

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

В. Н. Ораевский и Р. Э. Сагдеев

Развит метод, позволяющий исследовать устойчивость нелинейных незатухающих периодических движений плазмы не слишком большой амплитуды. Метод применяется для исследования устойчивости нелинейных продольных электронных и ионных колебаний плазмы. Возникающие неустойчивости напоминают распады квазичастиц. Получены критерии неустойчивости. Показано, что ионные колебания устойчивы по отношению к возбуждению произвольных продольных колебаний.

Электронные же продольные колебания неустойчивы по отношению к одновременному возбуждению продольных ионных и электронных колебаний (с другой частотой). В плазме с магнитным полем появляется дополнительная неустойчивость электронных продольных волн. Они неустойчивы по отношению к возбуждению двух поперечных электромагнитных волн (при определенных соотношениях между магнитным полем и параметрами плазмы).

Для исследованных типов неустойчивостей оценены инкременты.

§ 1. Введение

В разреженной плазме, в тех областях фазовых скоростей, где существенно отклонение от линейного закона дисперсии, волны могут распространяться без искажения своей формы из-за нелинейности (см., например, [1]). Искажение формы таких волн может произойти лишь, если они неустойчивы по отношению к малым возмущениям.¹

При изучении устойчивости нелинейных стационарных волн (которые в дальнейшем будем называть „фоном“) удобно перейти в систему координат, движущуюся вместе с волной. Коэффициенты в уравнениях, описывающих динамику малых отклонений от „фона“, в такой системе координат не зависят от времени, и зависимость решений этих уравнений от времени можно выбрать в виде $e^{i\omega t}$. Задача сводится к решению системы уравнений, которая символически может быть записана в виде

$$\hat{L}\varphi = 0, \quad (1.1)$$

где \hat{L} — некоторый линейный дифференциальный оператор. Конкретный вид оператора зависит от фона и собственной частоты ω , в отыскании которой и заключается исследование устойчивости. Оператор \hat{L} можно представить в виде суммы \hat{L}_0 и L_1 , где \hat{L}_0 — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а \hat{L}_1 — дифференциальный оператор, стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды стационарной волны. Для волн малой амплитуды L_1 мало и естественно воспользоваться теорией возмущений. В нулевом приближении

$$\hat{L}_0\varphi = 0 \quad (1.2)$$

описывает колебания однородной плазмы с собственными функциями, пропорциональными e^{ikr} и собственными значениями ω , удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\omega = \omega(k)$. В первом приближении по \hat{L}_1 появляются диагональные матричные элементы $\langle \varphi_\omega | \hat{L}_1 | \varphi_\omega \rangle$,

¹ Для рассматриваемых в дальнейшем параметров плазмы затуханием волн, связанным с учетом теплового движения, можно пренебречь.

причем пространственная зависимость \hat{L}_1 определяется множителями $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. Ясно, что матричные элементы обращаются в нуль, если каждому значению частоты ω соответствует лишь одно значение модуля волнового вектора \mathbf{k} . Первое приближение теории возмущений дает неисчезающий вклад, если существуют „вырожденные“ состояния, для которых одному ω соответствует по меньшей мере два волновых вектора, различных по модулю (\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2). В этом случае между \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 существует следующее соотношение

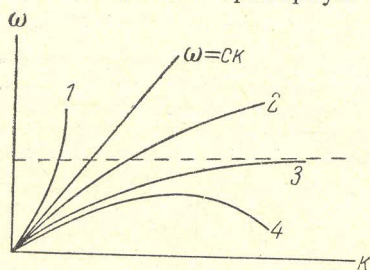
$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2. \quad (1.3)$$

Принадлежность одной частоте запишем в виде

$$\omega_1 = \omega_2. \quad (1.4)$$

Если вернемся теперь от системы координат, движущейся вместе с волной, в лабораторную систему координат, условие (1.3) не изменится, а условие (1.4) примет вид

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega_2, \quad (1.5)$$



где Ω_0 — частота колебаний „фона“, а Ω_1 и Ω_2 — частоты, соответствующие волновым векторам \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 . Условия (1.3) и (1.5) аналогичны условиям распада квазичастиц. Поэтому в дальнейшем будем именовать их „распадными“ условиями, а неустойчивость, возникающую при

