ПМТФ, № 6, 1961

О ПОВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ СОСТОЯНИЙ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СКОРОСТЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев

(Новосибирск)

Известно, что плазма, находящаяся в магнитном поле, может обладать анизотропным распределением по скоростям. Одним из механизмов, приводящим к такой анизотропии, является изменение магнитного поля с частотой, большей частоты соударений, но меньшей ларморовской [1]. Вопросы устойчивости анизотропных состояний в магнитном поле исследовались в [2,5]. В [4] показана возможность неустойчивости нерелятивистской плазмы типа «колебаний» с раскачкой, возникающая из-за циклотронного резонанса даже при слабой анизотропии. При этом вследствие эффекта Допплера частицы из «хвоста» распределения по скоростям могут передавать энергию низкочастотным колебаниям.

В предлагаемой работе рассматривается циклотронная неустойчивость анизотропной релятивистской плазмы (п. 1). Далее исследуется анизотропия, возникающая вследствие излучения электронов в магнитном поле, если характерное время излучения много меньше времени между столкновениями (п. 2). Обсуждается поведение найденного распределения электронов при циклотронном резонансе.

1. Релятивистское кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ для процессов с частотой, много большей частоты соударений, запишем в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left\{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})]\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — волновые поля, $\mathbf{H}_0$ — постоянное магнитное поле, $\mathbf{p}$ — импульс электрона.

Считая $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ малыми, будем искать решение (1.1) в виде

$$f = f_0 + f_1$$

где f_1 — малая поправка, а $f_0 = f_0(\sqrt{1 + u_\alpha^2},\ (u_\alpha H_{0\alpha})^2)$ — решение уравнения [1]

$$[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (1.2)$$

Функцию f_0 можно записать в релятивистски инвариантной форме

$$f_0 = f_0(U_i u_i,\ (\varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm})^2)$$

Здесь u_i и U_i — скорости соответственно частицы и усредненного движения (в рассматриваемой системе отсчета $U_\alpha = 0$), F_{lm} — тензор электромагнитного поля, связанного с $\mathbf{H}_0$, ε_{iklm} — антисимметричный единичный тензор четвертого ранга.

Рассматривая волну в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$ и полагая

$$f_1 = \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\,\Phi(\mathbf{p}) \qquad (1.3)$$

получаем для Φ уравнение

$$i(\mathbf{kv} - \omega)\Phi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}} + eE_\alpha^\circ\left\{\left(1 - \frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial p_\alpha} + \frac{v_\alpha}{\omega}\mathbf{k}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\right\} = 0$$

[1] Греческие индексы пробегают три значения, а латинские — четыре.

Переходя к цилиндрическим координатам в пространстве импульсов ($p_\parallel$, $p_\perp$, φ) с осью z вдоль $\mathbf{H}_0$ и ограничиваясь случаем $\mathbf{k}\parallel\mathbf{H}_0$, получаем

$$\Phi(\mathbf{p}) = -\frac{e}{\omega_H}\int_0^\infty e^{ia\xi}\,\mathbf{E}^\circ\mathbf{L}\,d\xi \tag{1.4}$$

Здесь

$$\omega_H = \frac{\Omega}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \Omega = \left|\frac{eH_0}{mc}\right|, \qquad u^2 \equiv u_\alpha^2, \qquad a = \frac{\omega - kv_\parallel}{\omega_H}$$

$$L_x = 2p_\perp \cos(\varphi - \xi)\left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} + \frac{kv_\parallel}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2}\right)\right]$$

$$L_y = 2p_\perp \sin(\varphi - \xi)\left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} + \frac{kv_\parallel}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2}\right)\right] \tag{1.5}$$

$$L_z = 2p_\parallel \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}, \qquad \mathbf{p}_\perp \perp \mathbf{H}_0, \ \mathbf{p}_\parallel \parallel \mathbf{H}_0$$

В дальнейшем величину ω_H будем называть ларморовской частотой.

