Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 40 *1961* *Вып. 2*

К ВОПРОСУ О ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ЯДЕР

С. Т. Беляев

С помощью обобщенного метода канонического преобразования найдено выражение для момента инерции ядер с учетом спаривания нуклонов. Результат, в основном, совпадает с полученным ранее Мигдалом методом функций Грина.

Момент инерции деформированных ядер с учетом сверхтекучести (т. е. куперовского спаривания нуклонов) был вычислен ранее [1] в рамках адиабатической теории возмущений. Как было показано Мигдалом [2] с помощью метода функций Грина, учет вращательной энергии по теории возмущений является недостаточным, так как вращение меняет сами куперовские пары, что приводит к дополнительному слагаемому в моменте инерции. В настоящей работе будет показано, что последовательное применение метода канонического преобразования приводит к тем же результатам.

Нуклоны в деформированном самосогласованном поле описываются гамильтонианом

$$H = \sum_{\nu_1} (\varepsilon_{\nu_1} - \lambda) a_{\nu_1}^{+} a_{\nu_1} - \frac{1}{2} \sum \langle 12 | G | 2'1' \rangle a_1^{+} a_2^{+} a_{2'} a_{1'}, \tag{1}$$

где $a_{\nu_1}^{+}$ (a_{ν_1}) — операторы рождения (уничтожения) нуклона в состоянии $\nu_1 \equiv 1$, $\varepsilon_{\nu_1} \equiv \varepsilon_1$ — энергия этого одночастичного состояния, а λ — химический потенциал системы.

Спаривание нуклонов можно учесть путем введения квазичастиц посредством канонического преобразования

$$a_\nu = u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \alpha_{\tilde{\nu}}^{+}, \quad \alpha_\nu = u_\nu a_\nu - v_\nu a_{\tilde{\nu}}^{+}, \tag{2}$$

где $\tilde{\nu}$ означает состояние, сопряженное по времени относительно ν (и имеющее ту же энергию) [1)], а коэффициенты преобразования удовлетворяют условиям

$$u_{\tilde{\nu}} = u_\nu, \quad v_{\tilde{\nu}} = -v_\nu, \quad u_\nu^2 + v_\nu^2 = 1 \tag{3}$$

и выбираются из требования обращения в нуль членов с $\alpha\alpha$ и $\alpha^+\alpha^+$ в гамильтониане после преобразования. Известно, что это требование равносильно минимизации квазичастичного вакуумного состояния (определяемого как $\alpha\Psi_0 = 0$):

$$\Psi_0 = \prod_{|\nu|} (u_\nu + v_\nu a_\nu^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+}) | 0 \rangle. \tag{4}$$

Вычисление средних значений с функцией (4) эквивалентно независимому усреднению пар операторов, например [2)]

$$\langle a_1^{+} a_2^{+} a_{2'} a_{1'} \rangle_0 = \langle a_1^{+} a_{1'} \rangle_0 \langle a_2^{+} a_{2'} \rangle_0 - \langle a_1^{+} a_{2'} \rangle_0 \langle a_2^{+} a_{1'} \rangle_0 + \langle a_1^{+} a_2^{+} \rangle_0 \langle a_{2'} a_{1'} \rangle_0, \tag{5}$$

---

1) Если $| \nu \rangle = | nljm \rangle$, то $| \tilde{\nu} \rangle (= -1)^{j+m} \; | nlj - m \rangle$.

2) Равенство (5) показывает, что метод канонического преобразования эквивалентен обобщенному методу Хартри — Фока [3].

причем отличными от нуля являются лишь «диагональные» выражения

$$\langle \overset{+}{a}_1 a_1 \rangle_0 = v_1^2, \quad \langle \overset{+}{a}_1 \overset{+}{a}_{\tilde{1}} \rangle_0 = \langle a_{\tilde{1}} a_1 \rangle_0 = u_1 v_1. \tag{6}$$

Для получения момента инерции будем искать наинизшее состояние системы при фиксированном среднем значении проекции момента на ось, перпендикулярную оси ядра. С этой целью добавим в гамильтониан член

$$H_\omega = -\omega \hat{J}_x = -\omega \Sigma \langle 1 \mid j_x \mid 2 \rangle \overset{+}{a}_1 a_2, \tag{7}$$

а множитель Лагранжа ω определим затем из условия $\langle \hat{J}_x \rangle = J_x$.

