

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИОННЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Н. Оравский

(Новосибирск)

Часто состояния разреженной плазмы неустойчивы по отношению к возбуждению различного рода колебаний. Из-за нелинейного взаимодействия волн в таких случаях возможно возникновение турбулентного режима. Для того чтобы описать, хотя бы качественно, эволюцию какого-либо спектра колебаний, необходимо знать механизмы нелинейного взаимодействия волн, приводящие к возбуждению и затуханию колебаний. Хорошо известно, что на малые колебания при наличии волны конечной амплитуды, образно говоря, действует «вынуждающая» сила. При этом возбуждается находящаяся в резонансе кратная гармоника. Это не единственный механизм возбуждения волн из-за нелинейного взаимодействия гармоник. Дело в том, что малые синусоидальные колебания, распространяющиеся независимо в однородной плазме, при наличии волны конечной амплитуды оказываются, вообще говоря, связанными. Связь волн через начальную амплитуду может привести, в частности, к одновременному возбуждению группы волн. Такой механизм возбуждения волн особенно хорошо исследовать тогда, когда нет возбуждения кратных гармоник, т. е. при решении задач устойчивости нелинейных установившихся колебаний¹.

В предлагаемой работе исследована устойчивость нелинейных установившихся ионных продольных колебаний плазмы в магнитном поле. Показано, что при определенных значениях параметров плазмы ионные продольные колебания неустойчивы по отношению к возбуждению двух поперечных волн.

1. Сущность применяемого метода состоит в следующем. В системе координат, движущейся с волной, коэффициенты в уравнениях для малых отклонений от установившегося движения (которое в дальнейшем будем называть «фоном») не зависят от времени. Поэтому зависимость от времени всех величин, характеризующих малые отклонения от фона, может быть выбрана в виде $\exp(i\Omega t)$. Систему уравнений, описывающих динамику малых возмущений, символически можно записать в виде

$$(H_0^\vee + H_1^\vee)\varphi = \Omega\varphi \quad (1)$$

где H_0^\vee — линейный дифференциальный самосопряженный оператор, описывающий колебания однородной плазмы с собственными функциями φ_Ω пропорциональными $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ и собственными значениями $\Omega^{(0)}$, удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\Omega^{(0)} = \Omega^{(0)}(\mathbf{k})$; H_1^\vee — линейный дифференциальный оператор, зависящий от фона и стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды фона.

При исследовании устойчивости волн малой амплитуды H_1^\vee мало и можно воспользоваться теорией возмущений. Задача состоит в отыскании поправки $\omega^{(1)}$ к собственной частоте $\Omega^{(0)}$. В первом приближении теории возмущений $\omega^{(1)}$ пропорциональна матричному элементу $\langle \varphi_\Omega | H_1^\vee | \varphi_\Omega \rangle$, причем пространственная зависимость H_1^\vee характеризуется множителями $\exp(\pm i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r})$. Очевидно, $\omega^{(1)}$ отлично от нуля лишь в том случае, когда одному $\Omega^{(0)}$ соответствуют по меньшей мере два волновых вектора различных по модулю (эти вектора обозначим через \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2) и они связаны между собой соотношением

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 \quad (2)$$

¹ Нелинейные установившиеся волны в плазме рассматривались во многих работах (см., например, [1]), где сделан обзор некоторых из них.

Это равенство не изменяется и при переходе к лабораторной системе координат. Частоты же ω_1 и ω_2 , соответствующие волновым векторам \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в лабораторной системе координат связаны соотношением

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2 \quad (3)$$

где ω_0 — частота колебаний фона в лабораторной системе координат.

Следовательно, неустойчивость того или иного вида колебаний может возникнуть (в первом порядке рассматриваемой теории возмущений) только в том случае, если существуют малые отклонения от фона в виде суммы двух волн, для которых выполняются условия (2) и (3). (Для разных ветвей колебаний могут возникнуть «запреты», связанные с поляризацией волн.)

2. Можно показать, что нелинейные установившиеся ионные продольные колебания (такие колебания существуют, как известно, при $p_i \ll p_l$) устойчивы в первом порядке теории возмущений по H_1 в плазме без магнитного поля. Здесь будет исследована устойчивость таких колебаний по отношению к одновременному возбуждению двух поперечных волн в плазме с магнитным полем.

Все величины, характеризующие фон, можно представить в виде

$$A_i = A_{i0} + 2\delta A_i(k_0) \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{r}') + O(\delta A_i^2) \quad (4)$$

где \mathbf{k}_0 — волновой вектор «фона» ($\mathbf{k}_0 \parallel \mathbf{H}_0$), $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}t$, \mathbf{u} — фазовая скорость волны.

Так как устойчивость будет исследоваться в первом порядке теории возмущений по δA_i , слагаемое $O(\delta A_i^2)$ можно не учитывать.

