# О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Г. М. Заславский*

(*Новосибирск*)

В работе [1] была построена гидродинамика плазмы в магнитном поле, когда время столкновений велико по сравнению с характерными временами процессов. Роль столкновений при этом играло сильное магнитное поле, закручивающее ионы, а разложение функций распределения велось по степеням ларморовского радиуса. В настоящей работе при помощи метода Чу, Гольдбергера и Лоу выводятся уравнения гидродинамики релятивистской плазмы в магнитном поле и решается задача о распространении волн малой амплитуды. В последнем случае легко получить критерий устойчивости для волн поперек магнитного поля, что сделать при помощи кинетического уравнения затруднительно.

**§ 1. Вывод основных уравнений.** Релятивистское кинетическое уравнение для функции распределения ионов запишем в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \qquad (1.1)$$

Разлагая $f$ по степеням ларморовского радиуса

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots \qquad (1.2)$$

получаем систему зацепляющихся уравнений, которая разрешима, вообще говоря, лишь при $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Критерием выполнимости последнего для релятивистской плазмы является

$$\frac{\omega_{oe}}{\omega_H} \sim \left(\frac{cM^2\gamma_i^2 n}{m\gamma_e H^2}\right)^{1/2} \gg 1 \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \qquad (1.3)$$

Здесь $\omega_{oe}$ — плазменная частота электронов; $\omega_H$ — ларморовская частота ионов, $M$ и $m$ — соответственно масса ионов и электронов, $n$ — плотность, индекс $i$ относится к ионам, $e$ — к электронам. При условии (1.3) более подвижные электроны снимают электрическое поле, параллельное $H$, и можно построить систему гидродинамических уравнений для ионов. Заметим, что эти уравнения справедливы также для электронов, если нерелятивистские ионы оказываются более подвижными, чем релятивистские электроны.

Если $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, то, как известно, можно перейти в систему отсчета, в которой $\mathbf{E} = 0$ $(\mathbf{E} < \mathbf{H})$. Скорость такой системы равна

$$V = c\,\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}{H^2} \qquad (1.4)$$

Подставляя (1.4) и (1.2) в (1.1) и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим аналогично [2] уравнения для $f_0$ и $f_1$

$$[(\mathbf{v} - \mathbf{V})\times\mathbf{H}]\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \qquad ic\,\frac{u_i}{u_4}\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = -\frac{e}{c}[(\mathbf{v} - \mathbf{V})\times\mathbf{H}]\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \qquad (1.5)$$

где $u_i$ и $x_i$ — соответственно векторы скорости и координат (здесь и в дальнейшем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, 4, а греческие индексы — значения 1, 2, 3, по дважды повторяющимся индексам производится суммирование, $x_4 = ict$.

Определим моменты функции распределения $f_0$ обычным образом

$$nU_i = ic\int \frac{d^3p}{u_4} u_i f_0, \quad T_{ik} = ic\int \frac{d^3p}{u_4} p_i u_k f_0, \quad T_{ikl} = ic\int \frac{d^3p}{u_4} p_i p_k u_l f_0 \qquad (1.6)$$

Здесь $U_i$ — четыре скорости усредненного движения, $T_{ik}$ — тензор энергии-импульса.

Как показано в [3], класс функций, удовлетворяющих первому уравнению (1.5), имеет вид

$$f_0 = f_0\,(u_i U_i, \quad \varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm}) \qquad (1.7)$$

Здесь $F_{lm}$ — тензор электромагнитного поля, $\varepsilon_{iklm}$ — единичный тензор, антисимметричный по всем индексам, а

$$R_i = \frac{1}{2\sqrt{H^2 - E^2}}\, \varepsilon_{iklm} U_k F_{lm} \qquad (1.8)$$

причем в собственной системе отсчета ($U_\alpha = 0$) $R_3 = i$, $R_1 = R_2 = R_4 = 0$ и, кроме того,

$$R_i U_i = 0, \qquad R_i^2 = -1 \qquad (1.9)$$

В дальнейшем рассматривается класс функций вида

$$f_0 = f_0\,(u_i U_i, \; (\varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm})^2) \qquad (1.10)$$

или в собственной системе отсчета

$$f_0 = f_0\,(u_4, (\mathbf{uH})^2) \qquad (1.11)$$

Это означает, что рассматривается плоская задача, в которой отсутствуют переносы тепла вдоль магнитного поля.