При добавлении в гамильтониан члена H_ω запрет для рождения пар квазичастиц $\alpha^+\alpha^+$ нарушается и его нельзя восстановить простым изменением коэффициентов u_ν и v_ν в (2). Для уничтожения членов $\alpha\alpha$ и $\alpha^+\alpha^+$ в полном гамильтониане $H' = H + H_\omega$ произведем дополнительное каноническое преобразование более общего вида [3]:

$$\alpha_\nu \to \alpha_\nu(\omega) + \sum_{\nu'} f_{\nu\nu'} \overset{+}{\alpha}_{\tilde{\nu}'}(\omega). \tag{8}$$

Коэффициенты $f_{\nu\nu'}$ связаны с вращательным членом H_ω ($f_{\nu\nu'} \sim \omega$). Их можно считать малыми и учитывать только в первом неисчезающем порядке. Из условия каноничности преобразования (8) и симметрии относительно изменения знака ω следует

$$f_{\nu\nu'} + f_{\tilde{\nu}'\tilde{\nu}} = 0, \; f_{\nu\nu} = 0. \tag{9}$$

Для новых квазичастиц $\alpha_\nu(\omega)$ (поправленных на вращение) вакуумное состояние отличается от (4) и, как следует из (8), имеет вид

$$\Psi_\omega = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu\nu'} f_{\nu\nu'} \overset{+}{\alpha}_\nu \overset{+}{\alpha}_{\tilde{\nu}'}\right\}\Psi_0 = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu\nu'} f_{\nu\nu'} (u_\nu \overset{+}{a}_\nu - v_\nu a_{\tilde{\nu}})(u_{\nu'} \overset{+}{a}_{\tilde{\nu}'} + v_{\nu'} a_{\nu'})\right\}\Psi_0. \tag{10}$$

Заметим, что функция (10) не нормирована:

$$(\Psi_\omega, \Psi_\omega) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu\nu'} |f_{\nu\nu'}|^2\right).$$

Для определения коэффициентов $f_{\nu\nu'}$ потребуем минимума среднего значения полного гамильтониана H' в состоянии (10). Для средних, вычисленных с функцией (10), соотношение (5) по-прежнему справедливо, но, наряду с диагональными величинами

$$\begin{aligned} \langle \overset{+}{a}_1 a_1 \rangle &= v_1^2 + (u_1^2 - v_1^2) \sum_2 |f_{12}|^2, \\ \langle \overset{+}{a}_1 \overset{+}{a}_{\tilde{1}} \rangle &= \langle a_{\tilde{1}} a_1 \rangle = u_1 v_1 - 2u_1 v_1 \sum_2 |f_{12}|^2, \end{aligned} \tag{11}$$

отличны от нуля также недиагональные выражения

$$\begin{aligned} \langle \overset{+}{a}_1 a_2 \rangle &= (u_1 v_2 - v_1 u_2) f_{12}^*, \\ \langle \overset{+}{a}_1 \overset{+}{a}_{\tilde{2}} \rangle &= \langle a_{\tilde{2}} a_1 \rangle^* = (u_1 u_2 + v_1 v_2) f_{12}^*. \end{aligned} \tag{12}$$

В (11) и (12) мы учли соотношение

$$f_{12}^* + f_{21} = 0, \tag{13}$$

которое может быть подтверждено прямым вычислением.

Вычисляя с помощью (11) и (12) средние значения H и H_ω, получим

$$\langle H\rangle = W_0 + \frac{1}{2}\sum_{12}(E_1+E_2)\,|f_{12}|^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum\langle 1\widetilde{2}\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'1'\rangle(u_1u_2+v_1v_2)(u_{1'}u_{2'}+v_{1'}v_{2'})\,f^*_{12}f_{1'2'}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum(\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'2\rangle-\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,2\widetilde{2}'\rangle)(u_1v_2-v_1u_2)(u_{1'}v_{2'}-v_{1'}u_{2'})\,f^*_{12}f_{1'2'}, \quad (14)$$

$$\langle H_\omega\rangle = -\omega\,\langle\hat{J}_x\rangle = -\omega\sum\langle 1\,|\,j_x\,|\,2\rangle(u_1v_2-v_1u_2)\,f^*_{12}, \quad (15)$$

где W_0 — член, не содержащий f, а E — энергия квазичастиц;

$$E_1=\sqrt{(\widetilde{\varepsilon}_1-\lambda)^2+\Delta_1^2},$$

$$\widetilde{\varepsilon}_1=\varepsilon_1-\sum_2(\langle 12\,|\,G\,|\,21\rangle-\langle 12\,|\,G\,|\,12\rangle)\,v_2^2,\quad \Delta_1=\sum_2\langle 1\widetilde{1}\,|\,G\,|\,\widetilde{2}2\rangle\,u_2v_2. \quad (16)$$

Величина Δ (щель в квазичастичном спектре) характеризует спаривание частиц. Параметры u и v можно выразить через Δ:

$$u_1^2=\frac{1}{2}[1+(\widetilde{\varepsilon}_1-\lambda)/E_1],\qquad v_1^2=\frac{1}{2}[1-(\widetilde{\varepsilon}_1-\lambda)/E_1].$$

