

О ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Р. З. Сагдеев

Исследована структура фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в „холодной“ плазме в условиях, когда длина свободного пробега велика. Поведение величин, характеризующих плазму и поле, внутри фронта ударной волны носит осцилляторный характер. Ширина фронта при числе Маха, меньшем 2, определяется столкновениями между ионами и электронами, но может быть значительно меньше длины свободного пробега (в экстремальном случае в $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$ раз; m_e и m_i — массы электрона и иона). При числе Маха, большем 2, возникает явление, аналогичное „буре“ на поверхности тяжелой жидкости. Ширина фронта перестает зависеть от столкновений. Описаны возникающие при этом плазменные неустойчивости.

Как известно, толщина фронта слабой ударной волны в обычных газах значительно превышает длину свободного пробега. Это обстоятельство позволяет для исследования структуры фронта применять уравнения газодинамики с учетом диссипативных эффектов. В случае разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, когда длина свободного пробега значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов, формальное газодинамическое описание применимо и (для движений поперек силовых линий) внутри пространственных областей, меньших свободного пробега [1]. Необходимо только, чтобы все величины мало менялись на расстоянии порядка ларморовского радиуса.

Рассматривая структуру фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, будем считать, что всюду внутри фронта выполнено условие малости ларморовского радиуса по сравнению с любым характерным размером. Для этого необходимо выполнение условия малости амплитуды волны и малости давления плазмы по сравнению с давлением магнитного поля $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ (p — давление плазмы, H — напряженность магнитного поля). Необратимая диссипация обеспечивается вязкостью, теплопроводностью, гирорелаксационным эффектом и джоулевым нагреванием. Однако вследствие малости ларморовского радиуса первые два процесса несущественны, а гирорелаксационное затухание мало при $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$. Учет джоулева нагрева в сущности эквивалентен учету трения электронов об ионы, связанного со столкновениями.

Наша задача заключается в том, чтобы составить систему дифференциальных уравнений для величин, характеризующих плазму и самосогласованные электромагнитные поля внутри фронта ударной волны, и исследовать ее. Введем систему координат, в которой фронт волны покоится; магнитное поле направим по оси z ; zy пусть является плоскостью фронта. Электрический ток будет переноситься электронами в направлении y (рис. 1).

Инерция электронов в этом направлении будет существенно влиять на структуру фронта. Наконец, для простоты примем, что внутри фронта выполняется условие квазинейтральности $\frac{n_i - n_e}{n_{i,e}} \ll 1$, где $n_{i,e}$ — плотность числа ионов (электронов). Критерий выполнимости этого условия будет ясен ниже.

В набор величин, определяющих плазму и поля, входят: n, H, v — скорость плазмы в направлении распространения волны; v_y — скорость электронов, переносящих ток; E_y — напряженность электрического поля вдоль оси y (поле вдоль оси x не входит в уравнения из-за квазинейтральности).

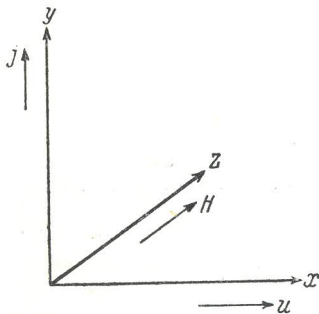


Рис. 1. Система координат, связанная с волной.

Для этих шести неизвестных имеется шесть уравнений: 1) уравнение сохранения потока частиц; 2) уравнение сохранения потока импульса; 3) сохранение потока энергии; 4) уравнение движения электронов в направлении переноса электрического тока — по оси y ; 5) и 6) уравнения Максвелла для соответствующих компонентов роторов E и H . Исходную систему шести уравнений после несложных преобразований можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка для одной из переменных, например H .

