Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 43 *1962* *Вып. 2(8)*

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЗАТУХАНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

В. Е. Захаров, В. И. Карпман

Рассматривается вопрос о поглощении плазменных монохроматических волн конечной (но малой) амплитуды в разреженной плазме. Получено нелинейное искажение электронной функции распределения под действием волны. Вычислен декремент затухания, который оказывается зависящим от амплитуды волны Φ_0 как $\Phi_0^{-3/2}$.

1. Введение

Затухание продольных волн в плазме без столкновений было впервые получено Ландау [1]. Причиной этого затухания является сильное взаимодействие между волной и теми частицами, скорость которых достаточно близка к фазовой скорости волны (в дальнейшем такие частицы называются резонансными). Очевидно, область резонансных частиц по порядку величины определяется неравенством

$$v_f - \Delta v \lesssim v \lesssim v_f + \Delta v, \qquad \Delta v \sim (2e\Phi_0/m)^{1/2}, \tag{1}$$

где Φ_0 — амплитуда потенциала поля волны, а $v_f = \omega/k$ — ее фазовая скорость.

Декремент затухания Ландау находится из линеаризованного кинетического уравнения без интеграла столкновений и равен

$$\gamma_Л = -\frac{\pi\omega_0}{2n} v_f^2 \left.\frac{df_0}{dv}\right|_{v=v_f} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega_0 \left(\frac{v_f}{v_T}\right)^2 \exp\left(-\frac{v_f^2}{2v_T^2}\right), \tag{2}$$

где ω_0 — лэнгмюровская частота, n — плотность плазмы, $v_T = (T/m)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов, а $f_0(v)$ — функция распределения невозмущенного состояния плазмы с температурой T («фоновая» функция распределения). При этом не учитывается обратное влияние плазменных волн на «фон».

В последнее время развита так называемая квазилинейная теория плазменных колебаний [2, 3], позволяющая в первом приближении учесть искажение «фона» под влиянием колебаний. Это искажение проявляется главным образом в том, что на фоновой функции распределения в области резонансных частиц образуется «плато» (в пренебрежении столкновениями). Столкновения же стремятся сделать функцию распределения максвелловской, и окончательная форма последней определяется конкуренцией этих процессов (см. рис. 1). В частности, линеаризованная теория Ландау, не учитывающая нелинейного искажения фона, справедлива в том случае, когда столкновения успевают сделать функцию распределения полностью максвелловской, т. е. для достаточно малых колебаний. Область применимости квазилинейной теории тоже ограничивается малыми волнами, однако их энергия должна быть достаточно малой по сравнению с тепловой, в то время как энергия волн в линейной теории должна быть много меньше тепловой, умноженной на зависящий от частоты столкновений коэффициент, очень малый по сравнению с единицей [2] (см. также Примечание 1 настоящей работы).

Область применимости квазилинейной теории ограничивается еще одним условием: она предполагает средний фон однородным в пространстве и поэтому применима лишь для достаточно широких (в k-пространстве) волновых пакетов и, в частности, совершенно неприменима к плоским волнам, для которых существенна пространственная периодичность фоновой функции распределения в резонансной области.

В настоящей работе рассматривается этот второй предельный случай, а именно нелинейное взаимодействие плазмы с монохроматической лэнгмюровской волной и связанное с этим затухание последней. При этом, как и в квазилинейной теории, мы ограничимся исследованием достаточно малых волн в смысле

$$e\Phi/T \ll 1, \qquad (3)$$

где Φ — потенциал поля волны, а T — температура плазмы.

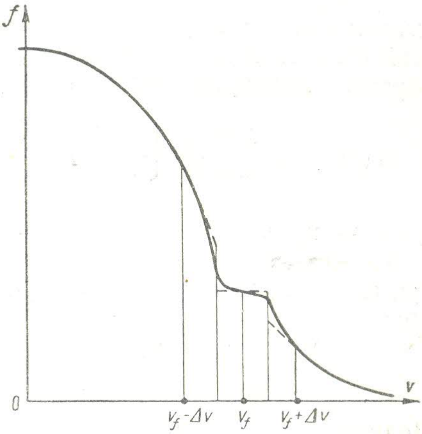

Рис. 1. Форма функции распределения при учете обратного действия волны на «фон». Вне резонансной области функция распределения — максвелловская