Варьируя $\langle H\rangle+\langle H_\omega\rangle$ по f^*_{12} (с учетом (9) и (13)), получим интегральное уравнение для определения f_{12}:

$$(E_1+E_2)\,f_{12}-\sum_{1'2'}\langle 1\widetilde{2}\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'1'\rangle(u_1u_2+v_1v_2)(u_{1'}u_{2'}+v_{1'}v_{2'})\,f_{1'2'}+$$

$$+\sum_{1'2'}(\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'2\rangle-\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\widetilde{2}2'\rangle)(u_1v_2-v_1u_2)(u_{1'}v_{2'}-v_{1'}u_{2'})\,f_{1'2'}=$$

$$=\omega\,(u_1v_2-v_1u_2)\langle 1\,|\,j_x\,|\,2\rangle. \quad (17)$$

Используя (17), можно переписать (14) в виде

$$\langle H\rangle = W_0+\frac{1}{2}\,\omega^2\sum(u_1v_2-v_1u_2)\langle 1\,|\,j_x\,|\,2\rangle\,f^*_{12}\omega^{-1} \quad (18)$$

или, исключая ω с помощью (15), получим

$$\langle H\rangle = W_0+\frac{1}{2}\,J_x^2/\mathcal{J},$$

где момент инерции $\mathcal{J}$ определяется выражением

$$\mathcal{J}=\sum_{12}\langle 2|j_x\,|\,1\rangle(u_1v_2-v_1u_2)\,f_{12}\omega^{-1}. \quad (19)$$

Удобно представить $\mathcal{J}$ в виде отдельных слагаемых. Из (17) и (19) находим

$$\mathcal{J}=\mathcal{J}^{(1)}+\mathcal{J}^{(2)}+\mathcal{J}^{(3)},$$

$$\mathcal{J}^{(1)}=\sum_{12}\frac{|\langle 1\,|\,j_x\,|\,2\rangle|^2}{E_1+E_2}(u_1v_2-v_1u_2)^2, \quad (20)$$

$$\mathcal{J}^{(2)}=\sum_{121'2'}\frac{\langle 2\,|\,j_x\,|\,1\rangle}{E_1+E_2}\langle 1\widetilde{2}\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'1'\rangle(u_1v_2-v_1u_2)(u_1u_2+v_1v_2)(u_{1'}u_{2'}+$$

$$+v_{1'}v_{2'})\,f_{1'2'}\omega^{-1}, \quad (21)$$

$$\mathcal{J}^{(3)}=-\sum_{121'2'}\frac{\langle 2\,|\,j_x\,|\,1\rangle}{E_1+E_2}(\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'2\rangle-$$

$$-\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,2\widetilde{2}'\rangle)(u_1v_2-v_1u_2)^2(u_{1'}v_{2'}-v_{1'}u_{2'})\,f_{1'2'}\omega^{-1}. \quad (22)$$

Учет вращения с помощью адиабатической теории возмущений дает лишь первое слагаемое $\mathcal{J}^{(1)}$ [1]. Этот метод эквивалентен учету только диагональных поправок к средним значениям (11), что, естественно, можно сделать не выходя за рамки преобразования (2). Учет недиагональных средних значений (12) приводит к дополнительным слагаемым. Член $\mathcal{J}^{(2)}$ (совпадающий с найденным Мигдалом [2]) учитывает влияние вращения на спаривание. Дополнительный член $\mathcal{J}^{(3)}$ описывает изменение самосогласованного поля нуклонов при вращении. Член $\mathcal{J}^{(1)}$ при отсутствии спаривания ($\Delta = 0$) равен твердотельному значению момента инерции и уменьшается при увеличении Δ, обращаясь в нуль при $\Delta \to \infty$. Член $\mathcal{J}^{(2)}$ обращается в нуль при $\Delta = 0$ и достигает гидродинамического значения при $\Delta \to \infty$ [2]. $\mathcal{J}^{(3)}$ дает поправку к $\mathcal{J}$ порядка $A^{-1/3}$.

Поступила в редакцию
15 сентября 1960 г.

Литература

[1] С. Т. Беляев. Math.- Fys. Dan. Vid. Selsk., 31, *11*, 1959.
[2] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 37, 249, 1959.
[3] Н. Н. Боголюбов. УФН, 67, 549, 1959.

ON THE PROBLEM OF CALCULATING THE MOMENTS OF INERTIA OF NUCLEI

S. T. Belyaev

An expression for the moment of inertia of nuclei in which nucleon pairing is taken into account is derived by applying the generalized canonical transformation method. As a whole, the result is identical to that previously obtained by Migdal with help of the Green's function method.