Однако, поскольку вся схема газодинамического приближения справедлива лишь для слабых ударных волн, можно с самого начала упростить уравнения. Действительно, в слабой волне, распространяющейся по холодной плазме, перепад давления плазмы будет величиной 3-го порядка малости по сравнению с перепадом магнитного поля $\frac{p}{H_0^2} \sim \frac{(H - H_0)^3}{H_0^3}$ [в этом легко убедиться с помощью разложения уравнений адиабаты Гюгонио по $(H - H_0)$]. Тогда из уравнения сохранения потока импульса скорость плазмы v непосредственно выражается через H . Нам теперь нет надобности пользоваться уравнением сохранения потока энергии, так как в остальные уравнения p явно не входит (исходная система уравнений расщепляется). Выпишем эти уравнения с учетом сделанных приближений

$$\frac{d}{dx}(nv) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{m_i n v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0, \quad (2)$$

$$m_e n v \frac{dv_y}{dx} = -enE_y + \frac{e}{c} n v H - \nu m_e n v_y, \quad (3)$$

$$\frac{dE_y}{dx} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{4\pi}{c} n e v_y. \quad (5)$$

Последний член в правой части уравнения (3) соответствует силе трения электронного газа об ионный (ν — средняя частота столкновений между электроном и ионом, равная $n \langle v_e \sigma \rangle$, где n — плотность числа ионов, σ — сечение столкновения и v_e — относительная скорость электрон—ион; в достаточно слабой ударной волне ν можно считать приблизительно постоянным внутри фронта); $m_{i,e}$ — масса иона (электрона).

После выполнения процедуры исключения всех переменных, кроме H , получаем следующее дифференциальное уравнение для определения H

$$-a^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H_0 - H + H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 m_i u^2} + \frac{a^2}{u} \nu \frac{dH}{dx}. \quad (6)$$

Здесь H_0 — магнитное поле в плазме до прихода ударной волны (при $x \rightarrow \infty$); n_0 — невозмущенная плотность числа ионов (электронов); u — скорость ударной волны относительно невозмущенной плазмы; $a^2 = \frac{m_e c^2}{4\pi n_0 e^2}$.

Заметим, что (6) представляет собой уравнение движения ангармонического осциллятора при наличии трения, роль обобщенной координаты играет H , роль времени x . Форма „эффективной“ потенциальной ямы определяется потенциалом

$$V(H) = \frac{1}{2} (H - H_0)^2 \left[\frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 m_i u^2} - 1 \right]. \quad (7)$$

На рис. 2 для наглядности изображен вид $V(H)$. При $H = H^* = -\frac{H_0}{2} + \sqrt{\frac{H_0^2}{4} + 8\pi n_0 m_i u^2}$ V достигает минимума. Аналогия с осциллятором легко позволяет установить профиль H внутри фронта ударной волны; H осциллирует вокруг значения H^* с затухающей амплитудой до тех пор, пока не установится $H = H^*$, соответствующее магнитному полю позади фронта ударной волны.¹

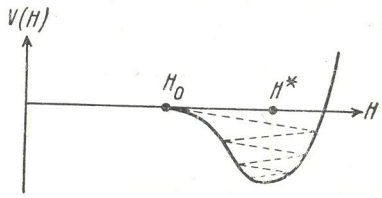


Рис. 2. Вид эффективной потенциальной ямы $V(H)$.

Для того, чтобы H_0 соответствовало минимуму магнитного поля в волне, т. е. чтобы $V(H)$ имело вид, изображенный на рис. 2, необходимо выполнение условия $u^2 > \frac{H_0^2}{4\pi n_0 m_i}$. При $\nu \rightarrow 0$ максимальная амплитуда, достигаемая в конце первого полупериода колебаний, соответствует $H_{\max} = 4u \sqrt{\pi n_0 m_i} - H_0$.

В явном виде найти $H(x)$ не удастся, однако, если затухание за один период мало, можно воспользоваться простым приближенным методом медленно меняющейся амплитуды, усреднив по быстрым осцилляциям. В отсутствие трения движение „частицы“ в нашей потенциальной яме определяется с помощью одной константы C , представляющей уровень полной энергии „частицы“ (рис. 2). Тогда определение обратной зависимости x от H сводится к квадратуре

$$\int \frac{dH}{\sqrt{(H - H_0)^2 \left[1 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 m_i u^2} \right] + C}} = \pm \frac{x}{a}. \quad (8)$$

Пусть решение соответствующей задачи будет $H = \Phi(x, C)$. В методе медленно меняющейся амплитуды решение и при учете трения ищется в виде $H = \Phi(x, C)$, но C теперь считается медленно убывающим с x (вследствие „диссипации“ энергии). Зависимость $C(x)$ от x

¹ На возможность существования осцилляторной тонкой структуры фронта ударных волн в разреженной плазме с учетом столкновений указывалось в [2-4]. Качественный анализ на фазовой плоскости и пример численного решения с помощью счетной машины даны в [8].

