Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — собственные векторы матрицы **A**, соответствующие собственным числам

$$0 < m = \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = M$$

и

$$r_k = x_k - x^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} e_i .$$

Оказывается, если числа α, β и γ выбрать по формулам

$$\alpha = \frac{(1+\varepsilon)^2}{M}, \quad \beta = \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}} - 2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\varepsilon, \quad \gamma = -\frac{\beta-\varepsilon^2}{M}, \tag{5}$$

то каждая из координат $\xi_i^{(k)}$ вектора r_k будет исчезать со скоростью ρ_i^k; здесь

$$\varepsilon = \rho_n \leqslant \rho_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \rho_2 \leqslant \rho_1 = 1 - \sqrt{\frac{m}{M}}(1+\varepsilon). \tag{6}$$

Рассмотрим наиболее характерные случаи. Если мы решили полностью уничтожить координату ξ_n, то следует положить $\varepsilon = 0$. Итерационные формулы (4) примут вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{M}(\mathbf{A}x_k - a) + \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}(x_k - x_{k-1}) - \frac{1}{M}\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}(\mathbf{A}x_k - \mathbf{A}x_{k-1}),$$

или

$$x_{k+1} = (1+t)\left[x_k - \frac{1}{M}(\mathbf{A}x_k - a)\right] - t\left[x_{k-1} - \frac{1}{M}(\mathbf{A}x_{k-1} - a)\right],$$

где

$$t = \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}.$$

При этом $\rho_n = 0$ и $\rho_1 = 1 - \sqrt{m/M}$. Интересно отметить, что итерирование по формулам

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{M}(\mathbf{A}x_k - a)$$

дает более медленную сходимость. Здесь $\rho_n = 0$ и $\rho_1 = 1 - m/M$.

Если добиваться равномерного сокращения координат вектора r_k, то, согласно (6), следует найти ε из условия

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{m}{M}}(1+\varepsilon),$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}};$$

при этом, согласно формулам (5) и (6),

$$\rho_1 = \rho_n = \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}, \quad \alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2, \quad \beta = \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2, \quad \gamma = 0,$$

и мы возвращаемся к формулам (2) — (3). Оказалось, что увеличить быстроту сходимости процесса (2) за счет добавления слагаемого $\gamma(\mathbf{A}x_k - \mathbf{A}x_{k-1})$ невозможно. Более того, можно показать, что итерационный процесс, определяемый более общими формулами

$$x_{k+1} = x_k - \alpha(\mathbf{A}x_k - a) + \sum_{i=0}^{m} \beta_i \mathbf{A}^i (x_k - x_{k-1}),$$

будет иметь самую высокую сходимость снова при

$$\alpha = \left(\frac{2}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2, \quad \beta_0 = \left(\frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{M}+\sqrt{m}}\right)^2 \text{ и } \beta_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Возможны и другие значения коэффициентов β_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$, при которых будет достигаться та же скорость сходимости. Однако усилить ее за счет выбора чисел β_i уже невозможно.

Поступила в редакцию
9.10.1961

Цитированная литература

1. G. E. Forsyte. Solving linear algebraic equation can be interesting. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 4, 299—329.
2. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.

ОЦЕНКА СНИЗУ НАИМЕНЬШЕГО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ $-\lambda^2$ УРАВНЕНИЯ $\Delta u + [f(\mathbf{r}) - \lambda^2]\, u = 0$

О. Я. САВЧЕНКО

(Москва)

Для решения u дифференциального уравнения

$$\Delta u + [f(\mathbf{r}) - \lambda^2]\, u = 0, \tag{1}$$

убывающего на бесконечности как $\exp \lambda r, \lambda < 0$, справедливо соотношение (см. [1]):

$$u(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\mathbf{r}_2)\, u(\mathbf{r}_2) \exp \lambda r_{12}}{r_{12}}\, dv. \tag{2}$$

