*Журнал экспериментальной и теоретической физики*

*Т. 40* *1961* *Вып. 1*

# О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ КАСКАДНОЙ ТЕОРИИ

*В. С. Сынах*

Даны точные численные решения основных уравнений каскадной теории, полученные методом функциональных преобразований, в области малых глубин (вплоть до двух радиационных единиц длины).

Как известно (см. [1]), исходные уравнения каскадной теории могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial P(t, E)}{\partial t} = 2\int_E^\infty \Gamma(t, E') W_p(E', E)\, dE' +$$

$$+ \int_E^\infty P(t, E') W_e(E', E' - E)\, dE' - \int_0^E P(t, E) W_e(E, E')\, dE', \tag{1а}$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E)}{\partial t} = \int_E^\infty P(t, E') W_e(E', E)\, dE' - \int_0^E \Gamma(t, E) W_p(E, E')\, dE'. \tag{1б}$$

Здесь $t$ — глубина в радиационных единицах длины; $P(t, E)dE$ — суммарное число электронов и позитронов в интервале энергии $(E, E + dE)$ на глубине $t$; $\Gamma(t, E)$ — аналогичная функция распределения для фотонов; $W_p(E', E)\, dE$ — вероятность рождения фотоном энергии $E'$ пары с энергией позитрона в интервале $(E, E + dE)$, отнесенная к радиационной единице длины; $W_e(E, E')\, dE'$ — вероятность испускания электроном или позитроном энергии $E$ тормозного кванта в интервале $(E', E' + dE')$, отнесенная также к радиационной единице длины.

С учетом только поля ядра в ультрарелятивистском пределе для больших параметров соударения, существенных в этом случае, в борновском приближении функции $W_e$ и $W_p$ имеют вид [2]

$$W_e(E, E')\, dE' = [1 + (1 - E'/E)^2 - \tfrac{2}{3}(1 - E'/E)]\, dE', \tag{2а}$$

$$W_p(E', E)\, dE = [(E/E')^2 + (1 - E/E')^2 + \tfrac{2}{3}(E/E')(1 - E/E')]\, dE/E'. \tag{2б}$$

При записи системы уравнений (1) не учтены комптон-эффект и фотоэффект для фотонов, резерфордовское рассеяние для позитронов и электронов, аннигиляция пар и другие процессы, не существенные при высоких энергиях. В (2) не учтены рождение пар и тормозное излучение в поле атомных электронов. Вклад последних для тяжелых элементов не превышает 1% общих эффектов.

Для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1) обычно применяют либо метод функциональных преобразований, либо метод моментов (см. [3]). Последний по своей природе является приближенным и имеет ограниченную область применимости. Что касается метода функциональных преобразований, то он позволяет, в принципе, получить все представляющие интерес величины, но получающиеся выражения могут быть аналитически вычислены лишь при $t > 1$. В настоящей работе получены точные численные решения системы уравнений (1) в области толщин до $t = 2$.

Как показано, например, в обзоре Беленького и Иваненко [3], решение системы (1) с помощью преобразования Лапласа—Меллина при граничных условиях

$$P(t = 0, E) = \delta(E - E_0), \qquad \Gamma(t = 0, E) = 0$$

имеет вид

$$P(t, E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left[\frac{\sigma + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\sigma + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}\right] ds,$$

$$\Gamma(t, E) = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{C(s)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right) ds \tag{3}$$

явные выражения для функций $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ и $C(s)$ приведены, например, в книге Беленького [1]).

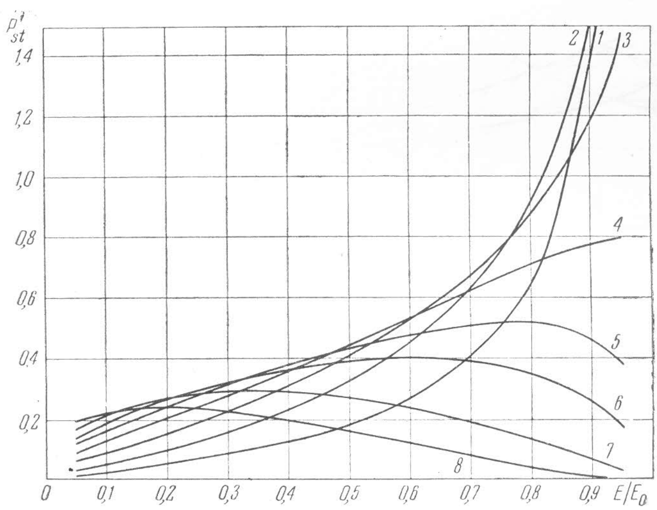


Рис. 1. Кривые $P'_{st}$ отвечают значениям $t$: *1* — 0,2; *2* — 0,4; *3* — 0,6; *4* — 0,8; *5* — 1,0; *6* — 1,2; *7* — 1,6; *8* — 2,0

Здесь $\sigma$ — коэффициент поглощения $\gamma$-квантов. Как обычно, принято, что $\sigma$ равно своему ультрарелятивистскому пределу $\sigma = 0{,}773$. Интегрирование в (3) проводится в комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси, при условии $\delta > 0$.