Учитывая (1.3) и (1.4), получаем для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, связанного с электронными колебаниями

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i\frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega\Omega}\int d\mathbf{p}\, p_\alpha \int_0^\infty d\xi\, e^{ia\xi} L_\beta \tag{1.6}$$

где n_0 — плотность электронов. Выражение для $\varepsilon_{\alpha\beta}$ релятивистской плазмы с начальной максвелловской функцией распределения получено в [6]. Выполняя в (1.6) интегрирование по ξ и проделывая преобразования, аналогичные [4], получаем

$$\varepsilon_{xx} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega}\int d\mathbf{p}\, p_\perp^2 \sum_{n=1,\,-1}\left(-i\pi F_1\delta_+ + \frac{1}{\omega}F_2\right), \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx}, \tag{1.7}$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -\frac{i}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega}\int d\mathbf{p}\, p_\perp^2 \sum_{n=1,\,-1} n\left(-i\pi F_1\delta_+ + \frac{1}{\omega}F_2\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - i\cdot 2\frac{\omega_p^2}{\omega}\int d\mathbf{p}\, p_\parallel^2 \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\delta_+(\gamma(\omega - kv_\parallel)), \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

Здесь

$$F_1 = \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2} + \frac{n\omega_H}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right), \qquad F_2 = \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}, \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m} \tag{1.8}$$

$$\delta_+ = \delta_+((\omega - kv_\parallel)\gamma - n\Omega), \qquad \delta_+(x) = \frac{i}{\pi}P\frac{1}{x} + \delta(x), \qquad \gamma = \sqrt{1+u^2}$$

Легко видеть, что полученные компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в нерелятивистском пределе совпадают с соответствующими выражениями из [4], если в последних положить $\mathbf{k}\parallel\mathbf{H}_0$.

Как и в нерелятивистском случае, неустойчивость может возникнуть при перемене знака антиэрмитовой части $\varepsilon_{\alpha\beta}$, т. е. при перемене знака F_1. Последнее возможно, если

$$\omega < \omega_H\left(1 - \frac{\partial f_0/\partial p_\perp^2}{\partial f_0/\partial p_\parallel^2}\right) \qquad \left(n = 1, \left|\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2}\right| < \left|\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right|\right)$$

$$\omega < \omega_H\left(\frac{\partial f_0/\partial p_\perp^2}{\partial f_0/\partial p_\parallel^2} - 1\right) \qquad \left(n = -1, \left|\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2}\right| > \left|\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right|\right) \tag{1.9}$$

Отметим, что в отличие от нерелятивистского случая, где условия (1.9) могут не зависеть от скоростей (как, например, для максвелловского распределения с двумя температурами), в релятивистском случае условия (1.9) не выполняются для всего интервала скоростей (хотя бы из-за зависимости ω_H от энергии). Поэтому окончательно вопрос об устойчивости может быть решен после исследования интеграла в антиэрмитовской части $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

При выполнении первых двух уравнений (1.9) для электронных колебаний неустойчивость связана с раскачкой необыкновенной волны. Дисперсионное уравнение для необыкновенной волны имеет вид

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega}\int d\mathbf{p}\, p_\perp^2 \left\{ - i\pi\delta_+ \left((\omega - kv_\parallel)\gamma - \Omega\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2} + \frac{\omega_H}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right)\right] + \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right)\right\} \tag{1.10}$$

В качестве f_0 возьмем

$$f_0 = A \exp\left\{-\sigma\left(\sqrt{1 + p^2/(m^2c^2)} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma mc}p_\parallel\right)^2}\right)\right\} \tag{1.11}$$

удовлетворяющую (1.2). Здесь σ, σ_1 — параметры распределения, A — нормировочный множитель. Легко убедиться, что нерелятивистским пределом (1.11) является максвелловское распределение с двумя температурами $T_\parallel$ и $T_\perp$, причем

$$\sigma = \frac{mc^2}{T_\perp}, \quad \sigma_1 = \sigma\left(\frac{T_\perp - T_\parallel}{T_\perp}\right)^{1/2} \qquad (T_\perp > T_\parallel) \tag{1.12}$$

Учитывая, что при слабой анизотропии неустойчивость возможна при $\omega \ll \omega_H$ и пренебрегая анизотропией при вычислении $\operatorname{Re} N^2$, имеем

$$\operatorname{Re} N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega}(mc)^3 A\pi\frac{2}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} du_\parallel\left(\sqrt{1 + u_\parallel^2} + \frac{1}{\sigma}\right)\frac{\exp\left(-\sigma\sqrt{1 + u_\parallel^2}\right)}{\Omega - kcu_\parallel}$$

Ограничиваясь случаем

$$\Omega \gg kc\sqrt{\overline{u_\parallel^2}} \tag{1.13}$$

получаем известную формулу

$$\operatorname{Re} N^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega\Omega} \tag{1.14}$$