Если $-\lambda^2$ — собственное значение уравнения (1), то u будет ограниченной функцией, и поэтому для любого $\mathbf{r}$ справедливы неравенства

$$|u| \leqslant |u|_{\max}, \tag{3}$$

$$|u| \leqslant \frac{1}{4\pi}|u|_{\max} \int \frac{|f(\mathbf{r}_2)| \exp \lambda r_{12}}{r_{12}}\, dv, \tag{4}$$

$$|u| \leqslant \frac{1}{4\pi}|u|_{\max} \max \int \frac{|f(\mathbf{r}_2)| \exp \lambda r_{12}}{r_{12}}\, dv. \tag{5}$$

Ясно также, что

$$|u|_{\max} \leqslant \frac{1}{4\pi}|u|_{\max} \max \int \frac{|f(\mathbf{r}_2)| \exp \lambda r_{12}}{r_{12}}\, dv \tag{6}$$

и, следовательно,

$$1 \leqslant \frac{1}{4\pi} \max \int \frac{|f(\mathbf{r}_2)| \exp \lambda r_{12}}{r_{12}}\, dv. \tag{7}$$

Из (7) вытекает, что существует нижний предел значений $-\lambda^2$. Действительно, λ больше числа k, определяемого из уравнения

$$\frac{1}{4\pi} \max \int \frac{|f(\mathbf{r}_2)| \exp k r_{12}}{r_{12}}\, dv = 1. \tag{8}$$

Таким образом, число k^2, определенное из (8), оценивает снизу наименьшее собственное значение $-\lambda^2$.

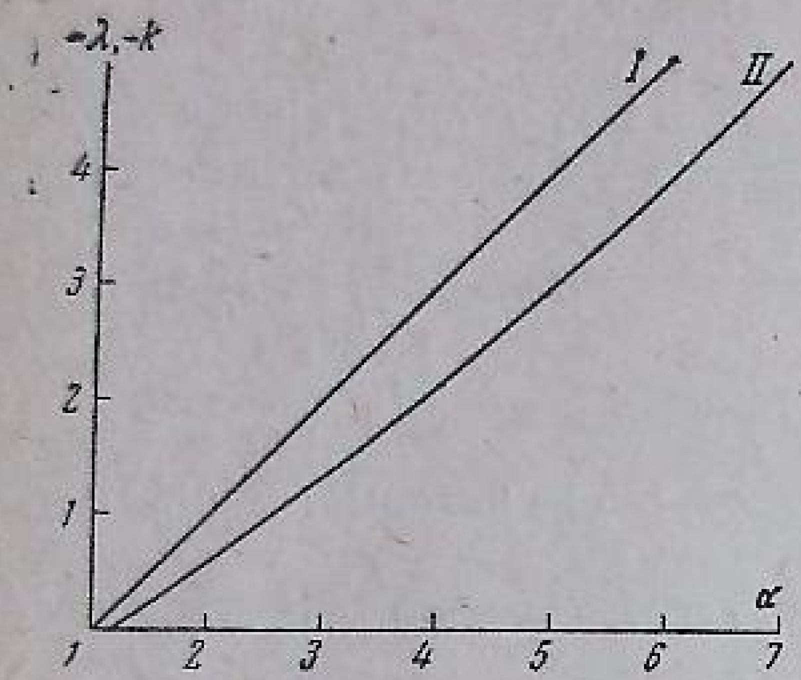
Нетрудно показать, что если $|f(\mathbf{r})|$ — радиальная функция, монотонно не возрастающая с увеличением r, то интеграл в (8) достигает максимального значения при $r_1 = 0$, $r_{12} = r_2 = r$. Таким образом, для такой функции имеем

$$\frac{1}{4\pi}\max\int\frac{|f(\mathbf{r}_2)|\exp kr_{12}}{r_{12}}\,dv = \tag{9}$$

$$= \int_0^\infty r\,|f(r)|\exp krdr.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty r\,|f(r)|\exp krdr = 1. \tag{10}$$



Зависимость величин $-k$ (кривая I) и $-\lambda$ (кривая II) от α

Фигура иллюстрирует точность предлагаемой оценки для уравнения (см. [2])

$$\Delta u + [\alpha^2\exp(-r) - \lambda^2]\,u = 0. \tag{11}$$

Поступила в редакцию
26.09.1961

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
2. В. И. Коган, В. М. Галицкий. Сборник задач по квантовой механике. М., Гостехиздат, 1956.