Выражение для $T_{ik}$ в произвольной системе отсчета с учетом (1.10) получено в [3] и имеет вид

$$T_{ik} = (P_\perp + P_\varepsilon)\, U_i U_k + P_\perp (\delta_{ik} + R_i R_k) - P_\parallel R_i R_k, \qquad (1.12)$$

где

$$T_{11} = T_{22} = P_\perp, \quad T_{33} = P_\parallel, \quad T_{44} = -P_\varepsilon \quad \text{при } U_\alpha = 0 \qquad (1.13)$$

В собственной системе отсчета, учитывая (1.14), имеем для компонент $T_{ikl}$, не равных нулю

$$T_{114} = T_{224} = T_\perp, \quad T_{334} = T_\parallel, \quad T_{444} = -T_\varepsilon \qquad (1.14)$$

Учитывая (1.14), можно записать выражение для $T_{ikl}$ в произвольной системе отсчета

$$iT_{ikl} = (3T_\perp + T_\varepsilon)\, U_i U_k U_l + T_\perp\,[(\delta_{ik} + R_i R_k)\, U_l + (\delta_{il} + R_i R_l) U_k + (\delta_{kl} + R_k R_l)\, U_i] - T_\parallel (R_i R_k U_l + R_i R_l U_k + R_k R_l U_i) \qquad (1.15)$$

Умножая второе уравнение (1.5) последовательно на 1, $p_k$, $p_k p_l$ и интегрируя по трехмерному пространству импульсов, получаем соответственно

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(nU_i) = 0 \qquad (1.16)$$

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{e}{c}\int d^3p p_i\,[(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{H}]\, \frac{\partial f_1}{\partial p} \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial T_{ikl}}{\partial x_l} = -\frac{e}{c}\int d^3p p_i p_k\,[(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{H}]\, \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \qquad (1.18)$$

Первое уравнение есть обычное уравнение непрерывности. Из (1.17) можно исключить правую часть аналогично [1], используя уравнения

Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e \int d^3p\,(f_0 + f_1 - f_e)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi e \int d^3p\,\mathbf{U}\,(f_0 + f_1 - f_e)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Это дает

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -F_{ik}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l} \tag{1.19}$$

что и следовало ожидать из законов сохранения. Из (1.18) нетрудно получить

$$\frac{\partial (T_{11l} + T_{22l})}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial T_{33l}}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial T_{44l}}{\partial x_l} = 0 \tag{1.20}$$

Так как $T_{iil} = -(mc)^2\,nU_l$, то в силу (1.19) последнее уравнение есть следствие первых двух.

Уравнения (1.16), (1.19), (1.20) образуют замкнутую систему гидродинамических уравнений, причем соотношения (1.20) играют роль уравнений состояния. В нерелятивистском случае уравнения состояния получаются автоматически [1], так как в (1.20) не входят новые параметры, кроме тех, что уже содержатся в (1.16), (1.19). В релятивистском случае положение существенно меняется, так как появляются новые параметры ($P_\varepsilon$, $T_\perp$, $T_\parallel$, $T_\varepsilon$), которые, однако, не независимы и все выражаются через $n$, $P_\perp$, $P_\parallel$. Связь между (1.14) и (1.13) в общем случае неизвестна и для определения ее надо делать модельные предположения.

**§ 2. Волны малой амплитуды.** При рассмотрении волн малой амплитуды будем считать все параметры не зависящими от $x_i$. Тогда можно перейти в собственную систему отсчета. Отклонения параметра $a$ от равновесного значения в собственной системе отсчета обозначим через $\delta a \sim \exp i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$.

Выбирая ось $z$ вдоль $\mathbf{H}$ и учитывая, что $\delta U_4 = 0$, имеем из (1.18)

$$\delta R_1 = i\frac{\delta H_x}{H}, \quad \delta R_2 = i\frac{\delta H_y}{H}, \quad \delta R_3 = 0, \quad \delta R_4 = -i\delta U_z \tag{2.1}$$

Из (1.12) с учетом (2.1) получаем

$$\begin{gathered}
\delta T_{11} = \delta T_{22} = \delta P_\perp, \qquad \delta T_{33} = \delta P_\parallel, \qquad \delta T_{44} = -\delta P_\varepsilon \\
\delta T_{12} = 0, \qquad \delta T_{13} = (P_\parallel - P_\perp)\frac{\delta H_x}{H}, \qquad \delta T_{23} = (P_\parallel - P_\perp)\frac{\delta H_y}{H} \\
\delta T_{14} = (P_\varepsilon + P_\perp)\,i\delta U_x, \quad \delta T_{24} = (P_\varepsilon + P_\perp)\,i\delta U_y, \quad \delta T_{34} = (P_\varepsilon + P_\parallel)\,i\delta U_z
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Аналогично получаем из (1.15)

