Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 39 *1960* *Вып. 1(7)*

О МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

В. И. Карпман

Устанавливается связь между определениями энергий фермиевских возбуждений в теории ферми-жидкости Ландау и квантовой теории многих частиц при температуре, равной нулю.

В настоящее время уже имеется ряд работ [1-4], в которых обсуждается микроскопический вывод основных предположений общей теории ферми-жидкости Ландау [5]. Наиболее существенный результат получил Ландау (см. [3]), установив точный микроскопический смысл функции $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, играющей основную роль в теории ферми-жидкости и определяющей вариацию энергии квазичастиц ε_p при бесконечно малом изменении их функции распределения $n(p)$

$$\delta\varepsilon_p = \mathrm{Sp}_\sigma \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, \delta n(\mathbf{p}')\, d\tau'. \tag{1}$$

В отношении энергии квазичастиц нужно иметь в виду следующее. В теории ферми-жидкости ε_p определяется как вариационная производная полной энергии системы по функции распределения $n(p)$

$$\varepsilon_p = \delta E / \delta n(p). \tag{2}$$

С другой стороны, в общей теории квантовых систем многих частиц доказывается [6,7], что энергии и затухания фермиевских возбуждений системы (квазичастиц, дырок) при импульсах, близких к граничному, определяются полюсами одночастичной функции Грина в импульсном представлении

$$G(p, \varepsilon) = [\varepsilon_p^0 - \varepsilon - \Sigma(p, \varepsilon)]^{-1}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_p^0 = p^2/2m,$$

продолженной в нижнюю (для квазичастиц) или в верхнюю (для дырок) полуплоскость. Отсюда получаем следующие уравнения для энергии ε_p и затухания Γ_p квазичастицы:

$$\varepsilon_p^0 - \varepsilon_p - \Sigma_0(p, \varepsilon) = 0; \tag{4}$$

$$\Gamma_p = \Sigma_1(p, \varepsilon_p) \,/\, [1 + (\partial\Sigma_0/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_p}], \tag{4a}$$

где $\Sigma_0 = \mathrm{Re}\,\Sigma$, $\Sigma_1 = \mathrm{Im}\,\Sigma$, а Σ — компактная часть собственной энергии частицы. Очевидно, следует ожидать, что величина ε_p, определяемая соотношением (2), должна совпадать с корнем уравнения (4). Целью настоящей заметки является доказательство этого утверждения.

Сделаем предварительно некоторые замечания. Как показано в [6,8], мнимая часть функции Грина, а следовательно, и затухание меняют знак при $\varepsilon = \mu$, где $\mu = \partial E/\partial N$ — химический потенциал системы. В дополнение к этой теореме, носящей совершенно общий характер, предположим, что мнимая часть собственной энергии непрерывна при $\varepsilon = \mu$, т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to\mu} \Sigma_1(p, \varepsilon) = 0 \tag{5}$$

(заметим, что это предположение положено в основу выводов (4), (4а)).

Рассмотрим теперь уравнение $\varepsilon_p = \mu$ (относительно p), которое, согласно (4), можно также записать в виде

$$\varepsilon_p^0 - \mu - \Sigma(p, \mu) = 0. \tag{6}$$

Корень этого уравнения (p_0) является граничным импульсом для квазичастиц $\varepsilon(p_0) = \mu$.

Используя разложения по степеням константы взаимодействия, Гугенгольц и Ван Хове [9] (см. также [7]) показали, что p_0 совпадает с граничным импульсом Ферми для идеального газа:

$$p_0 = (3\pi^2 N)^{1/3} \quad (\hbar = 1), \tag{7}$$

где N — число частиц в системе, объем которой принят за единицу. В тех случаях, когда теория возмущений неприменима, эта теорема может оказаться несправедливой. Например, для систем, обладающих сверхпроводимостью, уравнение (6) вообще не имеет вещественных решений 1)[10]. В настоящей работе предполагается применимость теории возмущений. Мы предполагаем также, что силы, действующие между частицами, являются парными.

Приступим теперь к квантовомеханическому определению $\delta E/\delta n(p)$ (считаем $T = 0$), исходя из сделанных выше предположений. При этом мы определенным образом используем идею, примененную Клейном и Прэнджем [7], для доказательства упоминавшейся выше теоремы Гугенгольца — Ван Хове.

