

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

✓  
ВОПРОСЫ  
МАГНИТНОЙ  
ГИДРОДИНАМИКИ  
И  
ДИНАМИКИ  
ПЛАЗМЫ

II

*Содерж.*  
Доклады, прочитанные на 2-м совещании  
по теоретической и прикладной магнитной гидродинамике  
в г. Риге 27 июня — 2 июля 1960 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР  
РИГА 1962

### РЕДКОЛЛЕГИЯ

Д-р физ.-мат. наук *С. А. Каплан*,  
д-р физ.-мат. наук *И. М. Кирко*,  
д-р физ.-мат. наук *К. П. Станюкович*,  
д-р физ.-мат. наук *М. Ф. Широков*,  
д-р физ.-мат. наук *Д. А. Франк-Каменецкий*,  
*А. К. Везе*

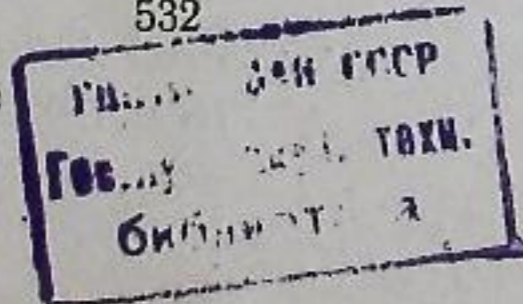
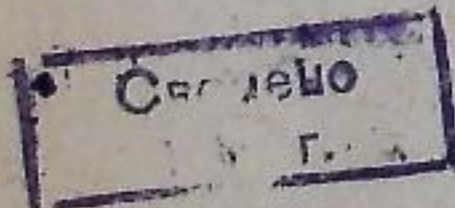
### ВОПРОСЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ, II

Редактор *А. Венгранович*. Технический редактор  
*А. Лемберг*. Корректор *И. Шульц*.  
Сдано в набор 30 августа 1961 г. Подписано к печати  
25 апреля 1961 г. Формат бумаги 60 × 92/16. 41,25 физ.  
печ. л.; 41,25 усл. печ. л.; 32,03 уч.-изд. л. Тираж 3000 экз.  
ЯТ 09171. Цена 2 руб. 35 коп.

Издательство Академии наук Латвийской ССР  
г. Рига, ул. Смилшу № 1

Отпечатано в типографии № 3 Управления полиграфической промышленности Министерства культуры Латвийской ССР, г. Рига, ул. Ленина № 137/139. Заказ № 611.

532



66

533

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Согласно плану Ученого совета по магнетизму при Академии наук СССР и решению Президиума Академии наук Латвийской ССР, Институтом физики АН Латвийской ССР в июне 1960 года в Риге было созвано второе совещание по магнитной гидродинамике.

Работа совещания протекала в четырех секциях: теоретической магнитной гидродинамики, теории плазмы, экспериментальной физики плазмы и прикладной магнитной гидродинамики.

В работе совещания приняло участие около 500 человек из различных городов Советского Союза. Было заслушано и обсуждено свыше 140 докладов и сообщений.

В настоящий сборник вошли сокращенные тексты или аннотации большинства докладов, прочитанных на совещании. Тексты докладов представлены самими авторами, и редколлегия изменений в них не вносила. Поэтому в сборнике не выдержано достаточно строго единообразие обозначений физических величин.

А. П. КАЗАНЦЕВ  
Новосибирск

### ОБ ОБТЕКАНИИ МАГНИТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В настоящем сообщении рассматриваются некоторые задачи, связанные с обтеканием идеально проводящей несжимаемой жидкостью магнитных источников. В этом случае [1—3] пространство разбивается на ряд областей, занятых либо жидкостью, либо магнитным полем. Области, расположенные вблизи особенностей магнитного поля и свободные от жидкости, будем называть, как это принято в гидродинамике, кавернами. Очевидно, что на границе каверны магнитное давление  $\frac{H^2}{8\pi}$  должно уравниваться давлением жидкости. Считая течение жидкости потенциальным, условие равновесия при стационарном обтекании с помощью интеграла Бернулли можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{H^2}{8\pi} = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p'_\infty. \quad (1)$$

Задача заключается в определении границы каверны, считая, что известны источники магнитного поля.