2. Основное уравнение

Для малых волн коэффициент поглощения определяется формой функции распределения в резонансной области (1) [2, 3]. Поэтому нас будет интересовать нелинейное искажение $f(v)$ именно в (1). Вне резонансной области мы, как и в [2, 3], можем пренебречь отклонением функции распределения от максвелловской (см. рис. 1.) Это позволяет считать, что фазовая скорость волны определяется так же, как и в линейной теории, а именно

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2 + 3\langle v^2\rangle_0, \qquad \langle v^2\rangle_0 = \int v^2 f_0(v)\, d^3v. \qquad (4)$$

При определении функции распределения в резонансной области существенно учитывать столкновения. Полное пренебрежение последними привело бы к быстрому установлению такого состояния плазмы (типа «плато» на рис. 1), при котором затухание прекратилось бы [2–4]. Таким образом, мы не можем пренебрегать интегралом столкновений в кинетическом уравнении.

Важность учета столкновений в резонансной области даже при очень малой частоте столкновений легко понять из следующих соображений. Время Δt изменения скорости на величину ширины резонансной области благодаря кулоновским столкновениям (с рассеянием на малые углы) по порядку величины равно $\Delta t \sim (\Delta v)^2/D$, где D — коэффициент диффузии в пространстве скоростей: $D \sim v_T^2/\tau_c$. Здесь τ_c — эффективное время релаксации (см., например, [5]), а Δv— выражается соотношением (1). Таким образом,

$$\Delta t \sim \tau_c\,(e\Phi/T). \qquad (5)$$

При достаточно малых $e\Phi/T$ это время становится очень малым, в частности много меньше времени затухания волны, которое дается формулой (42).

Итак, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -\,\mathrm{St}\,(f), \qquad (6)$$

где St (f) — интеграл столкновений, записанный в форме Ландау:

$$\mathrm{St}(f) = \frac{2\pi e^4 L}{m^2}\frac{\partial}{\partial v_i}\int\left(f\frac{\partial f'}{\partial v_k'} - f'\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)\frac{u^2\delta_{ik} - u_i u_k}{u^3}\,d^3u; \tag{7}$$

$u_i = v_i - v_i'$. Правую часть (7) можно линеаризовать, как и в [2], заменив $f' = f(v')$ на $f_0(v')$ — максвелловскую функцию распределения, ибо мы учитываем отклонение $f(v')$ от $f_0(v')$ лишь в резонансной области, а вкладом этой области в интеграл можно пренебречь вследствие ее малости. Таким образом, линеаризованный интеграл столкновений получается в виде [2]

$$\mathrm{St}(f) = -\frac{L\omega_0^4}{4\pi n}\frac{\partial}{\partial v_i}\left\{\frac{1}{v^3}\left[v_i f + \left(v^2\delta_{ik} - v_i v_k - \frac{T}{m}\frac{v^2\delta_{ik} - 3v_i v_k}{2v^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v_k}\right]\right\}, \tag{8}$$

где L — кулоновский логарифм.

Подставив (8) в (6) и интегрируя обе части по v_y, v_z, получим (пренебрегая членами, малыми при $v \sim v_f \gg v_T$, а также вкладом от резонансной области)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{3}{2\tau_D}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}v_T^2 + vf\right). \tag{9}$$

Величина τ_D определяется формулой

$$\tau_D = m^2 v_f^3/8\pi e^4 nL \tag{10}$$

и имеет смысл эффективного времени столкновений для частиц в резонансной области (см. [5], (5.22)).

Отметим, что стоящий в правой части (9) член, описывающий столкновения, уже использовался ранее Леннардом и Бернштейном [6]. Обосновывая его введение, эти авторы исходили из того, что это наиболее простое выражение, удовлетворяющее требованиям размерности, которое сохраняет основные черты интеграла столкновений Ландау, а именно, имеет вид дивергенции и описывает диффузию в пространстве скоростей, аналогичную фоккер-планковской; при подстановке в него распределения Максвелла оно обращается в нуль. Мы видим, что этот член можно строго получить из точного интеграла столкновений Ландау для достаточно узкой одномерной области в пространстве скоростей вдали от тепловой скорости. (Ширина этой области определяется неравенствами $\Delta v \ll v_f - v_T$, $v_f \gg v_T$).Одновременно мы получили строгое значение коэффициента, стоящего перед интегралом столкновений. Этот коэффициент определен в [6] не совсем точно (отличается от нашего множителем $3(v_f/v_T)^3$).