Рассмотрим какую-либо диаграмму, дающую вклад в полную энергию системы, например одну из представленных на рисунке. Пунктирной линии отвечает выражение

$$iu(k) = i\int U(x) \exp(ikx)\, d^4x, \quad U(x) = v(\mathbf{x})\,\delta(x_0),$$

где $v(\mathbf{x})$ — потенциал взаимодействия между частицами; вершине соответствует δ-функция, выражающая закон сохранения 4-импульса, сплошной линии — функция Грина невзаимодействующих частиц

$$G_0(\mathbf{p}, \varepsilon) = (\varepsilon_p^0 - \varepsilon - i\delta)^{-1}, \tag{8}$$

$$\delta \to +0 \text{ при } p > p_0; \quad \delta \to -0 \text{ при } p < p_0.$$

Чтобы получить энергию системы как функционал чисел заполнения квазичастиц, представим (8) в виде

$$G(p, \varepsilon) = P\frac{1}{\varepsilon_p^0 - \varepsilon} + i\pi(1 - 2n(p))\,\delta(\varepsilon_p^0 - \varepsilon), \tag{9}$$

где $n(p)$ — числа заполнения невзаимодействующих частиц при $T = 0$

$$n(p) = \begin{cases} 1 & (p < p_0) \\ 0 & (p > p_0) \end{cases}. \tag{10}$$

Для дальнейшего важно, что числа заполнения невзаимодействующих частиц совпадают с числами заполнения квазичастиц в основном состоянии и в состояниях, бесконечно мало отличающихся от основного.

Выражение для полной энергии будет иметь вид

$$E = E_0 - S(\Omega), \tag{11}$$

1) В связи с этим отметим, что из результатов, полученных Ландау без помощи теории возмущений (см. примечание 3 [4]), вытекает, что если (6) имеет вещественный корень, то он совпадает с (7).

где E_0 — энергия невзаимодействующих фермионов, которую можно представить в виде

$$E_0 = \int \varepsilon_p^0 n(p)\, d^3p; \quad d^3p = dp_x\, dp_y\, dp_z / (2\pi)^3, \tag{12}$$

а $S(\Omega)$ — сумма вкладов от всех связных диаграмм. Величина Ω, отвечающая диаграмме n-го порядка, имеет следующий вид:

$$\Omega = \alpha(-1)^l (-i)^n \int d^4k_1 \ldots \int d^4k_n \int d^4q_1 \ldots \int d^4q_{2n} \prod_{j=1}^{2n-1} \delta_j \times$$
$$\times u(k_1) \ldots u(k_n)\, G_0(q_1) \ldots G_0(q_{2n}), \tag{13}$$

где $d^4q = dq_x\, dq_y\, dq_z\, dq_0 / (2\pi)^4$, l — число замкнутых петель, δ_j — δ-функция, стоящая в одной из вершин, а множитель α может принимать одно из двух значений: 1 или $^1/_2$ (см. ниже).

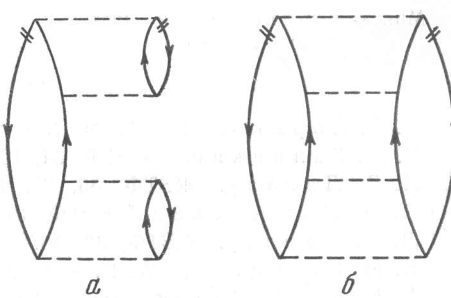
Каждая функция Грина $G_0(q) = G_0(\mathbf{q}, q_0)$ в (13) зависит от чисел заполнения $n(\mathbf{q})$. Поэтому Ω является функционалом от $n(\mathbf{q})$. Вычисляя $\delta\Omega/\delta n(\mathbf{q})$, получим $2n$ членов, причем в каждом члене варьируется какая-либо одна из функций $G_0(q_i)$. В остальных величинах $n(\mathbf{q})$ равны своим значениям при $T = 0$ (см. (10)). Таким образом, каждое из этих $2n$ слагаемых имеет вид

$$i \frac{\delta}{\delta n(\mathbf{p})} \int G_0(\mathbf{q}, q_0) \Sigma_R^{(i)}(\mathbf{q}, q_0)\, d^4q, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{14}$$

где при варьировании нужно считать зависящей от $n(\mathbf{q})$ лишь функцию G_0. Подставляя сюда выражение G_0 из (9) и производя варьирование, получим вместо (14)

$$-\int \Sigma_R^{(i)}(\mathbf{p}, \varepsilon)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_p^0)\, d\varepsilon = -\Sigma_R^{(i)}(\mathbf{p}, \varepsilon_p^0). \tag{15}$$

Функция $\Sigma_R^{(i)}(\mathbf{p}, \varepsilon)$ согласно своему определению, содержащемуся в (14), изображается диаграммой, которая получается при вычеркивании одной из сплошных линий в диаграмме полной энергии (см. рисунок). Следовательно, $\Sigma_R^{(i)}$ соответствует одной из диаграмм собственной энергии частицы (вообще говоря, некомпактной).



