \tag{8}$$

С помощью формул (6—8) можно анализировать переходный процесс при включении любого периодического магнитного поля, разлагая его в ряд Фурье. Полагая

$$H(0,\ t)=H_0\left[a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin n\omega_0 t+b_n\cos n\omega_0 t)\right],$$

получим приближенное решение

$$H(x,\ t)=H_0 a_0\left[1-\operatorname{erf}\sqrt{\frac{A}{\tau}}\right]+H_0\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}\left[f(\tau_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}+\right.$$

$$\left.+f'(\tau_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\right]+H_{\text{уст.}};\quad A_0=\frac{x^2}{2\Delta_0^2};\quad \Delta_0=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega_0}};\quad \tau_0=\omega_0 t,$$

где $H_{\text{уст.}}$ — решение задачи о скин-эффекте в установившемся режиме.

Разумеется, изложенный метод полностью применим к аналогичным задачам из других областей, например, к задачам о теплопроводности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Оценка $\varphi''(\tau)$. Докажем предварительно лемму. Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $(a,\ b)$, тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right|\leqslant 2\,(|f_{\max\,a_1a_2}|+|f_{\max\,b_1b_2}|), \tag{9}$$

где $f_{\max\,x_1x_2}$ — максимальное значение $f(x)$ на отрезке $(x_1,\ x_2)$. Через a_1, a_2, b_1 и b_2 обозначены ближайшие точки с обеих сторон a и b, в которых $\sin x=0$; причем значки „1“ и „2“ выбраны так, что отрезки $(a_1,\ b_1)$ и $(a_2,\ b_2)$ кратны 2π.

Пусть $\sin x>0$ на $(a_1,\ a_1+\pi)$ и $f(x)\geqslant f(x+\pi)$, тогда

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x)\sin x dx=\int_{a_1}^{a_1+\pi}\sin x\,[f(x)-f(x+\pi)]\,dx+$$

$$+\int_{a_1+2\pi}^{a_1+3\pi}\sin x\,[f(x)-f(x+\pi)]\,dx+\ldots\geqslant 0, \tag{10}$$

и в то же время, так как на $(a_2,\ a_2+\pi)$ $\sin x<0$, имеем

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x)\sin x dx\leqslant 0. \tag{11}$$

Таким образом, интеграл на $(a_1,\ b_1)$ и $(a_2,\ b_2)$ имеет разные знаки. Аналогично можно показать, что это выполняется и во всех других случаях, т. е. не зависит от знака $\sin x$ и знака $f(x)-f(x+\pi)$.

Рассмотрим интегралы на отрезках $(a,\ a_1)$, $(a,\ a_2)$, $(b,\ b_1)$, $(b,\ b_2)$. Так как все отрезки $<\pi$ по определению, то

$$\left|\int_a^{a_1} f(x)\sin x\,dx\right|\leqslant|f_{\max\,a_1a_2}|\,|\cos a-\cos a_1)|\leqslant 2\,|f_{\max\,a_1a_2}|, \tag{12}$$

подобные оценки можно сделать и для остальных отрезков.

Разбивая интеграл на части и учитывая (10) и (11), имеем

$$\int_a^b f(x)\sin x\,dx - \int_a^{a_1} - \int_b^{b_1} = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\sin x dx \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$\int_a^b f(x)\sin x dx - \int_a^{a_2} - \int_b^{b_2} = \int_{a_2}^{b_2} f(x)\sin x dx \leqslant 0,$$

откуда

$$\int_a^{a_1} + \int_b^{b_1} \leqslant \int_a^b f(x)\sin x dx \leqslant \int_a^{a_2} + \int_b^{b_2}.$$

На основании (12) имеем

$$\left|\int_a^b f(x)\sin x dx\right| \leqslant 2\ (|f_{\max\limits_{a_1a_2}}| + |f_{\max\limits_{b_1b_2}}|).$$

Доказательство не изменится, если вместо $\sin x$ будет $\sin(x+a)$. С помощью выражения (9) оценим $\varphi''(\tau)$. Интегрируя дважды по частям $\varphi(\tau)$, получаем из (3) $\varphi''(\tau) = \int\limits_\tau^\infty \sin(\tau - u) f''(\tau)\,du$. Разбиваем $f''(\tau)$ на монотонные участки и обозначаем через $f''_{\max\limits_n}$ значение f'' в n-м максимуме. Учитывая, что $f''_{\max\limits_1} > f''_{\max\limits_2} > f''_{\max\limits_3}$ и что $f'' \to 0$ при $\tau \to \infty$, имеем

при $\tau < 0.142\,A$

$$\varphi'' < 6f''_{\max\limits_1} + 4f''_{\max\limits_2} + 4f''_{\max\limits_3} = \frac{110}{A^{7/2}},$$

$0.142\,A < \tau < 0.357\,A$

$$\varphi'' < 2f''_{\max\limits_1} + 4f''_{\max\limits_2} + 4f''_{\max\limits_3} = \frac{51.4}{A^{7/2}},$$

$0.357\,A < \tau < 1.50\,A$

$$\varphi'' < 2f''_{\max\limits_2} + 4f''_{\max\limits_3} = \frac{11.2}{A^{7/2}},$$

$1.50\,A < \tau < \infty$

$$\varphi'' < 2f''(\tau) = 2f(\tau)\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{A^2}{\tau^2} - 5\frac{A}{\tau} + \frac{15}{4}\right).$$

Оценим отношение $\frac{\varphi''}{f}$, взяв минимальное значение f на тех же отрезках. Для $0.142\,A < \tau < 0.357\,A$ имеем $\frac{\varphi''}{f} < \frac{3130}{A^2}$; для $0.357\,A < \tau < 1.50\,A$ — $\frac{\varphi''}{f} < \frac{40.5}{A^2}$ и для $1.50\,A < \tau < \infty$ — $\frac{\varphi''}{f} < \frac{7.5}{\tau^2}$ для любого A.

Литература

[1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М.—Л., 1951. — [2] К. А. Круг. Переходные процессы в линейных электрических цепях. М.—Л., стр. 193, 1948. — [3] М. Ю. Юрьев. Устанавливающийся режим в четырехполюсниках. ОНТИ, 1936. — [4] В. К. Аркадьев. Электромагнитные процессы в металлах, часть II, ОНТИ, 1936.

Поступило в Редакцию
28 ноября 1957 г.