Уравнение (9) значительно упростится, если перейти к системе покоя волны и учесть, что вследствие малости затухания волны членом с производной по времени в этой системе можно пренебречь (в конце работы будет указано условие применимости этого приближения). Таким образом, в системе покоя волны кинетическое уравнение принимает вид

$$v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m}\Phi'(x)\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{3}{2\tau_D}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial f}{\partial v}v_T^2 + (v + v_f)f\right], \tag{11}$$

где v теперь обозначает скорость в новой системе отсчета, а резонансная область определяется условием

$$|v| \sim (2e\Phi_0/m)^{1/2}. \tag{11a}$$

Уравнение волны в системе, где она покоится, запишем в виде

$$E = E_0\sin kx, \qquad \Phi = \Phi_0(1 - \cos kx)/2 = \Phi_0\sin^2(kx/2). \tag{12}$$

Произвольную постоянную в потенциале мы выбрали так, чтобы он обращался в нуль при $x = 0$. Полезно перейти к безразмерным переменным

$$v/v_T = u, \quad e\Phi/T = \varphi, \quad kx = y, \quad v_f/v_T = \alpha, \tag{13}$$

после чего кинетическое уравнение (11) примет вид

$$u\frac{\partial f}{\partial y} + \varphi'(y)\frac{\partial f}{\partial u} = \mu\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial f}{\partial u} + (u+\alpha)f\right], \tag{14}$$

где $\varphi = \varphi_0 \sin^2(y/2)$,

$$\mu = 3/2\, kv_T\tau_D. \tag{15}$$

Из (15) видно, что при достаточно малой частоте столкновений ($\tau_D^{-1} \ll kv_T$) параметр μ можно считать малым. Кроме того, в уравнении (14) содержится еще один малый параметр — безразмерная амплитуда волны $\varphi_0 = e\Phi_0/T$. Решения (14) в резонансной области существенно различны в зависимости от соотношения между μ и φ_0.

При $\varphi_0 \ll \mu$ (слабые волны) можно искать решение уравнения (14) в виде ряда по степеням φ_0, и мы получим обычную линейную теорию, приводящую к затуханию Ландау (2). Нас будет интересовать противоположный случай достаточно сильных волн

$$\mu \ll \varphi_0, \tag{16}$$

при котором получается сильное искажение функции распределения в резонансной области и затухание, принципиально отличающееся от затухания Ландау.

Удобно переписать уравнение (14) в новых переменных y, ε, где ε — безразмерная полная энергия электрона, y — прежняя безразмерная координата:

$$y = kx, \quad \varepsilon = (mv^2/2 + e\Phi)/T = u^2/2 + \varphi. \tag{17}$$

В этих переменных уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \nu\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\pm\sqrt{\varepsilon - \varphi(y)}\left(f + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right) + cf\right], \tag{18}$$

где обозначено

$$c = \alpha/\sqrt{2} = v_f/v_T\sqrt{2}, \quad \nu = \sqrt{2}\mu = 3/\sqrt{2}kv_T\tau_D. \tag{19}$$

Мы можем считать c безразмерной фазовой скоростью волны, а ν — безразмерной частотой столкновений. Два знака перед корнем в (18) соответствуют двум возможным направлениям скорости частиц относительно волны при заданной энергии; уравнение (18), таким образом, распадается на два уравнения, отвечающих двум возможным направлениям скорости частиц относительно волны.

3. Функция распределения во внешней и внутренней областях

Решение уравнения (18) следует искать раздельно для двух областей — внешней ($\varepsilon > \varphi_0$) и внутренней ($\varepsilon < \varphi_0$) (рис. 2). Внутренняя область отвечает частицам, захваченным волной и движущимся вместе с ней. В соответствии с (16) можно считать ν малым параметром и искать решение в виде

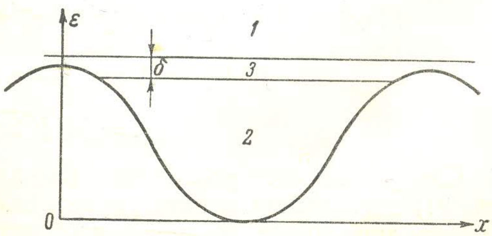

Рис. 2. Функция распределения во внешней и внутренней областях: *1* — внешняя область, *2* — внутренняя область, *3* — пограничный слой