$$\begin{gathered}
\delta T_{114} = \delta T_{224} = i\delta T_\perp, \qquad \delta T_{334} = i\delta T_\parallel, \qquad \delta T_{444} = -i\delta T_\varepsilon \\
\delta T_{111} = 3T_\perp \delta U_x, \qquad \delta T_{222} = 3T_\perp \delta U_y, \qquad \delta T_{333} = 3T_\parallel \delta U_z \\
\delta T_{112} = T_\perp \delta U_y, \qquad \delta T_{113} = T_\perp \delta U_z \\
\delta T_{221} = T_\perp \delta U_x, \qquad \delta T_{223} = T_\perp \delta U_z \\
\delta T_{331} = T_\parallel \delta U_x, \qquad \delta T_{332} = T_\parallel \delta U_y \\
\delta T_{144} = -(T_\varepsilon + 2T_\perp)\,\delta U_x, \qquad \delta T_{244} = -(T_\varepsilon + 2T_\perp)\,\delta U_y \\
\delta T_{344} = -(T_\varepsilon + 2T_\perp)\,\delta U_z
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Вместо величины $\delta U$ удобно ввести смещение $\xi$, определяемое, как

$$\delta \mathbf{U} = \frac{1}{c}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -i\frac{\omega}{c}\xi \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) уравнение непрерывности (1.16) дает

$$\frac{\delta n}{n} = -i\mathbf{k}\cdot\xi \tag{2.5}$$

Линеаризация уравнений (1.19) и (1.20) дает

$$\frac{\partial \delta T_{ik}}{\partial x_k} = -F_{ik}\frac{\partial \delta F_{kl}}{\partial x_l} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial(\delta T_{11l} + \delta T_{22l})}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial \delta T_{33l}}{\partial x_l} = 0, \qquad \frac{\partial \delta T_{44l}}{\partial x_l} = 0 \tag{2.7}$$

Подставляя (2.2) в (2.6), получаем

$$k_x\delta P_\perp + \frac{P_\parallel - P_\perp}{H}k_z\delta H_x + i\frac{\omega^2}{c^2}(P_\varepsilon + P_\perp)\xi_x = -\frac{i}{4\pi}[\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\delta\mathbf{H})]_x \tag{2.8}$$

$$k_y\delta P_\perp + \frac{P_\parallel - P_\perp}{H}k_z\delta H_y + i\frac{\omega^2}{c^2}(P_\varepsilon + P_\perp)\xi_y = -\frac{i}{4\pi}[\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\delta\mathbf{H})]_y \tag{2.9}$$

$$k_z\delta P_\parallel + \frac{P_\parallel - P_\perp}{H}(k_x\delta H_x + k_y\delta H_y) + i\frac{\omega^2}{c^2}(P_\varepsilon + P_\perp)\xi_z = 0 \tag{2.10}$$

$$\delta P_\varepsilon + i(P_\varepsilon + P_\perp)(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) + i(P_\varepsilon + P_\parallel)(\mathbf{k}_\parallel\cdot\xi_\parallel) = 0 \tag{2.11}$$

Учтем теперь уравнение

$$\frac{\partial \delta\mathbf{H}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,(\delta\mathbf{U}\times\mathbf{H})$$

которое дает

$$\delta\mathbf{H} = i\,[\mathbf{k}x\,(\xi\times\mathbf{H})], \qquad \delta H = -iH(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) \tag{2.12}$$

Умножим (2.8), (2.9) и (2.10) соответственно на $k_x$, $k_y$, $k_z$; сложим (2.8) и (2.9) после умножения; учитывая (2.12), имеем

$$k_\perp^2\delta P_\perp + ik_\parallel^2(P_\parallel - P_\perp)(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) + i\frac{\omega^2}{c^2}(P_\varepsilon + P_\perp)(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) =$$
$$= i\frac{H^2}{4\pi}(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp)(k_\perp^2 - k_\parallel^2) \tag{2.13}$$
$$k_\parallel^2\delta P_\parallel + ik_\parallel^2(P_\parallel - P_\perp)(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) + i\frac{\omega^2}{c^2}(P_\varepsilon + P_\parallel)(\mathbf{k}_\parallel\cdot\xi_\parallel) = 0$$

Подстановка (2.3) в (2.7) приводит к уравнениям

$$\frac{\delta T_\perp}{T_\perp} = -2i(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) - i(\mathbf{k}_\parallel\cdot\xi_\parallel), \qquad \frac{\delta T_\parallel}{T_\parallel} = -i(\mathbf{k}_\perp\cdot\xi_\perp) - 3i(\mathbf{k}_\parallel\cdot\xi_\parallel) \tag{2.14}$$