Перейдем теперь к вычислению $\operatorname{Im} N^2$. Для этого в аргументе δ-функции пренебрежем ω по сравнению с $kv_\parallel$. Согласно (1.14) точность такого пренебрежения определяется неравенством $\omega_p^2 \gg \omega\Omega$. С учетом сказанного получаем

$$\operatorname{Im} N^2 = -\pi\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{m}{k}\int d\mathbf{p}\, p_\perp^2\left\{\frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2} + \frac{\omega_H}{\omega}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_\perp^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_\parallel^2}\right)\right\}\delta\left(p_\parallel + \frac{m}{k}\Omega\right)$$

Выполняя простое интегрирование, находим

$$\operatorname{Im} N^2 = -2\pi^2 A\frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{(mc)^3}{kc\sigma}\left\{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2\left[\frac{\Omega}{\omega}\sqrt{1 + \varkappa^2}\left(1 + \frac{1}{\sigma\sqrt{1 + \varkappa^2}}\right) - \right.\right.$$
$$\left. - (1 + \varkappa^2)\left(1 + \frac{3}{\sigma\sqrt{1 + \varkappa^2}} + \frac{3}{\sigma^2(1 + \varkappa^2)}\right)\right] \Big/ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1\varkappa}{\sigma}\right)^2} -$$
$$\left. - \sqrt{1 + \varkappa^2}\left(1 + \frac{1}{\sigma\sqrt{1 + \varkappa^2}}\right)\right\}\exp\left\{-\sigma\left(\sqrt{1 + \varkappa^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1\varkappa}{\sigma}\right)^2}\right)\right\} \tag{1.15}$$

где $\varkappa = \Omega/(kc)$. Выражение (1.14) в нерелятивистском пределе при $\Omega \ll kc$ совпадает с соответствующим выражением из [4]. При помощи

(1.15) можно найти область частот, при которых возможна неустойчивость. Из простых соображений следует, что неустойчивость появится, если выражение в фигурных скобках (1.15) положительно. Ввиду громоздкости вычислений ограничимся ультрарелятивистским случаем ($\sigma \to 0$). Нетрудно убедиться, что при $\sigma \to 0$ $\overline{u_{\parallel}{}^2} \approx 1/\sigma^2$. Сохраняя неравенство (1.13), получим

$$\varkappa\sigma \gg 1 \tag{1.16}$$

Используя формулу для тензора энергии — импульса

$$T_{ik} = imc^2 \int u_i \frac{u_k}{u_4} f_0 \, d\mathbf{p}$$

и вычисляя давления $P_{\perp}$ и $P_{\parallel}$ при слабой анизотропии ($P_{\perp} \approx P_{\parallel} \equiv P$), убеждаемся в справедливости формулы

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 = \frac{\Delta P}{P} \frac{K_2(\sigma)}{K_3(\sigma)} \qquad (\Delta P = P_{\perp} - P_{\parallel}) \tag{1.17}$$

где $K_\mu(\sigma)$ — функция Макдональда соответствующего индекса. Из (1.17) в ультрарелятивистском случае имеем

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \approx \sigma \frac{\Delta P}{P} \tag{1.18}$$

что совместно с (1.16) дает при фиксированном $\Delta P / P$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} \varkappa \gg 1, \qquad \sigma \to 0 \tag{1.19}$$

Используя (1.14), (1.16), (1.18) находим из (1.15) искомое условие неустойчивости

$$\omega < \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \frac{\omega_p{}^2}{\Omega} \Bigg/ \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^2 \tag{1.20}$$

Отметим, что в нерелятивистском случае условие неустойчивости имеет вид

$$\omega < \Omega \frac{\Delta P}{P} \tag{1.21}$$

Таким образом, область частот, при которых наступает неустойчивость, отличается в ультрарелятивистском случае от нерелятивистского на фактор $\sigma(\omega_p/\Omega)^2$ (отметим, что в интересующем нас случае, $\omega_p \ll \Omega$). Следует помнить, однако, что область применимости (1.20) определяется предположениями, сделанными при вычислении $\operatorname{Im} N^2$ и $\operatorname{Re} N^2$.

