АКАДЕМИЯ НАУК СССР
АСТРОНОМИЧЕСКИЙ СОВЕТ

ВОПРОСЫ КОСМОГОНИИ

ТОМ
IX

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва 1963

Редакционная коллегия:

Доктор физ.-матем. наук Б. В. КУКАРКИН (отв. редактор),
доктор физ.-матем. наук Н. Н. ПАРИЙСКИЙ (зам. отв. редактора),
доктор физ.-матем. наук А. Г. МАСЕВИЧ,
доктор физ.-матем. наук Б. Ю. ЛЕВИН,
доктор физ.-матем. наук В. И. БАРАНОВ,
член-корр. АН СССР В. В. БЕЛОУСОВ,
канд. физ.-матем. наук В. С. САФРОНОВ (ученый секретарь)

МАТЕРИАЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО ВАЖНЕЙШИМ ПРОБЛЕМАМ АСТРОФИЗИКИ

Тарту, 7—13 июля 1962 г.

5, 573, 1960 (нейтринная аннигиляция электрон-позитронной пары в звездах); С. Г. Матикян. Лекция, прочитанная в весенней школе теоретической и экспериментальной физики в Нор-Амберде (апрель 1962) Изд. АН Арм. ССР (обзор по испусканию пар $\nu\tilde{\nu}$ в звездах).
10. Нейтрино и космогония: Б. Понтекорво, Я. Смородинский. ЖЭТФ, 41, 239, 1961 (нейтрино и плотность материи во Вселенной); Я. Б. Зельдович, Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 41, 907 1961 (верхний предел плотности нейтрино во Вселенной); В. М. Харитонов. Лекция, прочитанная в весенней школе теоретической и экспериментальной физики в Нор-Амберде (апрель 1962). Изд. АН Арм. ССР (космогонические аспекты физики нейтрино); S. Weinberg. Preprint, 1962 (универсальное нейтринное вырождение).

Поступила в августе 1962 г.

ДОКЛАДЫ И ВЫСТУПЛЕНИЯ

Я. Б. Зельдович

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗДЫ

Рассмотрен вопрос об устойчивости сферически симметричного тела, сдерживаемого гравитационными силами, относительно перемещений вещества, при которых нарушается условие гидростатического равновесия.

Hydrodynamic stability of the star, by *J. B. Zeldovič*. — The problem of stability of spherically symmetric selfgravitating body relative to the displacements violating the condition of hydrostatic equilibrium is considered.

§ 1. Введение

Рассмотрим вопрос об устойчивости сферически симметричного тела, сдерживаемого гравитационными силами, относительно радиальных перемещений вещества, при которых нарушается условие гидростатического равновесия.

Как известно [1, 2], характерное время гидродинамических процессов в звезде гораздо меньше времени тепловых процессов и процессов выделения ядерной энергии.

Ниже вопрос рассмотрен в двух различных приближениях. В § 2 все вещество звезды характеризуется средними показателями — средней плотностью $\bar{\rho}$ и средним давлением $\bar{p}$. Исследуется зависимость устойчивости от уравнения состояния вещества, т. е. от вида функции $\bar{p}$ $(\bar{\rho})$. Такой способ является грубым, но зато достигается бóльшая наглядность в общей концепции медленной эволюции (зависящей от скорости ядерных процессов), подводящей систему к границе устойчивости, после чего происходит катастрофическое сжатие и выделение гравитационной энергии. Эти соображения изложены в § 3.

Следующий, § 4 посвящен изложению соображений Н. А. Дмитриева, при помощи которых точно решается задача об устойчивости равновесной модели звезды с произвольным уравнением состояния вещества и произвольным распределением энтропии и состава по веществу. Оказывается, что критерий устойчивости может быть сформулирован путем сравнения решения с решением, отвечающим другой, но близкой массе.

Точное решение подтверждает выводы, полученные в § 2 при грубом рассмотрении вопроса.