1. Точное решение задачи возможно только в некоторых очень простых случаях. Например, можно указать случаи, когда границей каверны являются кривые второго порядка (рассматриваются только плоские задачи). Так, при обтекании полубесконечной пластины с током, расположенной вдоль набегающего потока (рис. 1, пунктиром указаны магнитные силовые линии), границей каверны будет парабола, если  $p_\infty = 0$ . Конец пластины при этом расположен в фокусе параболы

$$(y/2a)^2 = x/a + 1, \quad a = \frac{\alpha^2}{4\pi\rho v_\infty^2}.$$

Здесь  $\alpha$  характеризует особенность магнитного поля вблизи конца пластины ( $H_x - iH_y = \alpha/\sqrt{z}$ ). Можно также установить, что при обтекании пластины с током конечной ширины границей каверны является эллипс, если между током и шириной пластины имеется некоторая связь, вытекающая из требования, чтобы пластина лежала на линии разреза эллипса.

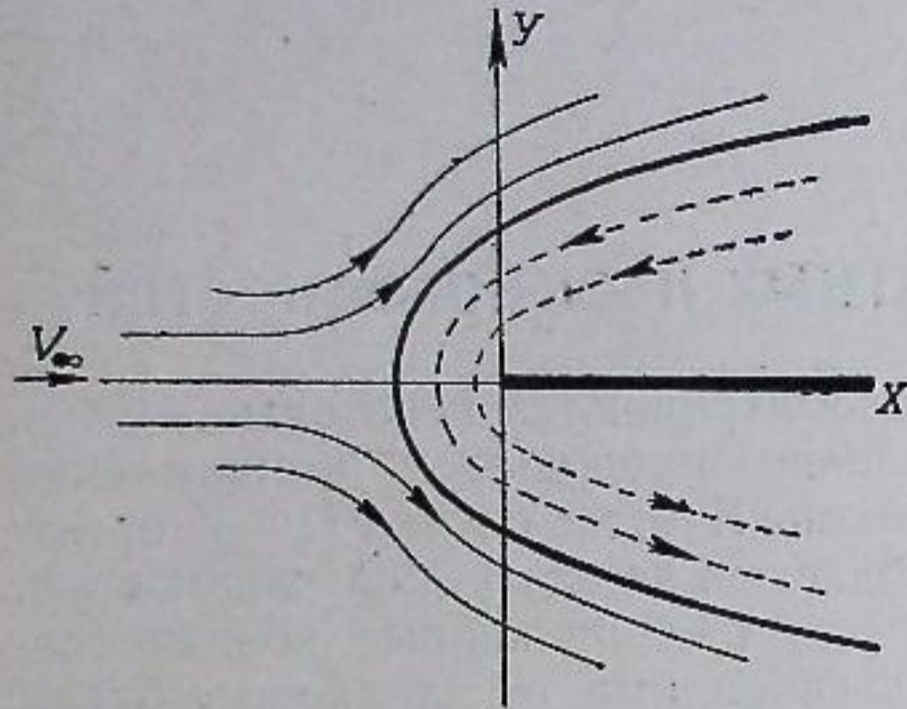


Рис. 1.

2. В принципе всегда можно написать с помощью обобщенного метода Кирхгофа [4] точную систему уравнений, определяющих границу каверны. Однако приближенное ее решение возможно только в тех случаях, когда граница каверны не отличается сильно от известной. Это имеет место в том случае, когда либо гидродинамическое давление  $\frac{1}{2}\rho v^2$ , либо магнитное

давление можно рассматривать как возмущение. Рассмотрим два примера на применение метода Кирхгофа: обтекание линейного тока и рассеивание струи на линейном токе.

В первом случае картину обтекания естественно считать симметричной относительно осей  $x$  и  $y$  (рис. 2). Как выглядит в этом случае точная система уравнений, описывающая течение жидкости, магнитное поле и границу каверны? Введем, как обычно, комплексные потенциалы для жидкости  $\omega_1 = \omega_1(z_1)$  и для магнитного поля  $\omega_2 = \omega_2(z_2)$ , так что  $v_x - iv_y = \frac{d\omega_1}{dz_1}$  и  $H_x - iH_y = \frac{d\omega_2}{dz_2}$ .

Как известно из гидродинамики [4], в задачах такого рода удобнее считать скорость  $v(z_1)$  и магнитное поле  $H(z_2)$  функциями их комплексных потенциалов. Предварительно конформно отобразим внешность каверны на внешность единичного круга  $|\zeta_1| > 1$ , а внутренность каверны — на внутренность круга  $|\zeta_2| < 1$  так, чтобы начало координат перешло в центр круга. Тогда для потенциалов можно написать следующие выражения:

$$\omega_1 = \lambda \left( \zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1} \right) \quad \text{и} \quad \omega_2 = 2il \ln \zeta_2. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  — некоторая постоянная, подлежащая определению, а  $I$  — сила тока, протекающего по проводнику. Будем искать  $v(\zeta_1)$  и  $H(\zeta_2)$  в таком виде:

$$v = v_\infty \left( 1 - \frac{1}{\zeta_1^2} \right) e^{i\omega_1(\zeta_1)}; \quad H(\zeta_2) = \frac{i}{\zeta_2} \sqrt{\frac{\rho'}{8\pi}} e^{i\omega_2(\zeta_2)}. \quad (3)$$