ряда по степеням ν:

$$f(y, \varepsilon) = f_0(\varepsilon) + \nu f_1(y, \varepsilon) + \ldots, \tag{20}$$

где $f_0(\varepsilon)$ не зависит от y, так как является решением (18) при $\nu = 0$. При этом необходимо отметить, что малый параметр ν стоит в (18) при старшей производной по ε. Поэтому разложение (20) не будет описывать истинное решение в узком пограничном слое, лежащем между внешней и внутренней областями. Ширина этого пограничного слоя $\sim \nu$, т. е. много меньше ширины резонансной области (см., например, [7], где анализируются явления в пограничном слое для уравнений с малым параметром при старшей производной). Вклад пограничного слоя в затухание волны будет рассмотрен в разделе 4.

Найдем решение уравнения (18) во внешней области. Подставляя (20) в (18), получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left[\pm\sqrt{\varepsilon - \varphi(y)}\left(f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) + cf_0\right]. \tag{21}$$

Вследствие периодичности поля волны функция распределения $f(y, \varepsilon)$ также должна быть периодической по y (с периодом 2π). Поэтому при усреднении обеих частей (21) по y левая часть должна исчезнуть, и мы получим

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[J(\varepsilon)\left(f_0 + \frac{df_0}{d\varepsilon}\right) + cf_0\right] = 0; \tag{22}$$

$$J(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\varepsilon - \varphi_0\sin^2(y/2)}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{\varepsilon}\,E(k).$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем $k = (\varphi_0/\varepsilon)^{1/2}$.

Очевидно, $f_0(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to \infty$ должна асимптотически приближаться к функции распределения для движущейся со скоростью $-v_f$ максвелловской плазмы или в безразмерных переменных

$$f_0(\varepsilon) \to (n/\sqrt{2\pi}v_T)\exp\{-(\pm\sqrt{\varepsilon} + c)^2\}, \quad \varepsilon \to \infty, \tag{23}$$

где знаки перед корнем имеют тот же смысл, что и в уравнении (18). Интегрируя (22) при этом граничном условии, получаем следующее уравнение первого порядка для $f_0(\varepsilon)$:

$$\pm\frac{2}{\pi}\varepsilon^{1/2}E\left(\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varepsilon}}\right)\left(f_0 + \frac{df_0}{d\varepsilon}\right) + cf_0 = 0,$$

решение которого, удовлетворяющее условию (23), имеет вид

$$f_0^{\pm}(\varepsilon) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}v_T}e^{-c^2}\exp\left[-\varepsilon \mp \frac{c\pi}{2}\varphi_0^{1/2}\int_1^{\varepsilon/\varphi_0}\frac{dt}{t^{1/2}E(t^{-1/2})}\right]. \tag{24}$$

Легко получить асимптотические выражения для этой функции в двух предельных случаях $\varepsilon \sim \varphi_0$ и $\varepsilon \gg \varphi_0$:

$$f_0^{\pm}(\varepsilon) = A\exp\left[-\varepsilon \mp \frac{1}{2}c\pi\varphi_0^{-1/2}(\varepsilon - \varphi_0)\right], \quad (\varepsilon - \varphi_0)/\varphi_0 \ll 1, \tag{24а}$$

$$f_0^{\pm}(\varepsilon) = A\exp[-\varepsilon \mp 2c\varepsilon^{1/2}], \quad \varepsilon \gg \varphi_0; \tag{24б}$$

$$A = (n/\sqrt{2\pi}\,v_T)\,e^{-c^2}.$$

Следующий член разложения (20) для внешней области можно получить из (21) элементарным интегрированием, однако нам понадобится в дальнейшем лишь $\partial f_1/\partial y$, которая непосредственно определяется уравнением (21).