Другой подход к решению вопроса об устойчивости основан на работе Баренблатта и Зельдовича [3], он остается в силе и с учетом эффектов общей теории относительности (см. § 6).

В § 5 рассматривается вопрос о причинах малости показателей адиабаты, приводящих к неустойчивости; дается классификация ядерных процессов на быстрые — равновесные и медленные — эволюционные.

Наконец, в § 6 качественно рассматриваются изменения, которые вносит общая теория относительности (предыдущее рассмотрение проводилось в ньютоновской теории).

Работа была доложена в июле 1962 г. в летней астрофизической школе в Тарту и излагается с учетом дискуссии.

Строгий анализ устойчивости газового шара с постоянным показателем адиабаты был дан А. Б. Северным [16]. Там же дана исчерпывающая библиография более ранних работ.

§ 2. Равновесие и устойчивость звезды в целом

Рассмотрим шар массы M радиуса R из вещества со средней плотностью ρ и давлением, зависящим от плотности по произвольному закону $p(\rho)$ (для краткости опускаем знаки средних). Так как энтропию считаем заданной, $p(\rho)$ есть уравнение изэнтропы.

Сила тяжести создает среднее давление порядка $q \sim g\rho R$, где $g \sim G\frac{M}{R^2}$, $\rho R^3 \sim M$ (G — постоянная тяготения). Выражая R через ρ и M, найдем ($R \sim M^{1/3}\rho^{-1/3}$)

$$q = aGM^{2/3}\rho^{4/3}, \tag{1}$$

где a — безразмерный численный коэффициент.

Если задать в начальный момент вещество в состоянии покоя с данной плотностью ρ, то при $p > q$ начнется расширение, а при $p < q$ сила тяжести начнет сжимать вещество. Условие равновесия есть равенство $p = q$.

Удобно ввести величину $b = p\rho^{-4/3}$. Тогда условие равновесия примет вид

$$b\ (\rho) = aGM^{2/3}. \tag{2}$$

В качестве независимой переменной удобно вместо ρ ввести $\omega = 3\rho^{1/3}$, тогда изменение энергии единицы массы вещества при адиабатическом процессе

$$dE = -\,pdv = -\,pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = 3p\rho^{-4/3}d\ (\rho^{1/3}) = b\ (\omega)\ d\omega. \tag{3}$$

Зная $p\ (\rho)$, построим кривую $b\ (\omega)$. Предположим, что зависимость $p\ (\rho)$ такова, что кривая $b\ (\omega)$ имеет максимум, как показано на рис. 1 (о возможных физических причинах максимума см. ниже § 5 и 6). Задавшись массой звезды, проводим горизонталь $b = aGM^{2/3}$. Ее пересечения A и A' с кривой $b\ (\omega)$ дают равновесные конфигурации. Рассматривая точки, близкие к A и A', легко убедиться в том, что конфигурация A устойчива и A' неустойчива.

Площадь OAB есть внутренняя энергия единицы массы в состоянии, соответствующем A. Гравитационная энергия, отнесенная к единице массы, равна взятой с минусом площади прямоугольника $CCAB$. Таким образом, полная энергия единицы массы отрицательна и равна по модулю площади OAC.

Так, например, если $p = \text{const}\ \rho^{5/3}$, то $b = \text{const}\ \omega$, линия OA прямая и $OAC = OAB$, т. е. в соответствии с теоремой вириала полная энергия по модулю равна тепловой.

Найдем производную

$$\frac{db}{d\omega} = \frac{dp\rho^{-4/3}}{3d\rho^{1/3}} = \left(\frac{d\ln p}{a\ln\rho} - \frac{4}{3}\right)p\rho^{-5/3}.$$

Величину $\frac{d\ln p}{a\ln\rho} = \gamma$ следует назвать показателем адиабаты; однако мы рассматриваем γ не как постоянную, а как функцию плотности.