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

С. К. ГОДУНОВ, А. В. ЗАБРОДИН

(*Москва*)

В этой заметке будет описан простой способ построения устойчивых разностных уравнений второго порядка точности для многомерных нестационарных задач. Мы разберем подробно двумерный случай.

Пусть решается уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU + BU,$$

де A и B — некоторые дифференциальные операторы, применяемые к вектору U. Если U в момент времени t представляет собой функцию двух переменных x и y, можно, например, считать, что оператор A содержит лишь дифференцирование по x, а оператор B — лишь дифференцирование по y.

Предположим, что для уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial t} = AV, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = BW$$

мы умеем построить разностные схемы второго порядка точности, т. е. операторы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ такие, что

$$V(t+\tau) = \widetilde{A}\cdot V(t) + o(\tau^3), \qquad \|A\| \leqslant 1,$$
$$W(t+\tau) = \widetilde{B}W(t) + o(\tau^3), \qquad \|B\| \leqslant 1.$$

Построим оператор $\widetilde{C} = \frac{1}{2}(\widetilde{A}\widetilde{B} + \widetilde{B}\widetilde{A})$. Очевидно, что $\|C\| \leqslant 1$. Легко также ...рить, что

$$U(t+\tau) = \widetilde{C}U(t) + o(\tau^3).$$

...ом деле,

$$\widetilde{A} = E + \tau A + \frac{\tau^2}{2}A^2 + o(\tau^3),$$

$$\widetilde{B} = E + \tau B + \frac{\tau^2}{2}B^2 + o(\tau^3).$$

...тавляя эти выражения в формулу для $\widetilde{C}$, получим

$$\widetilde{C} = E + \tau(A+B) + \frac{\tau^2}{2}(A+B)^2 + o(\tau^3).$$

В качестве примера рассмотрим линеаризованную систему уравнений газовой ...мики

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU + BU,$$

...

$$U = (u_x, u_y, p), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}.$$

...м построение оператора $\widetilde{A}U$, т. е. разностной схемы для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = AU. \tag{1}$$

...и вместо U рассмотреть вектор $U^* = (u_x + p, u_y, u_x - p)$, то (1) примет вид

$$\frac{\partial U^*}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} U^*. \tag{2}$$

...честве разностной схемы для уравнения (2) второго порядка точности и устой...й при любом отношении шага по времени τ к шагам по пространству h_x, h_y ...но взять, например, такую (под $(f)^l_{m,n}$ и т. д. понимаем значение соответствую...й величины в точке сетки с координатами $l\tau, mh_x, nh_y$):

$$(u_x + p)^{l+1}_{m,n} = [(U+P)^{l+1/2}_{m,n} - (U+P)^{l+1/2}_{m-1,n}]\frac{\tau}{h_x} + (u_x+p)^l_{m,n},$$
$$(u_x - p)^{l+1}_{m,n} = [(U-P)^{l+1/2}_{m+1,n} - (U-P)^{l+1/2}_{m,n}]\frac{\tau}{h_x} + (u_x-p)^l_{m,n}, \tag{3}$$
$$(u_y)^{l+1}_{m,n} = (u_y)^l_{m,n},$$

...$(U+P)^{l+1/2}_{m,n}$, $(U-P)^{l+1/2}_{m,n}$ определяются из следующих систем уравнений:

$$\frac{(U+P)^{l+1/2}_{m,n} - (U+P)^{l+1/2}_{m-1,n}}{h_x} = -\frac{(U+P)^{l+1/2}_{m,n} - (u_x+p)^l_{m,n}}{\tau},$$

$$\frac{(U-P)^{l+1/2}_{m+1,n} - (U-P)^{l+1/2}_{m,n}}{h_x} = \frac{(U-P)^{l+1/2}_{m,n} - (u_x-p)^l_{m,n}}{\tau}.$$

Вернувшись в формулах (3) к компонентам вектора U, получим оператор $\widetilde{A}U$. ...ратор $\widetilde{B}U$ строится по матрице B аналогичным способом. Отличие состоит в том, ...переменная x и компонента u_x заменяются на y и u_y.