2. При изучении устойчивости релятивистской плазмы роль излучения электронов в магнитном поле может оказаться существенной. Однако некоторые особенности влияния излучения на поведение функции распределения электронов можно уже представить, рассматривая нерелятивистскую плазму. Для характерных времен рассеяния и излучения, рассчитываемых соответственно по формулам

$$\tau^- = \frac{\sqrt{m}\, \varepsilon_e^{3/2}}{\pi \sqrt{2}\,(e^2 Z)^2 n_i} \frac{1}{\lambda}, \qquad \tau^* = \frac{3}{2} \frac{m^3 c^5}{e^4 H_0^2} \tag{2.1}$$

имеем при плотности ионов $n_i \approx 10^{10}$ *см*$^{-3}$, энергии электронов $\varepsilon_e \approx 20$ keV, для $H_0 \approx 10^5$ Oe и малых зарядах ионов

$$\tau^- \gg \tau^*$$

(при рассматриваемых температурах кулоновский логарифм $\lambda \approx 20$). Это дает возможность рассмотреть для функции распределения электронов задачу без учета столкновений.

Для функции распределения однородной плазмы в однородном магнитном поле имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{F}^* f)+\frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=0 \qquad \left(\mathbf{F}^*=\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}[\mathbf{H}_0[\mathbf{H}_0\mathbf{v}]]\right) \tag{2.2}$$

При начальном максвелловском распределении электронов по скоростям с температурой T и плотностью n_0

$$f(0, \mathbf{p})=n_0(2\pi mT)^{-3/2}\exp\left\{-\frac{m}{2T}(v_\perp^2+v_\parallel^2)\right\} \tag{2.3}$$

учитывая, что сила торможения излучением меняет лишь величину $v_\perp$, а функция распределения будет аксиально симметричной, имеем вместо (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial t}-Kv_\perp^2\frac{\partial f}{\partial v_\perp^2}-Kf=0 \qquad \left(K=\frac{4}{3}\frac{e^4H_0^2}{m^3c^5}\right) \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$dt=-\frac{d(v_\perp^2)}{Kv_\perp^2}=\frac{d(v_\parallel^2)}{0}=\frac{df}{Kf}$$

решением которой, удовлетворяющим (2.3), будет

$$f(t, p_\perp^2, p_\parallel^2)=n_0(2\pi mT)^{-3/2}\exp\left\{Kt-\frac{m}{2T}(v_\parallel^2+v_\perp^2e^{Kt})\right\} \tag{2.5}$$

Решение (2.7) означает появление анизотропного «максвелла» с

$$T_\parallel=T, \qquad T_\perp=T\exp(-Kt) \tag{2.6}$$

Согласно [4] при $T_\perp<T_\parallel$ неустойчивости при электронных колебаниях не возникает. Это связано с тем, что при указанной анизотропии раскачку колебаний могла бы вызвать обыкновенная волна; однако для нее не выполняются условия циклотронного резонанса.

Рассмотрим падение волны на плазму, для которой $\omega\tau^*\gg 1$. Возникающую под действием волны плотность тока электронов

$$\mathbf{j}(t, t_0; \mathbf{r})=\theta(t-t_0)e\int d\mathbf{p}\,\mathbf{v}f^{(1)}\exp\{i(\mathbf{kr}-\omega t)\} \qquad \left(\theta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0\\ 0, & t<t_0\end{cases}\right)$$

где $f^{(1)}=f^{(1)}(t_0, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — малая поправка к функции распределения (2.5), взятой в момент t_0 (t_0 равно промежутку времени от момента включения магнитного поля до момента падения волны на плазму).

Отметим, что при рассматриваемой анизотропии необыкновенная волна при $\omega<\Omega$ затухает с декрементом, равным

$$\operatorname{Im}N^2=\sqrt{\frac{\pi m}{2T_\parallel}}\frac{\omega_p^2}{\omega k}\left\{e^{-Kt_0}+\frac{\Omega}{\omega}(1-e^{-Kt_0})\right\}\exp\left(-\frac{m\Omega^2}{2k^2T_\parallel}\right)$$

Поступила 26 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Будкер Г. И. Бетатронный метод разогрева плазмы до высоких температур. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 1, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 122.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О квазигидродинамическом описании разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 268.
3. Веденов А. А., Сагдеев Р. З. О некоторых свойствах плазмы с анизотропным распределением скоростей ионов в магнитном поле. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР 1958, стр. 278.
4. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д. О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. ЖЭТФ, 1960, 39, 181.
5. Киценко А. Б., Степанов К. Н. О циклотронной неустойчивости в плазме. ЖТФ, 1961, т. 31, 176.
6. Трубников Б. А. Электромагнитные волны в релятивистской плазме при наличии магнитного поля. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 3, Изд-во АН СССР, 1958, 104.