или, учитывая (2.5),

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{2}{5}\frac{\delta T_\perp}{T_\perp} + \frac{1}{5}\frac{\delta T_\parallel}{T_\parallel} \tag{2.15}$$

Запишем $\delta P_\perp$ и $\delta P_\parallel$ следующим образом:

$$\delta P_\perp = \left(\frac{\partial P_\perp}{\partial P_\varepsilon}\right)_0\delta P_\varepsilon, \qquad \delta P_\parallel = \left(\frac{\partial P_\parallel}{\partial P_\varepsilon}\right)_0\delta P_\varepsilon \tag{2.16}$$

где нулевой индекс означает, что производная берется по адиабатическому процессу, и введем обозначения

$$s_\perp^2 = c^2\left(\frac{\partial P_\perp}{\partial P_\varepsilon}\right)_0, \qquad s_\parallel^2 = c^2\left(\frac{\partial P_\parallel}{\partial P_\varepsilon}\right)_0 \tag{2.17}$$

Подставляя (2.16), (2.17) и (2.11) в (2.13) и приравнивая детерминант системы нулю, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^4 + \omega^2 \left\{ \frac{1}{n_\perp m} \left[ k_\parallel{}^2 A - k_\perp{}^2 \left( s_\perp{}^2 n_\perp + \frac{H^2}{4\pi} \right) \right] - k_\parallel{}^2 s_\parallel{}^2 \right\} -$$

$$- \frac{k_\parallel{}^2 s_\parallel{}^2}{n_\perp m} \left( k_\parallel{}^2 A - k_\perp{}^2 \frac{H^2}{4\pi} \right) + \frac{k_\parallel{}^2 k_\perp{}^2 s_\perp{}^2}{n_\perp m} (P_\parallel - P_\perp) = 0 \qquad (2.18)$$

Здесь

$$A = P_\parallel - P_\perp - \frac{H^2}{4\pi}, \qquad n_\perp = \frac{1}{mc^2}(P_\perp + P_\varepsilon), \qquad n_\parallel = \frac{1}{mc^2}(P_\parallel + P_\varepsilon) \quad (2.19)$$

Для волны, распространяющейся вдоль магнитного поля ($k_\perp = 0$, $k_\parallel = k$), имеем

$$\omega_1{}^2 = \frac{k^2}{mn_\perp} \left( \frac{H^2}{4\pi} + P_\perp - P_\parallel \right), \qquad \omega_2{}^2 = k^2 s_\parallel{}^2 \qquad (2.20)$$

В нерелятивистском случае формулы (2.20) переходят в обычные [4]. Первая формула (2.20) была получена С. С. Моисеевым непосредственно из кинетического уравнения [1]. Отметим, что эта формула определяется независимо от вида уравнений состояния, кроме того, из нее видно, что на магнитогидродинамической волне возможна неустойчивость при

$$P_\parallel > \frac{H^2}{4\pi} + P_\perp \qquad (2.21)$$

При этом инкременты в $\gamma$ раз меньше, чем в нерелятивистском случае.

Для волны, распространяющейся перпендикулярно к $\mathbf{H}$ ($k_\parallel = 0$, $k_\perp = k$), имеем

$$\omega^2 = \frac{k^2}{n_\perp m} \left( n_\perp s_\perp{}^2 + \frac{H^2}{4\pi} \right) \qquad (2.22)$$

Из (2.20) и (2.22) получаем скорости звука $c_\parallel$ и $c_\perp$ соответственно для волны вдоль магнитного поля и поперек поля.

$$c_\parallel = c \sqrt{\left( \frac{\partial P_\parallel}{\partial P_\varepsilon} \right)_0} \qquad (2.23)$$

$$c_\perp = c \sqrt{\left( \frac{\partial P_\perp}{\partial P_\varepsilon} \right)_0 + \frac{H^2/4\pi}{P_\perp + P_\varepsilon}} \qquad (2.24)$$

Эти выражения совпадают с соответствующими, полученными в [2] из рассмотрения ударной волны, если в (2.24) выразить $H$ через магнитное поле в системе отсчета, движущейся с волной.