определяется после усреднения по периоду следующим уравнением

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 m_i u^2} \right]} + Cd\Phi}{\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 m_i u^2} \right]} + C} d\Phi \quad (9)$$

Здесь $\Phi_{1,2}$ — два положительных корня уравнения

$$(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 m_i u^2} \right] + C = 0,$$

бóльшие H_0 .

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (8) и (9). При $x \rightarrow \infty$ мы имеем граничное условие: $H \rightarrow H_0$, $\frac{dH}{dx} \rightarrow 0$, т. е. $C \rightarrow 0$.

При малых C оба уравнения имеют простые асимптотические решения. Так, $\Phi(x, 0)$ имеет вид

$$\Phi(x, 0) \approx H_0 \left[1 + 2(1 - M^{-2}) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - M^{-2}} \right], \quad (10)$$

где $M = \left(\frac{4\pi u^2 m_i n_0}{H_0^2} \right)^{1/2}$ — так называемое магнитное „число Маха“.

Уравнение (9) при $C \rightarrow 0$ сводится к следующему

$$\frac{dC}{dx} \approx -\frac{4}{15} \frac{v}{u} \frac{H_0^2 (1 - M^{-2})^3}{\ln \frac{\sqrt{-C}}{H_0 \sqrt{1 - M^{-2}}}}, \quad (11)$$

откуда находим $C \ln \frac{\sqrt{-C}}{H_0 \sqrt{1 - M^{-2}}} \approx -\frac{4}{15} \frac{v}{u} H_0^2 (1 - M^{-2})^3 x + \text{const}$. При больших C , когда амплитуда колебаний заметно уменьшилась по сравнению с начальной, колебания становятся затухающими гармоническими

$$H - H^* \sim e^{\frac{v}{u} x} \sin \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - M^{-2}} \frac{x}{a} \right). \quad (12)$$

Профиль изменения H внутри фронта волны окончательно можно представить следующим образом (рис. 3): сначала в невозмущенной плазме появляется „уединенная“ волна, на гребне которой магнитное поле достигает максимального значения; вследствие наличия необратимой диссипации (трение) состояние плазмы после прохождения такой волны будет немного отличаться от исходного. На расстоянии порядка $\frac{a}{\sqrt{1 - M^{-2}}} \ln \frac{u}{va} \sqrt{1 - M^{-2}}$ вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Последующие волны имеют уменьшающуюся амплитуду, и расстояние между двумя соседними „возвышениями“ магнитного поля сокращается до $\frac{a}{\sqrt{1 - M^{-2}}}$, когда совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой. Полная длина затухания осцилляций будет порядка $\frac{u}{v} \ln \frac{1}{M-1}$. Это и есть, очевидно, толщина ударной волны малой амплитуды. Логарифмический множитель „набегает“ за счет первого участка фронта, представляющего собой совокупность „уединенных“ волн. Для чисел Маха, не слишком близких к единице, эта формула неприменима: во-первых, v будет уже меняться внутри фронта волны; во-вторых, логарифмический множитель, справедливый

лишь при $\ln \frac{1}{M-1} > 1$, становится неверным. Но для оценки ширины фронта можно пользоваться просто выражением $\frac{u}{\bar{v}}$, где \bar{v} — „средняя“ частота столкновений электронов с ионами. Выражая ширину через длину свободного пробега $\lambda = \frac{\bar{v}_e}{v_e}$ (v_e — средняя относительная скорость электронов относительно ионов), получим

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{H^2}{8\pi n T} \frac{m_e}{m_i}} \lambda \ln \frac{1}{M-1}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что ширина фронта ударной волны в реальных условиях, соответствующих принятому приближению, может оказаться значительно меньше свобод-

ного пробега (если $\sqrt{\frac{H^2}{8\pi n T} \frac{m_e}{m_i}} \ll 1$). Это и естественно, так как при джоулевом нагреве растет температура электронов, а их времена релаксации, как правило, значительно меньше ионных из-за большей скорости. „Выравнивание“ температур ионов и электронов будет происходить уже после того,

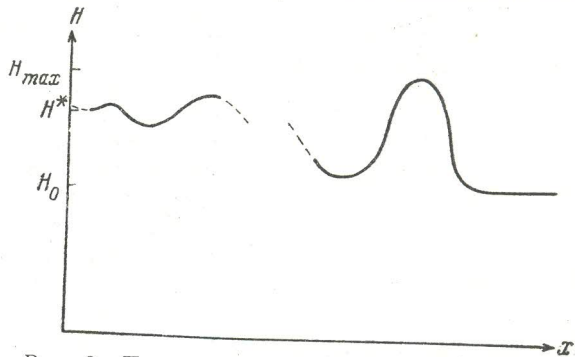


Рис. 3. Профиль изменения магнитного поля во фронте волны.