Критерий устойчивости, как видно из рис. 1, есть условие $\frac{db}{d\omega} > 0$, что дает известный результат $\gamma > \frac{4}{3}$, впервые четко сформулированный Л. Д. Ландау [15].

В точке максимума F, очевидно, $\gamma = \frac{4}{3}$. Однако энергия звезды в этом состоянии отрицательна* и равна площади ODF. Теорема вириала здесь неприменима, потому что существование максимума подразумевает переменность $\gamma\ (\omega)$, значение $\gamma = \frac{4}{3}$ достигается лишь в одной точке F_0 при $\omega = \omega_F$; при $\omega < \omega_F$, $\gamma > \frac{4}{3}$.

Так как ордината каждой точки, изображающей решение, однозначно зависит от массы звезды ($b \sim M^{2/3}$), а абсцисса — от плотности, то наша кривая представляет собой одновременно кривую зависимости массы от плотности для серии моделей звезд, построенных с данным уравнением состояния.

---

* Обычно говорят, что по теореме вириала при $\gamma = 4/3$ энергия равна нулю.

Точка F отвечает максимальной возможной массе. Максимум массы существует лишь в том случае, если $b = p\rho^{-4/3}$ проходит через максимум.

При массе больше максимальной равновесных конфигураций нет, из любого начального состояния покоя происходит сжатие со скоростью порядка скорости свободного падения.

Рассматривая кривую на рис. 1 как зависимость массы от плотности, полученную при решении уравнений гидростатического равновесия, сформулируем результат так: звезда устойчива, если $\frac{dM}{d\rho} > 0$ и неустойчива, если $\frac{dM}{d\rho} < 0$. При вычислении $dM/d\rho$ подразумевается сравнение двух моделей звезды из вещества с одним и тем же уравнением состояния и одинаковой энтропией, но с различными (близкими) массами.

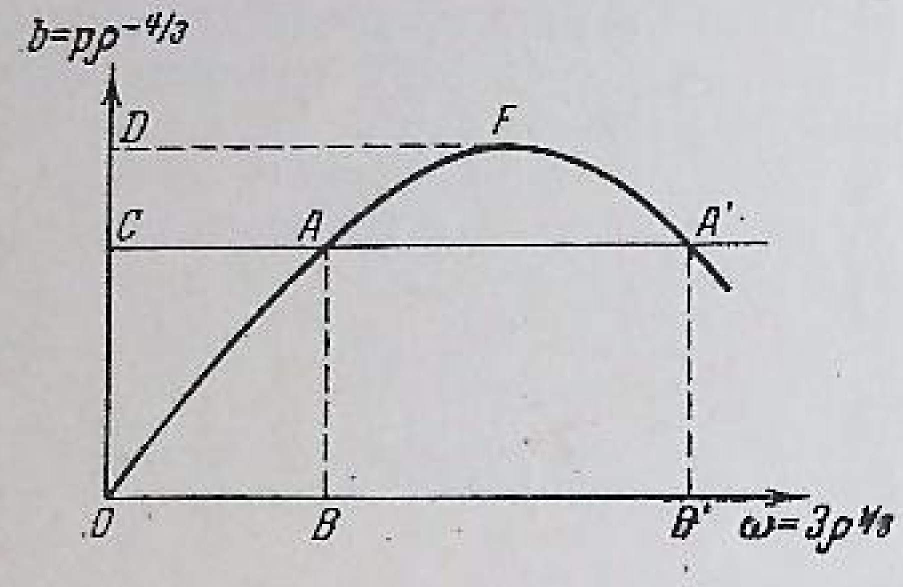

Рис. 1

§ 3. Эволюция звезды

Рассмотрим сперва медленную эволюцию за счет охлаждения звезды излучением света или нейтрино, но без учета ядерных реакций. При такой эволюции, очевидно, энтропия постепенно уменьшается. В плоскости b, ω рис. 2 (стр. 162) построим семейство изоэнтропических линий (на рис. 1 была построена такая линия для одного значения энтропии). Ясно, что при данном ω, чем больше энтропия S, тем больше p и b. Эволюция звезды заданной массы представляет собой движение слева направо по горизонтальной линии от A через B к C. Заметим, что на этом пути уменьшение энтропии сопровождается повышением температуры *.