Гидродинамические уравнения, описывающие распространение поперечных волн на «неоднородном» фоне, имеют вид¹

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \cos(k_0 r') \delta \mathbf{v}_i \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_i &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{H}_0 + \frac{e}{c} 2 \cos(k_0 r') \delta \mathbf{v}_i \times \mathbf{H} \\ m \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2 \cos(k_0 r') \delta \mathbf{v}_l \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_l &= -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} \mathbf{v}_l \times \mathbf{H}_0 - \frac{e}{c} 2 \cos(k_0 r') \delta \mathbf{v}_l \cdot \mathbf{H} \quad (5) \\ \text{rot } \mathbf{H} &= 4\pi n_0 e \frac{1}{c} \left(1 + 2 \frac{\delta n}{n_0} \cos(k_0 r') \right) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_l) \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned}$$

Здесь индексы i и e относятся соответственно к ионным и электронным величинам; \mathbf{H}_0 — постоянное магнитное поле; \mathbf{E} и \mathbf{H} — электрическое и магнитное поля поперечных волн, распространяющихся вдоль \mathbf{H}_0 . Выбирая ось x вдоль магнитного поля из (5), легко получить следующую систему уравнений для величин, описывающих динамику рассматриваемых волн:

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\delta v_i \cos k_0 \xi \frac{\partial}{\partial x} \right) w &= \frac{H_0}{4\pi n_0} \left(1 - 2 \cos k_0 \xi \frac{\delta n}{n_0} \right) \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= H_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(1 - 2 \cos k_0 \xi \frac{\delta n}{n_0} \right) \frac{\partial H}{\partial x} \mp i \frac{c_l H_0}{m \omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - 2 \cos k_0 \xi \frac{\delta n}{n_0} \right) \frac{\partial H}{\partial x} - \\ &\quad - 2\delta v_i \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{H} \cos k_0 \xi) + \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \cos k_0 \xi \delta v_i \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) \quad (6) \\ (\xi &= x + ut, w = v_{iy} \pm i v_{iz}, H = H_y \pm i H_z) \end{aligned}$$

Здесь ω_0 — электронная ленгмюровская частота.

¹ Так как давление не дает вклада в поперечные составляющие, член с давлением не записан. Кроме того, в (5) используется условие $n_{0l} = n_{0i} = n_0$.

В нулевом приближении пространственно-временная зависимость иско-
мых величин может быть представлена в виде

$$e^{i\Omega t} \{B_1 e^{ik_1 z} + B_2 e^{ik_2 z}\}$$

Тогда из (6) можно получить систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} w_{1,2} + \frac{k_{2,1} \delta v}{\omega_{1,2}} w_{2,1} &= \frac{k_{1,2} H_0}{4\pi n_0 M \omega_{1,2}} H_{1,2} - \frac{H_0 \delta n}{4\pi n_0^2 M \omega_{1,2}} k_{2,1} H_{2,1} (\omega_{1,2} = \Omega + k_{1,2} v_0) \\ \omega_{1,2} \left(1 + \frac{k_{1,2}^2 c^2}{\omega_0^2}\right) H_{1,2} &= H_0 k_{1,2} w_{1,2} + \frac{\delta n}{n_0} \frac{k_{2,1} k_{1,2} c^2 \omega_{1,2}}{\omega_0^2} H_{2,1} \pm \frac{k_{1,2}^2 c^2 \omega_H}{\omega_0^2} H_{1,2} \mp \\ &+ \frac{k_{1,2} k_{2,1} c^2 \omega_H \delta n}{\omega_0^2 n_0} H_{2,1} - k_{1,2} \delta v H_{2,1} - k_{1,2} \delta v H_{2,1} - \frac{k_{2,1}^2 c^2}{\omega_0^2} k_{1,2} \delta v H_{2,1} \end{aligned} \quad (7)$$

Приравняв нулю определитель системы, получаем следующее вы-
ражение для $\omega^{(1)2}$ — квадрата поправки $k\Omega^{(0)}$

$$\begin{aligned} \omega^{(1)2} &= \left(\frac{\delta v_i}{u}\right)^2 A^2 \left\{ k_1 u \left(1 + \frac{k_2^2 c^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{k_2}{k_1} \frac{k_1^2 v_A^2 - \omega_1^2}{\omega_1} + \frac{k_1 k_2 v_A^2}{\omega_1} \left(\frac{k_2 u}{\omega_2} - 1\right) \right\} \times \\ &\times \left\{ k_2 u \left(1 + \frac{k_1^2 c^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{k_1}{k_2} \frac{k_2^2 v_A^2 - \omega_2^2}{\omega_2} + \frac{k_1 k_2 v_A^2}{\omega_2} \left(\frac{k_1 u}{\omega_1} - 1\right) \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$A^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\{\omega_1^2 (1 + k_1^2 c^2 / \omega_0^2) + k_1^2 v_A^2\} \{\omega_2^2 (1 + k_2^2 c^2 / \omega_0^2) + k_2^2 v_A^2\}} \quad (9)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ — частота колебаний в принятой системе координат.

Используя (2), (3), (8), можно показать, что длинноволновые ионные
продольные колебания ($k_0 c \ll \omega_{0i}$) при $n_0 T_e > 2 (H^2 / 8\pi)$ неустойчивы
по отношению к возбуждению двух альфвеновских волн. При этом
выражение для инкремента нарастания этих волн имеет простой вид

$$v \approx \frac{\delta v_i}{u} \frac{k_0 u}{4} \sqrt{1 - \left(\frac{v_A}{u}\right)^2} \quad (10)$$

Так как $T_i \ll T_l$, условие $n_0 T_l > 2 (H^2 / 8\pi)$ совместимо с условием
 $n_0 T_i \ll 2, (H^2 / 8\pi)$, необходимым для существования альфвеновских волн.

Условия возбуждения косых волн здесь не рассматривались. Для та-
ких волн качественная картина будет аналогична исследованной выше.

В заключение отметим, что роль ионных продольных колебаний мо-
гут играть модулированные ионные пучки. Для них T_l следует взять рав-
ной Mv^2 , где v — скорость движения пучка.

Автор благодарен Р. З. Сагдееву за советы и стимулирующие дискуссии.

Поступила 8 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Ядерный синтез. Нелинейные колебания плазмы. Международное агентство по атомной энергии. 1961, т. 1, 82.