как колебания внутри фронта затухнут, на расстояниях порядка $\frac{m_i}{m_e} \lambda$.

При переходе к большим числам Маха, кроме отмеченных выше ограничений, появляется и еще одно. Суть его заключается в том, что, если плазма в невозмущенном состоянии и была „холодной“, в конце концов она нагреется настолько, что ларморовские радиусы электронов станут сравнимы с характерной длиной осцилляций $\frac{c}{\omega_0}$. Очевидно, это произойдет тогда, когда давление электронов станет сравнимым с магнитным давлением $nT \sim \frac{H^2}{8\pi}$. Однако картина начальной стадии фронта будет иметь вышеописанный характер и для немалых чисел Маха.

При приближении амплитуды магнитного поля в волне к значению, втрое большему начальной величины магнитного поля, рассмотренная упорядоченная осцилляторная структура нарушается. Действительно, как известно из [2-6] при таких амплитудах (соответственно при числах Маха, больших 2) уединенная волна не существует; более того, невозможно построить установившееся нелинейное течение односкоростного типа, т. е. такое, что в каждой точке пространства имеется лишь одно значение скорости ионов. Физически это означает, что как только амплитуда волны достигает критического значения ($H = 3H_0$), происходит „опрокидывание“. В некотором участке пространства ионы, двигавшиеся первоначально позади, настигают передних и обгоняют их (рис. 4). Профиль скорости в этот момент становится трехзначным.

Заметим, что аналогичное явление хорошо изучено в теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины [7]. Здесь существуют нелинейные установившиеся движения типа уединенных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие „опрокидывания“.

Ясно, что строгий математический анализ картины, возникающей после опрокидывания, чрезвычайно труден. Можно попытаться лишь качественно установить наиболее существенные черты, обращаясь в качестве поддержки к аналогии с волнами в жидкости.

Основной вопрос заключается в том, будет ли после опрокидывания движение плазмы стремиться к какому-либо установившемуся режиму или же переходная область (заштрихованная на рис. 4) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычном газе

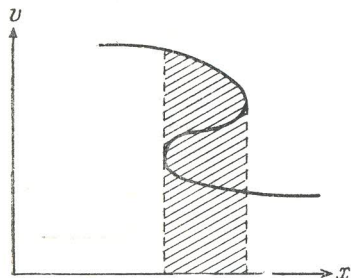


Рис. 4. Профиль течения после „опрокидывания“.

без столкновений? В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое „прыжок воды“ или „бор“, представляющий собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два плоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения. В известном смысле „бор“ представляет собой аналог ударной волны. Стационарность ширины переходного слоя физически обеспечивается

тем, что участки профиля, выдвигающиеся вперед при опрокидывании, в конце концов, описав дугу, под действием силы тяжести падают и смешиваются с еще покоившейся жидкостью. Таким образом, обеспечивается баланс количества движения внутри переходного слоя.

В плазме роль силы тяжести играет магнитное поле. Ионы, вырвавшиеся вперед после опрокидывания, будут заворачиваться магнитным полем и „смешиваться“ с покоившимися. При этом возникает разброс скоростей ионов, имитирующий тепловое движение, хотя распределение скоростей, конечно, еще далеко от максвелловского. Тем не менее можно состояния плазмы с обеих сторон переходной области связывать законами сохранения потоков массы, импульса и энергии,

понимая под энергией теплового движения величину $\frac{m}{2}(\overline{v - \bar{v}})^2$ (черта означает усреднение по распределению скоростей). Ширину переходной области можно оценить как радиус кривизны ионов после опрокидывания в магнитном поле. Так как в волне с числом Маха, большим 2, амплитуда скорости $v \sim \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$, то ширина переходного слоя (или ширина

бесстолкновительной ударной волны) будет порядка $\sim \frac{vm_i c}{eH} = \frac{c}{\Omega_0}$

($\Omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{m_i}$). Таким образом, мы приходим к бесстолкновительным

ударным волнам даже в холодной плазме, но при числах Маха > 2 . Многоскоростное течение со скоростями, перпендикулярными магнитному полю, возникающее после опрокидывания, однако, должно быть неустойчиво. Действительно, если для простоты рассмотреть двухпучковое распределение ионов с разностью скоростей между пучками, превышающей $\sqrt{\frac{T}{m_i}}$, то возникает неустойчивость относительно рас-

качки колебаний с волновым вектором, почти параллельным скорости пучка. В „боре“ также имеет место неустойчивость сходной природы (встречные потоки); это просто неустойчивость тангенциального разрыва, возникающая при соприкосновении падающей струи с поверхностью покоившейся жидкости.