В самом деле, например, для идеального одноатомного газа $p = e^{aS}\rho^{\frac{5}{3}} = \Re T$, откуда $S = \frac{1}{a}\ln p\rho^{-5/3} = \frac{1}{a}\ln\frac{3b}{\omega}$ и $T = \frac{p}{\Re\rho} = \frac{b\omega}{3\Re}$.

Следовательно, при $b = \text{const}$ с увеличением ω энтропия падает, а температура растет.

Скорость эволюции на пути ABC определяется скоростью теплоотдачи; если дана функция $p(\rho, S)$, а следовательно, и $b(\omega, S)$, то из условия $b = \text{const}$ (поскольку постоянна масса) следует

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial b/\partial S}{\partial b/\partial \omega}\cdot\frac{dS}{dt};\quad \frac{dS}{dt} = -\frac{Q}{T}.$$

* В соответствии с общеизвестным фактом отрицательной теплоемкости звезды как целого, следующим из теоремы вириала.

Однако если b-линии имеют максимум, как это показано на рис. 1, 2, то в ходе падения энтропии может быть достигнута критическая точка C. После достижения этой точки наступает потеря устойчивости и происходит катастрофическое сжатие со скоростью порядка скорости свободного падения $\frac{dR}{dt} \sim \sqrt{g(R_C - R)} \sim \sqrt{\frac{GM}{R^2}}\,(R_C - R)$. Необходимо особенно подчеркнуть, что после достижения состояния C скорость дальнейшего сжатия никак не зависит от скорости тех тепловых процессов, которые в ходе медленной эволюции подвели звезду к критическому состоянию. Скорость свободного падения человека, прыгнувшего вниз с крыши, не зависит от скорости, с которой он подходил к краю.

В чем заключается роль ядерных процессов?

В стационарном состоянии выделение ядерной энергии в точности компенсирует потери энергии излучением и энтропия постоянна, вследствие чего точка, изображающая состояние, покоится *.

Однако уменьшение концентрации ядерного горючего приводит к нарушению баланса; потери энергии, хотя и не намного, превышают выделение энергии, происходит постепенное повышение температуры. Температура устанавливается такой, чтобы обеспечить скорость выделения ядерной энергии при уменьшенной концентрации горючего или при переходе на сжигание другого топлива (например, с H на He), требующего для горения более высокой температуры.

Следовательно, и при наличии ядерных реакций происходит постепенное повышение температуры, а значит и уменьшение энтропии.

Ядерные реакции лишь *замедляют* процесс движения слева направо в плоскости b, ω, описанный выше. При этом надо представлять себе дело так, что сами по себе ядерные реакции, являющиеся источниками энергии звезды, вызывают рост энтропии. Однако в стационарном режиме потери энергии в первом приближении в точности компенсируют ядерные реакции, а в следующем приближении даже несколько пересиливают реакции, так что в целом энтропия убывает, но медленнее, чем если бы не было реакций **.

Физические причины, которые приводят к появлению максимума кривой $b(\omega, S)$ как функции ω, т. е. к $\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} = \gamma = \frac{4}{3}$, будут обсуждены в § 5.

* Мы не учитываем здесь того, что уравнение состояния, т. е. сама функция $p(\rho, s)$ несколько меняется вследствие изменения химического состава вещества в ходе ядерной реакции.

** При вспышках, когда потери энергии не успевают следовать за выделением ядерной энергии, происходит кратковременный рост энтропии, за которым снова следует ее падение.

Здесь остановимся вкратце на вопросе о дальнейшей судьбе звезды после начала гидродинамического сжатия, т. е. после срыва с критической точки типа F рис. 1 или C рис. 2.