Нахождение функции распределения $f(y, \varepsilon)$ для внутренней области существенно упрощается благодаря тому, что, как легко убедиться, $f(y, \varepsilon)$ при $\varepsilon < \varphi_0$ (т. е. для частиц, захваченных волной) должна быть одинаковой для частиц, движущихся в положительном и отрицательном направлениях относительно волны, т. е. $f^+(\varepsilon, y) = f^-(\varepsilon, y)$ (см. также [4]). Это может быть только в том случае, когда обращается в нуль член, содержащий радикал в правой части (18), т. е. $f + \partial f/\partial\varepsilon = 0$. Решая это уравнение совместно с (18), получим

$$f(y, \varepsilon) = a \exp(-\varepsilon - \nu c y) = a e^{-\varepsilon}(1 - \nu c y + \ldots),$$
$$-2\arcsin\sqrt{\varepsilon} \leqslant y \leqslant 2\arcsin\sqrt{\varepsilon}, \tag{25}$$

где a — постоянная.

Для определения a заметим, что при наших ограничениях ($\varphi_0 \ll 1$) функция распределения в резонансной области должна мало отличаться от максвелловской; существенно изменяется лишь ее производная (см. рис. 1). Для этого необходимо положить

$$a = \frac{n}{\sqrt{2\pi} v_T} \exp\left(-\frac{v_f^2}{2v_T^2}\right) + O(\varphi_0) \cong \frac{n}{\sqrt{2\pi} v_T} e^{-c^2}. \tag{25а}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что a с точностью до членов, исчезающих при $\varphi_0 \to 0$, совпадает с A в (24б).

Таким образом, для функции распределения во внутренней области можно написать следующее выражение:

$$f(\varepsilon, y) = f_0(\varepsilon) e^{-\nu c y}, \qquad f_0(\varepsilon) = (n e^{-c^2}/\sqrt{2\pi} v_T) e^{-\varepsilon} + O(\varphi_0), \tag{26}$$

где $f_0(\varepsilon)$ — функция распределения для внутренней области в нулевом приближении по ν. Интересно отметить, что $f_0(\varepsilon)$ имеет вид распределения Максвелла — Больцмана (ε — энергия, деленная на T) и непрерывно переходит в $f_0(\varepsilon)$ для внешней области, как это вытекает из асимптотической формулы (24а). Однако их производные при $\varepsilon = \varphi_0$ не совпадают (в связи с этим напомним о существовании узкого пограничного слоя при $\varepsilon \sim \varphi_0$, в котором осуществляется непрерывный переход производных функций распределения из внутренней области во внешнюю).

4. Декремент затухания волны

Затухание волны определяется величиной $\overline{\dot W}$ — средним значением производной по времени от плотности энергии волны (в дальнейшем черту над $\dot W$ мы будем для простоты записи опускать). Очевидно, $\dot W = -\mathbf{Ej}$, где $\mathbf{E}$ — напряженность поля волны, а $\mathbf{j}$ — плотность тока, индуцированного ею. Переходя к системе, где волна покоится, нужно учесть, что $\mathbf{j} = \mathbf{j}' + \mathbf{v}_f\rho$, где $\mathbf{j}'$ — плотность тока в системе покоя волны, ρ — плотность заряда. Поэтому

$$\dot W = -\overline{(\mathbf{Ej})} = -\mathbf{v}_f\,\overline{(\mathbf{E}\rho)}, \tag{27}$$

где усреднение производится по координате x в системе волны. Поскольку в этой системе функцию распределения можно считать стационарной, то $\partial j'/\partial x = 0$ (уравнение непрерывности), $j' = \mathrm{const}$ и первый член в (27) исчезает. Следовательно,

$$\dot W = -\mathbf{v}_f\overline{\mathbf{E}\rho} = -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^\lambda \frac{\partial\Phi}{dx}\rho\,dx, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}. \tag{28}$$

Подставляя сюда

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} f\,dv,$$

где $f\,(v,\,x)$ — функция распределения в системе волны, и переходя к новым переменным y, ε, определенным соотношениями (17), получим

$$\dot{W}=\frac{\omega T v_T}{\sqrt{8\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dy\int\limits_{\varphi(y)}^{\infty}\frac{d\varepsilon}{[\varepsilon-\varphi\,(y)]^{1/2}}\,\varphi'\,(y)\,(f^{+}+f^{-}),\tag{29}$$

где $f^{+}(\varepsilon,\,y)$ и $f^{-}(\varepsilon,\,y)$ отвечают электронам с положительными и отрицательными скоростями относительно волны.