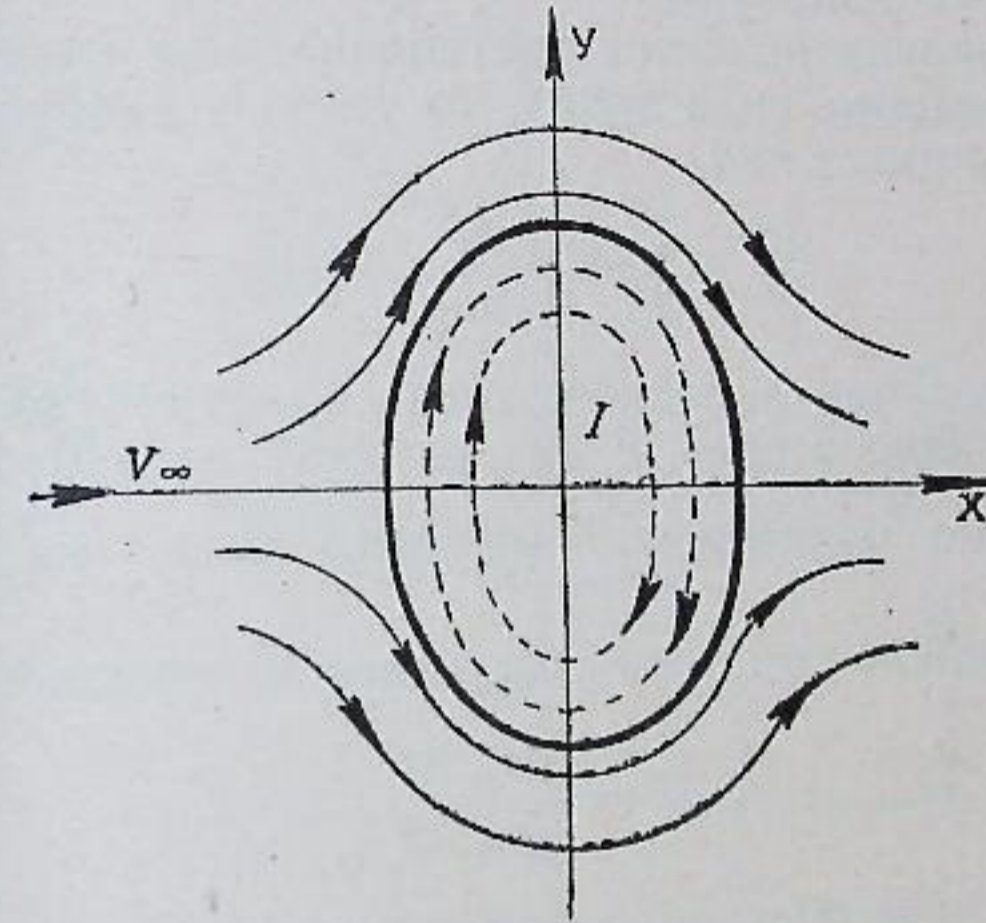


Рис. 2.

Положим также  $\omega_k = v_k + i\mu_k$  и  $\zeta_k = |\zeta_k| e^{i\tau_k}$ . Тогда условие механического равновесия (1) запишется в следующем виде:

$$2\rho v_\infty^2 \sin^2 \tau_1 e^{-2\mu_1(\tau_1)} + \rho' e^{-2\mu_2(\tau_2)} = \rho' e^{-2\mu_2(\tau_2)}. \quad (4)$$

Учитывая, что направление скорости на границе либо совпадает с направлением магнитного поля, либо противоположно ему, с помощью (3) можно написать:

$$v_1(\tau_1) - \tau_1 = v_2(\tau_2) - \tau_2. \quad (5)$$

Наконец, требуется принять во внимание, что «события» происходят в одной точке границы  $\left( dz_1 = \frac{d\omega_1}{v} = dz_2 = \frac{d\omega_2}{H} \right)$ :

$$\frac{\lambda}{v_\infty} e^{\mu_1(\tau_1)} d\tau_1 = 2I \sqrt{\frac{8\pi}{\rho'}} e^{\mu_2(\tau_2)} d\tau_2. \quad (6)$$

Таким образом, возникает система уравнений (4—6) для трех функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\tau_1$ , зависящих от  $\tau_2$ . Эта система легко

решается только в том случае, если  $\rho v^2$  можно считать малым ( $\rho v_\infty^2 \ll 2p_\infty$ ). Тогда  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются малыми величинами и уравнения линеаризуются. В первом приближении по  $\rho v_\infty^2$  каверна имеет форму эллипса, вытянутого в поперечном направлении, что физически очевидно.