этом, „распадом“ колебания с частотой Ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 на колебания с частотами Ω_1 , Ω_2 и волновыми векторами \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 . Распадные условия могут выполняться лишь для спектров определенной формы. На рисунке изображены различные формы спектров. Как легко показать, „распады“ колебаний могут происходить лишь для спектров 1, 4. Колебания, имеющие спектры, подобные спектрам 2 или 3, устойчивы по отношению к „распадам“. Однако при наличии нескольких ветвей в спектре колебаний колебания, характеризующие спектрами, аналогичными спектрам 2 или 3, могут быть неустойчивыми по отношению к „распадам“ на колебания, из которых хотя бы одно не принадлежит данной ветви. Более точно — „распады“ возможны тогда, когда через три точки, соответствующие колебаниям Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 (эти три точки, вообще говоря, могут лежать на разных ветвях) можно провести кривую, подобную либо кривой 1, либо кривой 4. (Для разных ветвей колебаний могут, однако, возникнуть „запреты“, связанные с поляризацией волн).

Хотя изложенный выше метод применим и в случае кинетического описания плазмы, для всех рассматриваемых в дальнейшем случаев будет использован более простой (основанный на гидродинамических уравнениях для ионов и электронов) способ описания плазмы. Такой способ, как известно из теории малых колебаний, дает результаты, аналогичные результатам, полученным из кинетического рассмотрения, в том случае, если фазовые скорости рассматриваемых волн много больше тепловых скоростей.

§ 2. Устойчивость ионных продольных колебаний

Хорошо известно, что в бесстолкновительной плазме при $p_i \ll p_e$ (где p_i и p_e — ионное и электронное давление, соответственно) существуют нелинейные стационарные ионные продольные колебания. Если амплитуды таких колебаний малы, то для исследования устойчивости применим метод, изложенный во „введении“.

Величины A_i , характеризующие рассматриваемый фон, могут быть записаны в виде

$$A_i = A_{i0} + 2\delta A_i(k_0) \sin \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + 0(\delta A_i^2), \quad (2.1)$$

где \mathbf{k}_0 — волновой вектор.² В дальнейшем мы не будем учитывать слабое $0(\delta A_i^2)$, иными словами, будем исследовать устойчивость основной гармоники, учитывая взаимодействие ее с малыми отклонениями от фона. С этой целью рассмотрим прежде всего, в каких случаях существуют вырожденные состояния, т. е. могут быть выполнены распадные условия. Для отклонений от фона, имеющих вид суперпозиции ионных продольных колебаний, распадные условия не могут быть выполнены. Поэтому фон устойчив по отношению к распаду на сумму двух ионных продольных волн. То же самое можно сказать об устойчивости фона по отношению к распаду на электронную и ионную продольные волны. Вырожденные состояния появляются для отклонений от фона, имеющих вид суммы продольных электронных волн. Устойчивость ионных продольных волн по отношению к распадам на такие колебания и исследуется в дальнейшем. Для простоты ограничимся одномерным случаем, т. е. будем считать, что величины, описывающие динамику малых отклонений от фона, зависят лишь от времени t и координаты x (ось x направлена вдоль \mathbf{k}_0). Гидродинамические уравнения, описывающие поведение продольных электронных волн (на однородном „фоне“) имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) v + \frac{e}{m} E + \frac{1}{mn_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -2\delta v \frac{\partial}{\partial x} (v \sin k_0 x) + \frac{\gamma p_0}{mn_0^3} \frac{\partial}{\partial x} (n \sin k_0 x) 2\delta n, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) n + n_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} [(n\delta v + v\delta n) \sin k_0 x], \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) (p - \gamma \frac{p_0}{n_0} n) = 2\gamma (\gamma - 1) \frac{p_0 \delta n}{n_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) (n \sin k_0 x), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi en, \quad (2.5)$$

где v , n , p , E — соответственно скорость, плотность, давление и электрическое поле, характеризующие малые отклонения величин от фона; m — масса электрона; γ — показатель адиабаты.