В каскадной теории рассматривается также величина $N(t, E)$, т. е. полное число электронов и позитронов на глубине $t$ с энергией, превышающей $E$:

$$N(t, E) = \int_E^\infty P(t, E)\, dE = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left[\frac{\sigma + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\sigma + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}\right] \frac{ds}{s}. \tag{4}$$

Интерес представляет и распределение начальных электронов по энергиям после прохождения слоя толщины $t$. Оказывается, что известное в литературе выражение Бете — Гайтлера [2] для вероятности того, что электрон с начальной энергией $E_0$ будет иметь энергию между $E$ и

$E+dE$ по прохождении толщины $t$,

$$P_{st}^{\text{Б—Г}}(t, E)\,dE=\frac{dE}{E_0}\left(\ln\frac{E_0}{E}\right)^{t/\ln 2-1}\Big/\Gamma\left(\frac{t}{\ln 2}\right), \tag{5}$$

является довольно грубым приближением.

Чтобы получить уравнение для $P_{st}$ в рамках каскадной теории, достаточно, очевидно, в правой части (1а) оставить лишь члены, описывающие радиационное торможение:

$$\frac{\partial P_{st}(t, E)}{\partial t}=$$

$$=\int\limits_{E}^{\infty}P_{st}(t, E)\,W_e(E', E'-E)\,dE'-$$

$$-\int\limits_{0}^{E}P_{st}(t, E)\,W_{\iota}(E, E')\,dE', \tag{6}$$

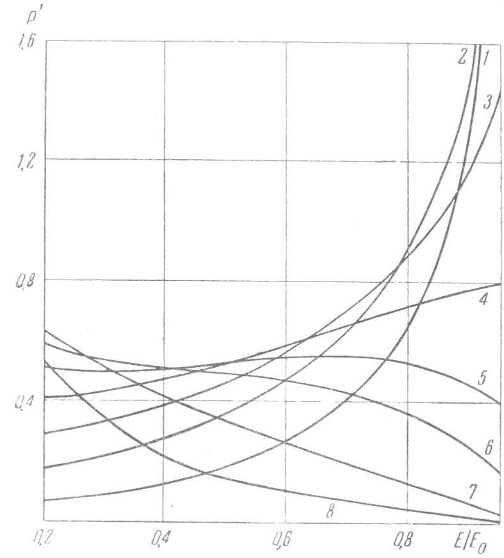


Рис. 2. Кривые $P'$ отвечают тем же значениям $t$, что и на рис 1

откуда с помощью преобразования Лапласа — Меллина легко получить

$$P_{st}(t, E)=\frac{1}{2\pi iE}\int\limits_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s}e^{-A(s)t}\,ds. \tag{7}$$

(Явное выражение для $A(s)$ см. в [1].)

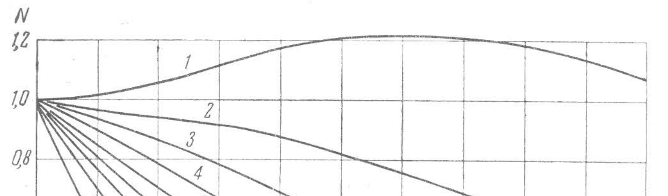


Рис. 3. Кривые $N$ отвечают значениям $E/E_0$: *1* — 0,1; *2* — 0,2; *3* — 0,3; *4* — 0,4; *5* — 0,5; *6*—0,6; *7*—0,7; *8*—0,8; *9* — 0,9

Из (3) и (7) легко получается функция распределения $P_+$ вторичных электронов (позитронов) по энергиям на глубине $t$:

$$P_+(t, E_+)=\tfrac{1}{2}\left[P(t, E_+)-P_{st}(t, E_+)\right]. \tag{8}$$

Приведенные выражения для $P$, $P_{st}$, $P_{+}$, $N$, $\Gamma$ вычислялись на электронно-счетной машине с точностью $\sim 1\%$. Результаты приведены на рис. 1—6. Графики приведены для «штрихованных» величин, оказавшихся более удобными для вычисления. Последние определены таким образом, что, например, $P(t, E)\,dE = P'(t, E)\,dE/E$ и т. д. Энергия всюду измеряется в единицах начальной энергии $E_0$.