Если вся кривая $b(\omega)$ правее максимума лежит ниже этого максимума, то возможно неограниченное сжатие.

В данной работе весьма грубо рассматривается среднее давление и средняя плотность вещества. Ясно, что при этом невозможно учесть ни появления при сжатии ударных волн (вызывающих рост энтропии с «гидродинамической» скоростью), ни возможность разлета части массы. Учет этих явлений требует детальных расчетов, с численным интегрированием уравнений гидродинамики с гравитацией в частных производных.

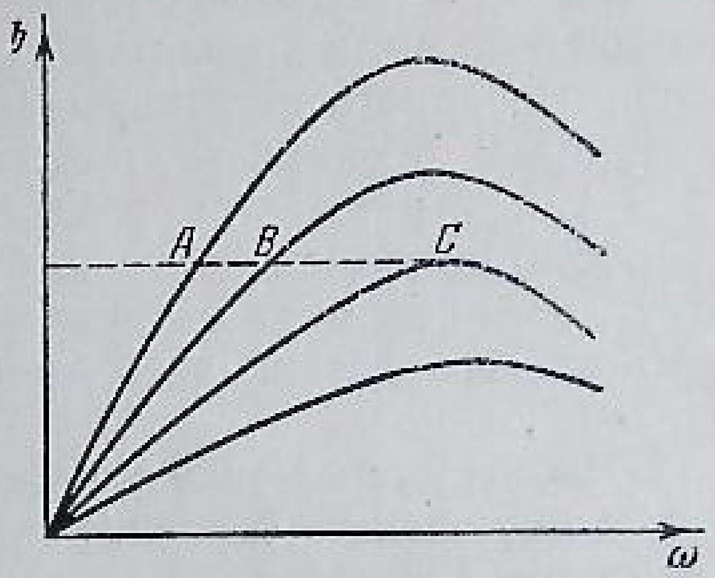

Рис. 2

Однако и без детальных расчетов можно утверждать, что эти осложняющие явления не обладают свойством автоматически, тождественно приводить к такой энтропии и массе, при которой возможно статическое решение. Другими словами, нет механизма, который запрещал бы неограниченное сжатие за конечное время. Лишь учет эффектов общей теории относительности (которые неизбежно становятся существенными при неограниченном уменьшении радиуса) приводит, как известно, к изменению ситуации. В общей теории относительности, где необходимо различать собственное и мировое время, сжатие приводит к бесконечной плотности за конечное собственное время, но определенная конечная плотность асимптотически достигается при сжатии лишь за бесконечное мировое время [4].