Таким образом, не вызывает сомнения тот факт, что внутри достаточно сильных ударных волн в разреженной плазме должна появиться неустойчивость. Заметим в этой связи, что в ряде работ [9, 10] предпринята попытка построить теорию ширины бесстолкновительных ударных волн, сразу полагая, что в результате развития каких-то неустойчивостей внутри фронта ударной волны возникает целый спектр колебаний, взаимодействие между отдельными „гармониками“ которого определяет процессы переноса энергии и импульса. В нашем рассмотрении „перестройка“ картины внутри фронта ударной волны и появление неустойчивости происходит при $M > 2$.² Можно ожидать, что ширина фронта ударных волн с увеличением числа Маха при переходе через $M=2$ должна резко уменьшиться³ (рис. 5).

Тепловое движение ионов плазмы должно размывать и смещать эту границу в сторону меньших значений числа Маха из-за появления отраженных ионов еще при $M < 2$ [3, 6]. В заключение автору приятно поблагодарить М. А. Леонтовича и В. Д. Шафранова за полезные обсуждения содержания работы.

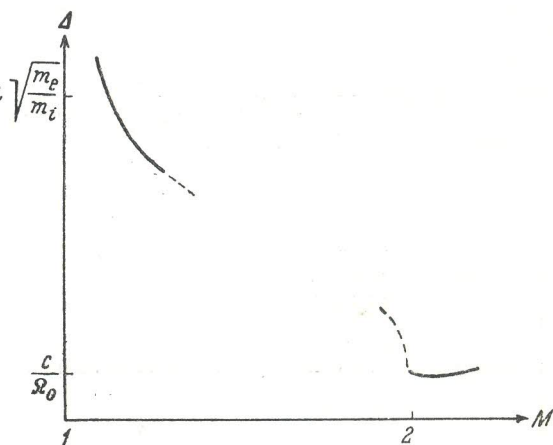


Рис. 5. Зависимость ширины фронта ударной волны от числа Маха.

Литература

- [1] G. Chew, M. Goldberger, F. Low. Proc. Roy. Soc., A236, 112–118, 1957. — [2] Р. Э. Сагдеев. Выступление на X международном астрономическом съезде, М., 1958. — [3] С. Gardner, H. Goertzel, H. Grad, S. Morawetz, M. Rose a. H. Rubin. Доклад № 374 на II Женевской конференции, 1958. — [4] L. Davies, R. Lüst, A. Schlüter. Zs. f. Naturforschg., 13a, 916, 1958. — [5] J. Adlam, J. Allen. Phil. Mag., 3, 448, 1958. — [6] Р. Э. Сагдеев. Ударные волны в разреженной плазме. Доклад на IV конференции по ионизационным явлениям, Уппсала, 1959. — [7] Дж. Стокер. Волны на воде. ИЛ, М., 1959. — [8] С. Morawetz. Препринт, № 2, NYO=8677, 1959. — [9] A. Kantrowitz, R. M. Patrick, H. E. Petschek. Препринт, 1959. — [10] H. E. Petschek. Доклад на Всесоюзном съезде механиков, М., 1960. — [11] R. M. Patrick. Phys. Fluids, 3, 321, 1960.

Поступило в Редакцию 3 января 1961 г.

² В принципе не исключена возможность появления неустойчивости и при $M < 2$ в области „однопотокового“ движения, так как, например, всегда имеется относительное движение электронов и ионов. Из теории колебаний однородной плазмы известно, что, например, если скорость их относительно движения превысит хотя бы скорость теплового движения электронов, то возникает неустойчивость.

³ В появившейся недавно заметке [11] приведена экспериментально полученная зависимость ширины фронта от числа Маха. Несмотря на большой разброс экспериментальных точек, видна тенденция к резкому сужению фронта при $M > 2$.