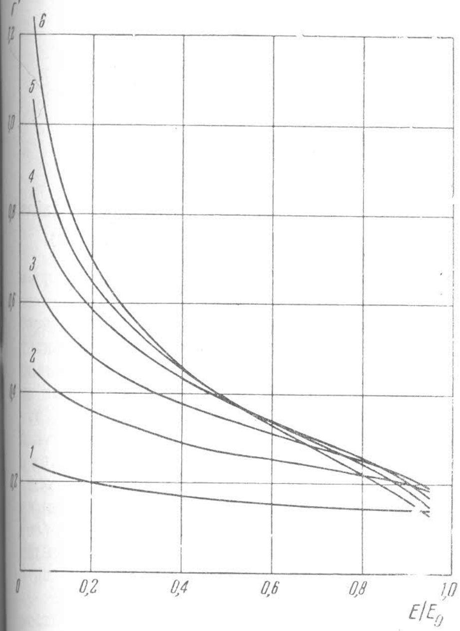

Рис. 4

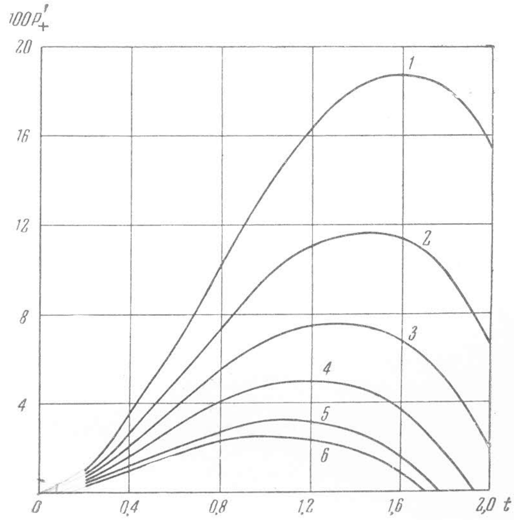

Рис. 5

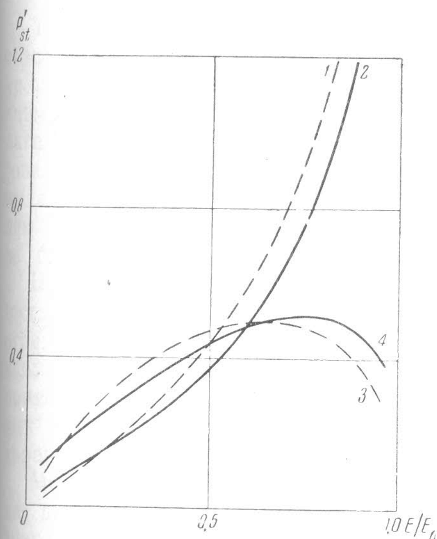

Рис. 6

Рис. 4. Кривые $\Gamma'$ отвечают значениям $t$: *1* — 0,2; *2* — 0,4; *3* — 0,6; *4* — 0,8; *5* — 1,0; *6* — 1,2

Рис. 5. Кривые $P'_{+}$ отвечают значениям $E/E_0$: *1* — 0,2; *2* — 0,3; *3* — 0,4; *4* — 0,5; *5* — 0,6; *6* — 0,7

Рис. 6. Кривые $P'_{st}$: *1* и *3* — по формуле Бете — Гайтлера (5), *2* и *4* — по (7). Для кривых *1* и *2* значение $t=0,5$; для кривых *3* и *4* $t=1$

В заключение автор выражает благодарность З. Д. Доброхотовой и Б. И. Шитикову за помощь в решении задачи, Г. И. Будкеру и В. Н. Байеру за обсуждение результатов и Л. Добровинской за помощь в оформлении чертежей.

Поступила в редакцию
8 июля 1960 г.

### Литература

[1] С. З. Беленький. Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат, 1948.
[2] В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, ИИЛ, 1956.
[3] С. З. Беленький, И. П. Иваненко. УФН, 29, 591, 1959.

---

## ON THE EXACT SOLUTION OF THE BASIC CASCADE THEORY EQUATIONS

*V. S. Synakh*

Exact numerical solutions of the basic cascade theory equations are given which are obtained by the functional transformation method for small depths (up to two radiation lengths).