Интеграл по ε в (29) разобьем на три части соответственно вкладам от внешней и внутренней областей и пограничного слоя:

$$\dot{W}=\dot{W}^{(1)}+\dot{W}^{(2)}+\dot{W}^{(3)}.\tag{30}$$

1. Вычислим вклад от внешней области, ограничиваясь членами низшего порядка малости по φ_0. Обозначим

$$\dot{W}_{\pm}^{(1)}=\frac{\omega T v_T}{\sqrt{8\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dy\int\limits_{\varphi_0}^{\infty}d\varepsilon\,[\varepsilon-\varphi\,(y)]^{-1/2}\varphi'\,(y)\,f^{\pm}\,(\varepsilon,\,y),\tag{31}$$

$$\dot{W}^{(1)}=\dot{W}_{+}^{(1)}+\dot{W}_{-}^{(1)}.\tag{31a}$$

Меняя в (31) порядок интегрирования, затем интегрируя по частям, используя периодичность подынтегральной функции по y и подставляя $\partial f_1^{\pm}/\partial y$ из (21) получим (ограничиваясь членами первого порядка по частоте столкновений)

$$\dot{W}_{\pm}^{(1)}=\frac{\omega T v_T}{\sqrt{8\pi}}\,\nu\int\limits_{\varphi_0}^{\infty}d\varepsilon\int\limits_{-\pi}^{\pi}dy\sqrt{\varepsilon-\varphi\,(y)}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\pm\sqrt{\varepsilon-\varphi\,(y)}\left(f_0^{\pm}+\frac{df_0^{\pm}}{d\varepsilon}\right)+cf_3^{\pm}\right],\tag{32}$$

где $f_0^{\pm}\,(\varepsilon)$ — функция распределения нулевого приближения по ν для внешней области, определяемая формулой (24). Произведя элементарные преобразования, получим

$$\dot{W}_{\pm}^{(1)}=-\frac{\omega T v_T c}{\sqrt{8\pi}}\,\nu\varphi_0^{1/2}\left\{\left(4-\frac{\pi^2}{2}\right)f_0^{\pm}\,(\varphi_0)+\right.$$
$$\left.+2\int\limits_{1}^{\infty}dt\cdot t^{-1/2}f_0\,(\varphi_0 t)\left[K\,(t^{-1/2})-\frac{\pi^2}{4}E^{-1}\,(t^{-1/2})\right]\right\},\tag{33}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов по модулю $k=t^{-1/2}$.

В интеграле, стоящем в правой части (33), можно перейти к пределу $\varphi_0\to 0$ под знаком интеграла, так как остающийся интеграл сходится. В результате получим

$$\dot{W}^{(1)}=\dot{W}_{+}^{(1)}+\dot{W}_{-}^{(2)}=$$
$$=-\frac{\omega T n c e^{-c^2}}{4\pi^{3/2}}\,\nu\varphi_0^{1/2}\left\{4-\frac{\pi^2}{2}+2\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dt}{t^{1/2}}\left[K\,(t^{-1/2})-\frac{\pi^2}{4}E^{-1}\,(t^{-1/2})\right]\right\}.\tag{34}$$

Используя свойства эллиптических интегралов, интеграл в правой части (34) можно привести к виду

$$J=\pi-2-\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^{3/2}E\,(t)}\left[E\,(t)-\frac{\pi}{2}\right].$$

Последний интеграл можно вычислить приближенно при помощи, например, разложения в ряд подынтегральной функции. С точностью до 1% он равен $^1/_2$. Подставляя это в (34), получим окончательное выражение для вклада внешней области в затухание волны:

$$\dot{W}^{(1)} = -\frac{1}{16}(6-\pi)\,\pi^{-1/2}\nu\varphi_0^{1/2}ce^{-c^2}\omega Tn. \tag{35}$$

2. Рассмотрим теперь вклад от внутренней области $\varepsilon < \varphi_0$. Используя (29) и учитывая, что при $\varepsilon < \varphi_0$ имеем

$$f^+(\varepsilon, y) = f^-(\varepsilon, y),$$

можно написать

$$\dot{W}^{(2)} = \frac{\omega T v_T}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\varphi_0} d\varepsilon\, [\varepsilon - \varphi(y)]^{-1/2} \varphi'(y) f(y, \varepsilon). \tag{36}$$

Подставляя в (36) $f(y, \varepsilon)$ из (26) и ограничиваясь членами низшего порядка малости по ν и φ_0 (в этом приближении $e^{-\varepsilon} \approx 1$), получим после элементарных преобразований

$$\dot{W}^{(2)} = -2\pi^{-3/2}\,\nu\varphi_0^{3/2}\,\omega Tnc. \tag{37}$$

Поскольку вклад в затухание от внешней области $\sim\varphi_0^{1/2}$, то вкладом от внутренней области, имеющим порядок $\varphi_0^{3/2}$, можно пренебречь.

