Доклады Академии наук СССР
1962. Том 147, № 1

ФИЗИКА

А. А. ГАЛЕЕВ, В. Н. ОРАЕВСКИЙ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 7 VI 1962)

Известно, что в магнитной гидродинамике (и притом не только в несжимаемой жидкости, но и в газе) альфвеновские волны являются точным решением нелинейных уравнений. Поэтому может возникнуть представление, что эти волны существуют неограниченно долго без изменения формы и в этом смысле устойчивы. На самом деле, как будет показано здесь, они неустойчивы относительно определенного типа возмущений, которые содержат не только альфвеновские, но и магнитозвуковые волны. Исследование устойчивости мы проведем методом, аналогичным использованному в работе (1).

Стационарное состояние представляет собой волну Альфвена, для которой магнитное поле $\mathbf{H}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'$ (где $\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{u}t$, $\mathbf{u}$ — скорость волны) и гидродинамическая скорость $\mathbf{V}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'$ перпендикулярны направлению распространения $\mathbf{k}_0$ и невозмущенному магнитному полю $\mathbf{H}_0$. В системе, которая движется со скоростью волны, линейные уравнения для возмущений имеют вид:

$$M\left[\frac{\partial}{\partial t}+\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'\,(\mathbf{V}\nabla)\right]\mathbf{v}-M\mathbf{V}\,(\mathbf{k}_0\mathbf{v})\sin\mathbf{k}_0\mathbf{r}'=$$
$$=\frac{1}{4\pi n_0}\Big\{[\operatorname{rot}\mathbf{h},\mathbf{H}_0]+\frac{n}{n_0}\sin\mathbf{k}_0\mathbf{r}'\,[[\mathbf{k}_0\mathbf{H}]\,\mathbf{H}_0]+\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'\,[\operatorname{rot}\mathbf{h},\mathbf{H}]-$$
$$-\sin\mathbf{k}_0\mathbf{r}'\,[[\mathbf{k}_0\mathbf{H}]\,\mathbf{h}]\Big\}-\frac{1}{n_0}\nabla p,\quad p=\gamma p_0\frac{n}{n_0},\tag{1}$$
$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]+\operatorname{rot}[\mathbf{V}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'\mathbf{h}]+\operatorname{rot}[\mathbf{v},\mathbf{H}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'],$$
$$\frac{\partial n}{\partial t}+n_0\operatorname{div}\mathbf{v}+\operatorname{div}(n\mathbf{V}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}')=0.$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$, n, p — возмущения скорости, магнитного поля, плотности и давления соответственно.

В системе координат, движущейся вместе с волной, коэффициенты в магнитогидродинамических уравнениях (как видно из (1)) не зависят от времени. Следовательно, зависимость $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$, n, p от времени может быть представлена в виде $e^{-i\omega t}$. Таким образом задача сводится к решению системы уравнений, которая символически может быть записана следующим образом:

$$(\hat{\mathscr{H}}_0+\hat{\mathscr{H}}_1)\,\varphi=\Omega\varphi,\tag{2}$$

где $\hat{\mathscr{H}}_0$ — линейный самосопряженный дифференциальный оператор, описывающий колебания однородной плазмы с собственными функциями φ_Ω, пространственная зависимость которых определяется множителями $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}')$, и с действительными собственными значениями $\Omega^{(0)}$, удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\Omega^{(0)}=\Omega^{(0)}(\mathbf{k})$. $\hat{\mathscr{H}}_1$ — линейный дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами, причем $\hat{\mathscr{H}}_1\to0$ при $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}\to0$. Поэтому устойчивость волн малой амплитуды может быть исследована методом теории возмущений (малый параметр $\alpha\equiv V/u$).

Для исследования устойчивости необходимо отыскать поправку $\omega^{(1)}$ к собственной частоте $\Omega^{(0)}$. Как известно, $\omega^{(1)}$ в первом порядке теории возмущений пропорциональна матричному элементу $\langle\varphi_\Omega|\hat{\mathcal{H}}_1|\varphi_\Omega\rangle$. Учитывая пространственную зависимость $\hat{\mathcal{H}}_1$(которая, как легко видеть, определяется множителями $\exp(\pm i\mathbf{k}_0\mathbf{r}')$, можно сказать, что $\omega^{(1)}$ отлично от нуля лишь в том случае, когда одному $\Omega^{(0)}$ соответствует, по меньшей мере, два волновых вектора, различных по модулю и связанных между собой соотношением:

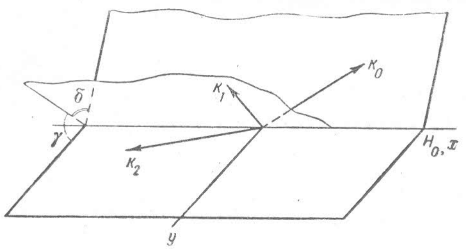

Рис. 1

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2. \tag{3}$$

В лабораторной системе координат соотношение (3) не изменится, частоты же $\omega_1^{(0)}$ и $\omega_2^{(0)}$, соответствующие волновым векторам $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, в этой системе координат связаны соотношением

$$\omega_1^{(0)} = \omega_0 + \omega_2^{(0)}, \tag{4}$$

где ω_0 — частота колебаний «фона». Таким образом, неустойчивость альфвеновских волн может возникнуть (в первом порядке теории возмущений) лишь для отклонений, имеющих вид суммы двух волн, для которых выполняются условия (3), (4).