а *б*

Заметим теперь, что в некоторых диаграммах полной энергии при вычеркивании двух различных линий может получиться одна и та же диаграмма собственной энергии (см. рисунок, *б*). Это обстоятельство компенсируется множителем α в (13), который, как показано Клейном и Прэнджем [7], для таких диаграмм равен $^1/_2$, а в остальных случаях — единице. В итоге можно сказать, что при варьировании $S(\Omega)$ получается совокупность всех возможных диаграмм собственной энергии частицы, причем каждая диаграмма учитывается только один раз, т. е.

$$\delta S(\Omega) / \delta n_p = -\Sigma_R(p, \varepsilon_p^0), \tag{16}$$

где индекс R указывает на то, что в (16) входят как компактные, так и некомпактные диаграммы. Учитывая (11), (12) и (16), получим

$$\delta E / \delta n(p) = \varepsilon_p^0 - \Sigma_R(p, \varepsilon_p^0). \tag{17}$$

Для Σ_R можно написать разложение

$$\Sigma_R(p, \varepsilon) = \Sigma + \Sigma G_0 \Sigma + \Sigma G_0 \Sigma G_0 \Sigma + \ldots, \tag{18}$$

где $\Sigma(p, \varepsilon)$ — компактная часть собственной энергии частицы. Правая часть (18) имеет особенность при $\varepsilon = \varepsilon_p^0$. Тем не менее величине $\Sigma_R(p, \varepsilon_p^0)$ можно приписать определенное значение, если воспользоваться методом, изложенным в приложении к работе Клейна и Прэнджа [7].

Положим сначала $p = p_0$. В этом случае мнимая часть собственной энергии (а следовательно, и затухание) равна нулю. Из (15) вытекает, что $\Sigma_R(p_0, \varepsilon)$, при $\varepsilon = \varepsilon_{p_0}^0$ следует понимать в смысле [2)]

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_{p_0}^0} \Sigma_R(p_0, \varepsilon) = \int \Sigma_R(p_0, \varepsilon)\, \delta(\varepsilon - \varepsilon_{p_0}^0)\, d\varepsilon. \tag{19}$$

Как показано в приложении к работе [7], из (18) и (19) вытекает, что

$$\Sigma_R(p_0, \varepsilon_{p_0}^0) = \Sigma(p_0, \varepsilon_{p_0}), \tag{20}$$

где ε_{p_0} — энергия квазичастицы с импульсом, равным граничному импульсу p_0. Следовательно,

$$\delta E / \delta n(p_0) = \varepsilon_{p_0}, \tag{21}$$

где ε_{p_0} удовлетворяет уравнению (4), что и требовалось доказать.

Переходя к случаю $p \neq p_0$, заметим, что здесь затухание не равно нулю. Понятие энергии квазичастицы имеет смысл только тогда, когда затухание, а следовательно, и мнимая часть собственной энергии достаточно малы и ими можно пренебречь. Согласно нашему предположению о непрерывности $\operatorname{Im}\Sigma$ при $\varepsilon \sim \mu$, это имеет место в случае, если p достаточно близко к p_0. Пренебрегая мнимой частью Σ при этих p и повторяя рассуждения, приведшие к (20) и (21), получаем

$$\delta E / \delta n(p) \approx \varepsilon_p,$$

где ε_p удовлетворяет уравнению (4), а p достаточно близко к p_0. При $p = p_0$ это равенство становится точным.

Автор выражает глубокую благодарность Е. С. Фрадкину, Л. П. Горькову и Д. А. Киржницу за ценные дискуссии и критические замечания.

Минский педагогический институт
имени Горького

Поступила в редакцию
26 февраля 1960 г.

Литература

[1] А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ЖЭТФ, **33**, 1154, 1957.
[2] В. М. Галицкий. ЖЭТФ, **34**, 151, 1958.
[3] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **35**, 97, 1958.
[4] Л. П. Питаевский. ЖЭТФ, **37**, 1794, 1959.
[5] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **30**, 1058, 1956; **32**, 99, 1957.
[6] В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **34**, 139, 1958.
[7] A. Klein, R. Prange. Phys. Rev., **112**, 994, 1958; Пробл. совр. физ., **3**, 66, 1959.
[8] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **34**, 262, 1958.
[9] N. M. Hugenholtz, L. Van Hove. Physica, **24**, 363, 1958.
[10] Л. П. Горьков. ЖЭТФ, **34**, 734, 1958.

ON THE MICROSCOPIC TREORY OF THE FERMI FLUID

V. I. Karpman

A relation is established between the Fermi excitation energies predicted by the Landau theory of the Fermi fluid and by many-particle quantum theory at a temperature of zero.

---

2) Ввиду сингулярности $\Sigma_R(p_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon = \varepsilon_{p_0}^0$, формула (19) отнюдь не вытекает тривиально из определения δ-функции.