3. Рассмотрим теперь вклад от пограничного слоя (рис. 2), где неприменимо разложение функции распределения по степеням ν. Хотя ширина этой области очень мала ($\sim\nu$), ее вклад в затухание имеет, как будет видно ниже, тот же порядок величины, что и от внешней области (поскольку в пограничном слое вторая производная функции распределения по ε принимает большие значения).

Покажем, что для вычисления вклада от пограничного слоя не обязательно знать вид функции распределения в нем; достаточно иметь предельные значения функции распределения нулевого приближения по ν и ее первой производной на границах пограничного слоя во внешней и внутренней областях. На основании (29) можно написать

$$\dot{W}^{(3)} = \frac{\omega T v_T}{\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-\varphi(y)}}\,\varphi'(y)\,(f^+ + f^-) =$$

$$= -\frac{\omega T v_T}{\sqrt{8\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\varepsilon\, \frac{d\,(\varepsilon-\varphi(y))^{1/2}}{dy}\,[f^+(y, \varepsilon) + f^-(y, \varepsilon)], \tag{38}$$

где $2\delta(y)$ — ширина пограничного слоя.

Интегрируя по y по частям, используя периодичность подынтегральной функции по этой переменной, отбрасывая члены порядка $\varphi_0^{3/2}$ и подставляя $\partial f^{\pm}/\partial y$ из (18), получим

$$\dot{W}^{(3)}_{\pm} = \frac{\omega T v_T}{\sqrt{2\pi}}\,\nu \int\limits_{-\pi}^{\pi} dy \left\{ \int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon-\varphi(y)}\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[(c \pm \sqrt{\varepsilon-\varphi})\, f^{\pm}\right] \pm \right.$$

$$\left. \pm \int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon-\varphi}\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon-\varphi}\,\frac{\partial f^{\pm}}{\partial\varepsilon}\right)\right\}, \tag{39}$$

$$\dot{W}^{(3)} = \dot{W}^{(3)}_{+} + \dot{W}^{(3)}_{-}.$$

Первая производная $\partial f/\partial\varepsilon$ в пограничном слое имеет более высокий порядок малости по ν, чем вторая. Поэтому первым интегралом в (39) можно пренебречь по сравнению со вторым. Учитывая, что с нашей степенью точности предельные значения f одинаковы на границах пограничного слоя во внешней и внутренней областях, легко преобразовать второй интеграл в (39) к виду

$$\int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\varepsilon\,(\varepsilon-\varphi)\frac{\partial^2 f^{\pm}}{\partial\varepsilon^2} = \int\limits_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[(\varepsilon-\varphi)\frac{\partial f^{\pm}}{\partial\varepsilon}\right] =$$

$$= \varphi_0\cos^2\frac{y}{2}\left(\frac{\partial f_0^{\pm}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varphi_0+0} - \frac{\partial f_0^{\pm}}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varphi_0-0}\right). \qquad (40)$$

Подставляя сюда предельные значения производных $df_0^{\pm}/\partial\varepsilon$ во внешней и внутренних областях из (24а), (26), а затем подставляя (40) в (39), получим

$$\dot{W}^{(3)} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\nu\varphi_0^{1/2}e^{-c^2}c\omega Tn. \qquad (41)$$

Собирая вместе (35) и (41), получим выражение для декремента затухания $\gamma = -\dot{W}/2\overline{W}$ (где $\overline{W} = E_0^2/16\pi = (k\Phi_0)^2/64\pi$ — средняя плотность энергии волны):

$$\gamma = \frac{12\alpha}{\tau_D}\left(\frac{v_f}{v_T}\right)^4 \exp\left(-\frac{v_f^2}{2v_T^2}\right)\left(\frac{e\Phi_0}{T}\right)^{-3/2};\quad \alpha = \frac{7\pi+6}{16\sqrt{\pi}}. \qquad (42)$$

Для простоты положили $\omega = \omega_0$ и воспользовались (19). Мы видим, что затухание волны исчезает при $\tau_D \to \infty$, т. е. когда частота столкновений стремится к нулю.