Используя (1), (3) и (4), можно получить следующую систему алгебраических уравнений для амплитуд волн:

$$2\left(-\omega_{1,2}\mathbf{v}_{1,2} - \frac{1}{4\pi n_0 M}[[\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{h}_{1,2}]\,\mathbf{H}_0] + v_s^2\frac{n_{1,2}}{n_0}\mathbf{k}_{1,2}\right) =$$
$$= -(\mathbf{V}\mathbf{k}_{2,1})\,\mathbf{v}_{2,1} \mp (\mathbf{v}_{2,1}\mathbf{k}_0)\,\mathbf{V} + \frac{1}{4\pi n_0 M}\Big\{[[\mathbf{k}_{2,1}\mathbf{h}_{2,1}]\,\mathbf{H}] \pm$$
$$\pm [[\mathbf{k}_0\mathbf{H}]\,\mathbf{h}_{2,1}] \mp [[\mathbf{k}_0\mathbf{H}]\mathbf{H}_0]\frac{n_{2,1}}{n_0}\Big\}, \tag{5}$$
$$-\omega_{1,2}\mathbf{h}_{1,2} - [\mathbf{k}_{1,2}\,[\mathbf{v}_{1,2}\mathbf{H}_0]] = \frac{1}{2}[\mathbf{k}_{1,2}\,\{[\mathbf{V}\mathbf{h}_{2,1}] + [\mathbf{v}_{2,1}\mathbf{H}]\}],$$
$$-\omega_{1,2}n_{1,2} + n_0(\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{v}_{1,2}) + \frac{1}{2}n_{2,1}\,(\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{V}) = 0,$$
$$v_s^2 = \gamma\frac{p_0}{Mn_0},$$

где $\mathbf{h}_{1,2}$, $\mathbf{v}_{1,2}$, $n_{1,2}$ — амплитуды волн с частотами $\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \omega^{(1)}$, $\omega_2 = \omega_2^{(0)} + \omega^{(1)}$ (где $\omega^{(1)}$ — поправка к частотам, связанным по-прежнему соотношением (4)) и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ соответственно. Используя систему уравнений (5), можно исследовать устойчивость альфвеновской волны по отношению к различным видам возмущений.

Пусть возмущение является совокупностью альфвеновской и магнитозвуковой волн, которые ниже отмечаются соответственно индексами 1, 2. Тогда из условия разрешимости системы (5) находим поправку $\omega^{(1)}$

$$\omega^{(1)2} = \frac{k_{2y}^2V^2}{16\left[1 + \left(\dfrac{k_{2x}k_{2y}v_s^2}{\omega_2^2 - k_{2x}^2v_s^2}\right)^2\right]}\left\{\frac{\omega_2^2\cos\delta}{\omega_2^2 - k_{2x}^2v_s^2} - 4\sin\gamma\sin(\gamma+\delta)\right\}^2\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

где δ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}_0, \mathbf{H}_0)$ и $(\mathbf{k}_1, \mathbf{H}_0)$, а γ — между $(\mathbf{k}_1, \mathbf{H}_0)$ и $(\mathbf{k}_2, \mathbf{H}_0)$; ось x выбрана вдоль $\mathbf{H}_0$, ось y — перпендикулярно $\mathbf{H}_0$ в плоскости $(\mathbf{k}_2, \mathbf{H}_0)$ (см. рис. 1); $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, ω_1, ω_2 удовлетворяют условиям (3) и (4).

Используя (3), (4), (6), можно показать, что исходная альфвеновская волна неустойчива при любом угле распространения по отношению к магнитному полю. Для случая сильного магнитного поля

$$\frac{H_0^2}{8\pi} \gg p_0. \tag{7}$$

Инкремент $\nu = - i\omega^{(1)}$ нарастания малых возмущений в виде альфвеновской и медленной магнитозвуковой волн по порядку величины равен

$$\nu \simeq \frac{V}{(8uv_s)^{1/2}}\,\omega_0. \tag{8}$$

Отметим, что инкремент пропорционален амплитуде волны.

Если в возмущение вместо альфвеновской волны входит быстрая магнитозвуковая волна, то можно показать, что инкремент нарастания возмущений того же порядка, что и ν.

Возмущения из двух альфвеновских волн, как видно из (3), (4), распространяются в одну сторону относительно $\mathbf{H}_0$; из (5) видно, что эти волны не взаимодействуют между собой. Инкременты же нарастания других типов возмущений много меньше, чем ν.

Таким образом, из проведенного выше рассмотрения видно, что альфвеновские волны за времена порядка $1/\nu$ превращаются в неупорядоченные колебания среды. Это означает, в частности, что предположение о достаточно длительном существовании альфвеновских волн, лежащее в основе некоторых астрофизических и геофизических гипотез, неправильно.

Авторы выражают благодарность акад. М. А. Леонтовичу и Р. З. Сагдееву за интерес к работе и советы, а также Г. М. Заславскому за обсуждение результатов работы.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
29 V 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, **32**, в. 11 (1962).