При стационарном обтекании на линейный ток ввиду симметрии силы не действуют.

Если обтекание является нестационарным (например, изменяется со временем сила тока), то условие равновесия на грани каверны имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{H^2}{8\pi\rho} = \text{const.}$$

В случае обтекания линейного тока симметрия по оси  $x$  нарушается и возникает сила  $F$  (на единицу длины), для которой при достаточно медленном изменении силы тока ( $\left| \frac{dI}{dt} \right| \rho v_\infty \ll \ll 2\sqrt{\pi\rho} p_\infty^{3/2}$ ) можно получить следующее выражение:

$$F = \frac{\rho v_\infty}{2p_\infty} \frac{dI^2}{dt}.$$

По-прежнему предполагается, что  $\rho v_\infty^2 \ll 2p_\infty$ .

Из выражения для силы  $F$  видно, что при возрастании силы тока возникает тормозящая сила, а при уменьшении тока — движущая сила. Это связано с тем, что в случае нарастания тока скорость натекания на левом крае каверны (см. рис. 2) становится меньше, чем на правом, давление на левом крае становится больше, и левый край каверны располагается ближе к проводнику, чем правый. В случае уменьшения силы тока картина становится противоположной.

3. При рассеивании плоской струи на линейном токе картину обтекания можно считать симметричной относительно оси  $y$  (рис. 3). В этом случае также можно написать точную систему уравнений Кирхгофа; каноническими областями при этом будут полоса для жидкости и полуплоскость для магнитного поля. Ограничимся, однако, случаем рассеивания струи на малые углы, т. е. будем рассматривать магнитное поле как возмущение

$$\frac{I^2}{\pi S^2} \ll \rho v_\infty^2$$

(здесь  $S$  — прицельный параметр).

На плоскости  $\zeta = \omega_1/L_\infty v_\infty$  струя отображается на полосу  $0 \leq \text{Im}\zeta \leq 1$ ;  $L_\infty$  — ширина струи на бесконечности. Ищем  $v(\zeta)$ , как и прежде, в виде  $v = v_\infty e^{i\omega(\zeta)} \approx v_\infty (1 + i\omega(\zeta))$ . Тогда при  $\text{Im}\zeta = 1$   $\mu = 0$ , а при  $\text{Im}\zeta = 0$  определяется из условия (1) (в этом случае нужно положить  $p_\infty = 0$ ).