В отличие от декремента Ландау (2), в нашем случае γ зависит от амплитуды волны как $\Phi_0^{-3/2}$. Выражая γ через декремент Ландау (2), получим

$$\gamma = \beta\left(\frac{v_T}{v_f}\right)^2\frac{\tau_2}{\tau_1}\gamma_\Lambda,\quad \beta = \frac{3\sqrt{2}\,(7\pi+6)}{4\pi^2} \approx 3{,}0, \qquad (43)$$

где мы ввели два характерных времени: τ_1 — время установления локального равновесия в резонансной области Δv (1) вследствие кулоновских столкновений (с рассеянием на малые углы),

$$\tau_1 = \tau_D\,(\Delta v)^2/v_f^2 = \tau_D\,(v_T/v_f)^2\,e\Phi_0/T \qquad (44)$$

(τ_D дается формулой (10)), и τ_2 — время нелинейного искажения функции распределения под действием поля волны [2,8],

$$\tau_2 = \lambda\,(e\Phi_0/m)^{-1/2} = (2\pi/kv_T)\,(e\Phi_0/T)^{-1/2} \qquad (45)$$

(λ — длина волны).

В нашем предельном случае достаточно больших волн (см. (16)) нужно считать [1)]

$$\tau_2 \ll \tau_D e\Phi_0/T = \tau_1\,(v_f/v_T)^2, \qquad (46)$$

т. е. время нелинейного искажения должно быть меньшим времени установления равновесного распределения в резонансной области благодаря столкновениям. При этом декремент затухания (43) оказывается гораздо меньшим декремента Ландау. Следует обратить внимание также на то, что, как вытекает из (43), (44), локальное равновесие в резонансной области устанавливается гораздо быстрее, чем волна успевает затухнуть.

Отметим, наконец, что формула (43) при условии (46) согласуется с качественной оценкой декремента затухания для плоских волн, полученной в [2] (см. стр. 96), на основе результатов квазилинейной теории.

---

1) Следует отметить, что неравенства (16) и (46) не вполне эквивалентны: (46) является более сильным. Как показывает аккуратная оценка обеих частей уравнения (18), более строгим условием применимости разложения по степеням ν является (46), а не (16). Физический смысл (16), (46) состоит в том, что амплитуда волны должна значительно превышать уровень теплового шума. В обратном предельном случае имеет место затухание Ландау.

Рассмотрим теперь вопрос о допустимости пренебрежения производной по времени в кинетическом уравнении (11). Считая, что в (11)

$$\partial f/\partial x \sim fk/2\pi, \quad \partial f/\partial v \sim f\,(e\Phi/m)^{-1/2}$$

и учитывая (46), получим, что производная по времени действительно мала по сравнению с остальными членами в кинетическом уравнении, если $\gamma \ll \tau_1^{-1}$, т. е. время затухания волны должно быть гораздо больше времени установления равновесия в резонансной области вследствие столкновений. Сравнение (43) и (44) показывает, что это условие выполняется.

В заключение авторы выражают благодарность Р. З. Сагдееву за ценные советы и плодотворные обсуждения вопросов, рассмотренных в настоящей работе, А. А. Веденову и Е. П. Велихову за полезные обсуждения результатов, а также И. О. Форескину за некоторые замечания.

Поступила в редакцию
14 января 1962 г.

Литература

[1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **16**, 574, 1946.
[2] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Nucl. Fusion, **1**, 82, 1961.
[3] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. УФН, **73**, 701, 1961.
[4] I. Bernstein, J. Greene, M. Kruskal. Phys. Rev., **108**, 546, 1957.
[5] Л. Спитцер. Физика полностью ионизованного газа, ИИЛ, 1957.
[6] A. Lennard, I. Bernstein. Phys. Rev., **112**, 1456, 1958.
[7] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. УМН, **12**, 3, 1957.
[8] J. Dawson. Phys. Fluids, **4**, 869, 1961.

NONLINEAR THEORY OF ATTENUATION OF PLASMA WAVES

V. E. Zakharov, V. I. Karpman

Absorption of monochromatic plasma waves of finite (but small) amplitude in a rarefied plasma is considered. The nonlinear distortion of the electron distribution function under the action of the wave is derived. The damping decrement is calculated and found to depend on the wave amplitude Φ_0 as $\Phi_0^{3/2}$.