В нулевом приближении пространственно временная зависимость искомого величин может быть представлена в виде $e^{i\omega t} [C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x}]$. Тогда в первом приближении из уравнений (2.2)–(2.5) легко получить следующую систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} i\omega_1 v_1 + \frac{e}{m} E_1 + \frac{ik_1}{mn_0} p_1 &= -k_1 \delta v v_2 + \gamma \frac{p_0}{mn_0^3} k_1 \delta n n_2, \\ i\omega_2 v_2 + \frac{e}{m} E_2 + \frac{ik_2}{mn_0} p_2 &= k_2 \delta v v_1 - \gamma \frac{p_0}{mn_0^3} k_2 \delta n n_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} i\omega_1 n_1 + ik_1 n_0 v_1 &= -k_1 (\delta v n_2 + \delta n v_2), \\ i\omega_2 n_2 + ik_2 n_0 v_2 &= k_2 (\delta v n_1 + \delta n v_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

² Напомним, что используется система координат, движущаяся вместе с волной.

$$\left. \begin{aligned} i \left(p_1 - \gamma \frac{p_0}{n_0} n_1 \right) &= \gamma (\gamma - 1) \frac{p_0}{n_0^2} \delta n n_2, \\ i \left(p_2 - \gamma \frac{p_0}{n_0} n_2 \right) &= -\gamma (\gamma - 1) \frac{p_0}{n_0^2} \delta n n_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$E_{1,2} = i \frac{4\pi e}{k_{1,2}} n_{1,2}, \quad (2.9)$$

где $\omega_{1,2} = \omega + k_{1,2} v_0$.

Из условия обращения в нуль определителя системы находим выражение для v^2 — квадрата мнимой части частоты

$$v^2 = - \left(\frac{\delta v}{v_0} \right)^2 \frac{1}{4\Omega_1 \Omega_2} [\Omega_1 \Omega_2 + (\gamma - 2) k_1 k_2 v_T^2 + v_0 (k_1 \Omega_2 + k_2 \Omega_1)]^2, \quad (2.10)$$

где Ω_1, Ω_2 — частоты электронных колебаний в лабораторной системе; выражения, связывающие $\Omega_{1,2}$ с $k_{1,2}$, как известно, имеют вид $\Omega_{1,2}^2 = \omega_e^2 + k_{1,2}^2 v_T^2$, где ω_e — электронная ленгмюровская частота; $v_T^2 = \frac{\gamma p_0}{m n_0}$. Ω_1, Ω_2, k_1 и k_2 удовлетворяют условиям, которые имеют вид

$$\pm k_0 \sqrt{\frac{T_e}{M} + v_0^2} + \sqrt{\omega_e^2 + k_2^2 v_T^2} = \sqrt{\omega_e^2 + k_1^2 v_T^2}, \quad (2.11)$$

$$\pm |k_1| = k_0 \pm |k_2|, \quad (2.12)$$

где T_e — электронная температура; M — ионная масса. Подставляя решения (2.11), (2.12) в (2.10), видим, что всегда $v^2 > 0$, т. е. ионные колебания устойчивы по отношению к распаду на две продольные электронные волны, распространяющиеся либо вдоль, либо против направления распространения ионных колебаний.

§ 3. Неустойчивость электронных ленгмюровских волн

Распад электронных ленгмюровских волн малой амплитуды на электронную и ионную продольные волны является одним из простейших примеров неустойчивости распадного типа.³

Уравнения для малых возмущений имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) v_i - \frac{e}{M} E_i = -2v_i \frac{\partial}{\partial x} (v_i \sin k_0 x), \quad (3.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) n_i + n_0 \frac{\partial v_i}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} [(n_i \delta v_i + v_i \delta n_i) \sin k_0 x], \quad (3.2)$$

$$e E_i + \frac{T_e}{n_0} \frac{\partial n_e}{\partial x} = \frac{T_e}{n_0^2} \frac{\partial}{\partial x} (n_e 2 \delta n_e \sin k_0 x), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) v_e + \frac{e}{m} E_e + \frac{1}{m n_0} \frac{\partial p}{\partial x} &= -2 \delta v_e \frac{\partial}{\partial x} (v_e \sin k_0 x) + \\ &+ 2 \frac{\gamma p_0 \delta n_e}{m n_0^3} \frac{\partial}{\partial x} (n_e \sin k_0 x), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) n_e + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} = -2 \frac{\partial}{\partial x} [(n_e \delta v_e + v_e \delta n_e) \sin k_0 x], \quad (3.5)$$