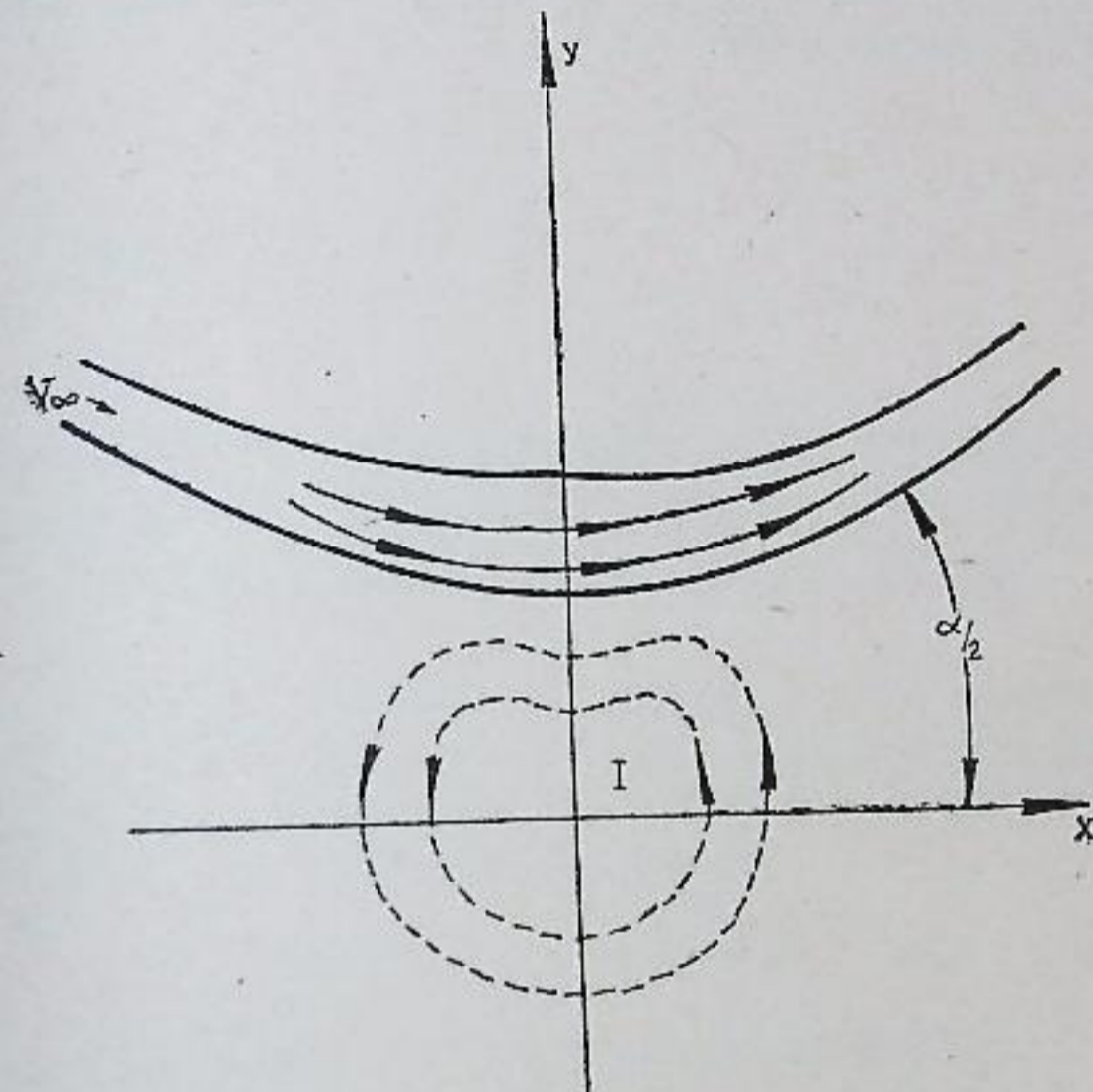


Рис. 3.

$$\mu(t) = \frac{2I^2 S^2}{\pi \rho v_\infty^2 (t^2 L_\infty^2 + S^2)^2}, \quad t = \text{Re}\zeta. \quad (7)$$

В первом приближении по  $I^2$  магнитное поле совпадает с полем линейного тока вблизи плоской стенки. Далее, учитывая, что угол рассеивания струи  $\alpha$  связан с  $v$  ( $v = \text{Re}\omega$ ) простым соотношением

$$\alpha = v(+\infty) - v(-\infty),$$

с помощью интеграла Шварца для полосы [5] находим, что

$$\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) dt = \frac{I^2}{S L_\infty \rho v_\infty^2}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Бюргерс. Сб. «Магнитная гидродинамика». Атомиздат, 1958.
2. В. Н. Жигулев. ДАН СССР, 126, 3, 1959.
3. А. П. Казанцев. ДАН СССР, 133, 2, 1960.
4. Н. Е. Кочин. Точное определение установившихся волн. Собр. соч., II. Изд-во АН СССР, 1949.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, 1958.

В. П. КОРОБЕЙНИКОВ  
Москва

### О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВЗРЫВЕ И ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РАЗРЯДЕ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Задачу о сильном точечном взрыве вдоль прямой в бесконечно проводящем газе рассмотрим в предположении, что начальное магнитное поле имеет следующие компоненты в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ :

$$H_{\varphi 1} = kr^{-1}, \quad H_{z1} = 0$$

для произвольных значений показателя адиабаты  $\gamma$ ;

$$H_{\varphi 1} = kr^{-1}, \quad H_{z1} = \text{const} \text{ при } \gamma = 2.$$

Компонента  $H_r$  считается в дальнейшем всюду равной нулю. Постановка задачи о сильном цилиндрическом взрыве отличается от постановки аналогичной газодинамической задачи [1] лишь наличием магнитного поля в условиях и уравнениях задачи.

Возникающее движение газа при взрыве будет одномерным, обладающим цилиндрической симметрией. Уравнения, необходимые для математического описания таких движений, даны в работе [2]. При чисто кольцевом магнитном поле с начальным распределением  $H_{\varphi 1} = kr^{-1}$  задача о взрыве является автономной и сводится к интегрированию системы 4 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Необходимые граничные условия задачи вытекают из необходимости удовлетворения законам сохранения на фронте ударной волны и условию симметрии на оси взрыва. Система дифференциальных уравнений имеет три первых алгебраических интеграла [3]: интеграл адиабатичности, интеграл энергии и интеграл в замороженности. Произвольные постоянные, входящие в аналитическое