В случае, когда $k_\parallel, k_\perp \neq 0$ («косая» волна) условие неустойчивости можно записать в виде

$$k_\parallel{}^2 s_\parallel{}^2 \left( k_\parallel{}^2 A - k_\perp{}^2 \frac{H^2}{4\pi} \right) + k_\parallel{}^2 k_\perp{}^2 s_\perp{}^2 (- P_\parallel + P_\perp) > 0 \qquad (2.25)$$

Рассмотрим волну, распространяющуюся почти перпендикулярно к $\mathbf{H}$ ($\mathbf{k}_\parallel \approx 0$, $\mathbf{k}_\perp \approx \mathbf{k}$). Тогда из (2.25) имеем условие неустойчивости при $P_\perp > P_\parallel$

$$P_\perp > P_\parallel + \frac{s_\parallel{}^2}{s_\perp{}^2} \frac{H^2}{4\pi} \qquad (2.26)$$

---

[1] Частное сообщение.

До сих пор уравнениями состояния (2.7) не пользовались. Записывая

$$\delta P_{\perp} = \left(\frac{\partial P_{\perp}}{\partial T_{\perp}}\right)_0 \delta T_{\perp}, \qquad \delta P_{\parallel} = \left(\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial T_{\parallel}}\right)_0 \delta T_{\parallel} \tag{2.27}$$

и подставляя (2.27) с учетом (2.14) в (2.13), получаем вместо (2.20) и (2.22) соответственно

$$\omega_2^2 = 3\frac{k^2}{n_{\parallel} m} T_{\parallel}\left(\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial T_{\parallel}}\right)_0, \quad \omega^2 = 2\frac{k^2}{n_{\perp} m}\left[T_{\perp}\left(\frac{\partial P_{\perp}}{\partial T_{\perp}}\right)_0 + \frac{H^2}{8\pi}\right] \tag{2.28}$$

Сравнивая (2.20) с (2.28) и (2.22) с (2.28), получаем следующую связь между компонентами тензора $T_{ikl}$ и $T_{ik}$

$$\left(\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial P_{\varepsilon}}\right)_0 = \frac{3}{P_{\parallel} + P_{\varepsilon}} T_{\parallel}\left(\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial T_{\parallel}}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial P_{\perp}}{\partial P_{\varepsilon}}\right)_0 = \frac{2}{P_{\parallel} + P_{\varepsilon}} T_{\perp}\left(\frac{\partial P_{\perp}}{\partial T_{\perp}}\right)_0 \tag{2.29}$$

В ультрарелятивистском случае относительная характеристика анизотропии, т. е. величина $(P_{\parallel} - P_{\perp}) / P_{\perp}$, уменьшается, хотя значение $\Delta P = | P_{\parallel} - P_{\perp} |$ может оставаться большим. Учитывая это, можно написать в пределе

$$P_{\parallel} \sim \frac{1}{3} P_{\varepsilon}, \qquad P_{\perp} \sim \frac{1}{3} P_{\varepsilon}$$

Отсюда получаем вместо (2.29)

$$\frac{4}{9} = \frac{T_{\parallel}}{P_{\parallel}}\left(\frac{\partial P_{\parallel}}{\partial T_{\parallel}}\right)_0, \qquad \frac{2}{3} = \frac{T_{\perp}}{P_{\perp}}\left(\frac{\partial P_{\perp}}{\partial T_{\perp}}\right)_0 \tag{2.30}$$

Уравнения (2.30) после интегрирования дают связь между $T_{\perp}$, $T_{\parallel}$ и $P_{\perp}$, $P_{\parallel}$ в ультрарелятивистском случае

$$T_{\parallel}^{4/9} P_{\parallel}^{-1} = \mathrm{const}, \qquad T_{\perp}^{2/3} P_{\perp}^{-1} = \mathrm{const} \tag{2.31}$$

Компоненты $T_{\perp}$ и $T_{\parallel}$, выраженные через $P_{\perp}$ и $P_{\parallel}$ при помощи (2.31), после подстановки в (1.20) дают дополнительно к системе (1.10), (1.19) уравнения состояния в явном виде.

В заключение благодарю С. С. Моисеева за внимание к работе, а также И. О. Форескина за некоторые замечания.

Поступила 8 V 1962

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. Проблемы современной физики, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1957, т. 7, стр. 139.
2. Заславский Г. М., Моисеев С. С. О состояниях с анизотропной функцией распределения в разреженном релятивистском газе. ПМТФ, 1962, № 1.
3. Заславский Г. М., Моисеев С. С. О поведении некоторых состояний плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле. ПМТФ, 1961, № 6, стр. 24.
4. Bernstein I. B., Trehan S. K. Plasma oscillations. Nuclear fusion, 1960, vol. 1, 3.