³ Устойчивость электронных ленгмюровских колебаний рассматривалась в [2]. При этом не учитывалась возможность появления „вырожденных“ состояний. В частности, не учитывалось движение ионов. При таком подходе было получено, что электронные ленгмюровские колебания устойчивы в любом порядке теории возмущений по L_1 , если они устойчивы лишь в нулевом порядке рассматриваемой теории возмущений.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(p_e - \gamma \frac{p_0}{n_0} n_e\right) = 2 \frac{\gamma(\gamma-1) p_0 \delta n_e}{n_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) (n_e \sin k_0 x), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} = -4\pi n_e e. \quad (3.7)$$

Здесь индексами i и e обозначены ионные и электронные величины, соответственно; u — фазовая скорость фона, остальные обозначения аналогичны обозначениям предыдущего параграфа.

В нулевом приближении считаем, что величины, описывающие ионную волну, пропорциональны $e^{i(\omega t + k_1 x)}$, а электронную $e^{i(\omega t + k_2 x)}$. Не приводя здесь простых, но довольно громоздких выкладок, выпишем выражение для квадрата мнимой части частоты

$$\nu^2 = \left(\frac{\delta v_e}{u}\right)^2 \frac{k_2 u}{4} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \left\{ \Omega_2 + (\gamma - 2) k_2 v_T \frac{v_T}{u} + 0 \left(\frac{m}{M} \Omega_2\right) \right\}, \quad (3.8)$$

где Ω_1 и Ω_2 — частоты ионных и электронных колебаний в лабораторной системе координат.

Распадные условия имеют вид

$$\pm |k_1| = k_0 \pm |k_2|, \quad (3.9)$$

$$\pm k_1 u_T = \sqrt{\omega_e^2 + k_0^2 v_T^2} - \sqrt{\omega_e^2 + k_2^2 v_T^2}, \quad (3.10)$$

где $u_T = \sqrt{\frac{p_0}{n_0 M}}$.

Используя (3.8), (3.9), (3.10), можно показать, что электронные продольные колебания всегда неустойчивы по отношению к распаду на ионные и электронные продольные колебания.

Наиболее неустойчивы достаточно коротковолновые колебания ($k \leq \frac{1}{r_d}$, r_d — дебаевский радиус). Для них

$$\nu_{\max} \sim \frac{\delta v}{u} \sqrt[4]{\frac{m}{M}} \omega_e. \quad (3.11)$$

Выше все вычисления проводились в гидродинамическом приближении, т. е. тепловое движение электронов учитывалось лишь включением электронного давления. Как известно, учет теплового движения приводит также к появлению затухания волн. Затухания электронных волн можно не учитывать, если волновой вектор $k < \frac{1}{r_d}$. Для ионных волн затухание не является экспоненциально малым эффектом, а потому неустойчивость фона фактически будет определяться неравенством

$$\nu - \nu_i > 0, \quad (3.12)$$

где ν_i — декремент затухания ионных колебаний. Как известно, при $p_i \ll p_e$

$$\nu_i \simeq \sqrt{\frac{\pi}{8}} \Omega_1 \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (3.13)$$

Сравнивая, например, (3.13) с (3.11), получаем, что колебания, для которых амплитуды удовлетворяют неравенству

$$\frac{\delta v}{u} > \left(\frac{m}{M}\right)^{3/4}, \quad (3.14)$$

будут неустойчивы (следует помнить, однако, что $\frac{\delta u}{u} < \frac{1}{2}$), причем, как нетрудно показать, в ионные колебания „перекачивается“ доля энергии в $\sqrt{\frac{M}{m}}$ раз меньшая, чем в электронные.

„Распадные“ неустойчивости могут служить дополнительным механизмом бесстолкновительной „диссипации“. При такой „диссипации“, однако, энергия переходит не непосредственно в тепловое движение частиц, а в энергию шумов (нерегулярных колебаний, возникающих вследствие неустойчивостей).

Авторы благодарны И. О. Форескину за помощь при вычислениях.

Литература

- [1] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. Э. Сагдеев. Ядерный синтез, 7, 82, 1961. — [2] D. Montgomery. Phys. Fluids, 3, 274, 1960.

Поступило в Редакцию
31 января 1962 г.