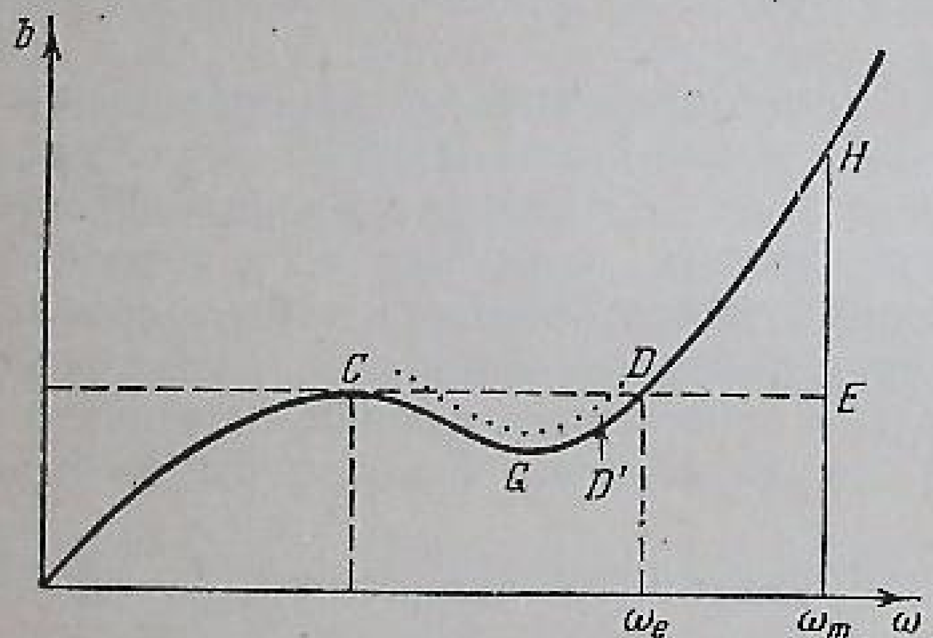

Рис. 3

Если изэнтропа после максимума имеет минимум (рис. 3), то эволюцию звезды после достижения критического состояния грубо можно проследить на b, ω-плоскости.

После срыва с точки C плотность будет расти, достигнет нового устойчивого равновесного значения (точка D) и по инерции может

расти дальше. Максимальная плотность ω_m определяется условием сохранения энергии, которое приводит к тому, что площадь DEH равняется площади CGD. В первом приближении будут происходить колебания вокруг D. Однако система не может вернуться в точку C и колебания будут затухающими по двум причинам: вследствие возникновения ударных волн и роста энтропии и из-за потери части массы; основной причиной потери массы является, вероятно, как раз выход ударной волны на поверхность звезды. В результате со сплошной изэнтропы, отвечающей начальному значению энтропии, система переходит на более высокую изэнтропу (пунктир на рис. 3), снижается горизонтальная линия, высота которой зависит от массы, и система приходит в точке D' в состояние равновесия.

§ 4. Точная теория устойчивости

Общая картина устойчивости и эволюции, написанная широкими мазками в предыдущих параграфах, обладает тем существенным недостатком, что она наглядна и убедительна лишь для тех, кто расположен поверить в возможность такого грубого описания явления хотя бы в рамках классической ньютоновской механики и теории тяготения. Дело в том, что вовсе не очевидна возможность рассмотрения средних $\overline{p}$, $\overline{\rho}$ и «среднего» уравнения состояния $\overline{p}(\overline{\rho})$, так как закон усреднения можно указать лишь для определенной модели, т. е. для определенной зависимости

$$p = \overline{p}\psi\left(\frac{r}{R}\right), \quad \rho = \overline{\rho}\varphi\left(\frac{r}{R}\right),$$

где ψ и φ — не зависящие от времени безразмерные функции.

Ниже рассматривается общий случай зависимости с переменным γ, когда при изменении массы звезды меняются не только $\overline{p}$, $\overline{\rho}$, γ, но и сам вид безразмерных функций.

Поэтому особенно существенна возможность точного рассмотрения задачи устойчивости гравитирующей массы газа относительно изэнтропических радиальных перемещений.

Н. А. Дмитриевым эта задача решена точно и без каких-либо ограничений на распределение энтропии и химического состава по веществу звезды, кроме условия сферической симметрии. Подход к задаче и часть выводов совпадают с работой Толмана [17], мы их воспроизводим для полноты изложения.

Выпишем полную энергию звезды, складывающуюся из внутренней энергии вещества, составляющего звезду, кинетической и гравитационной энергии.

Полная энергия выражается в виде интеграла по радиусу. Однако удобно вместо радиуса r в качестве переменной интегрирования взять массу m, заключенную внутри шара данного радиуса r. Мгновенное распределение вещества при этом характеризуется заданием функции $r(m)$, а движение — заданием функции $r(m, t)$. Данный элемент массы характеризуется определенным значением m, сохраняющимся при перемещении элемента. Таким образом, m играет роль лагранжевой (а не эйлеровой) координаты, а скорость частицы равна

$$u = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m.$$

Из соотношения

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr$$

получим

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2 r'}, \tag{4.1}$$

где

$$r' = \frac{\partial r(m, t)}{\partial m}. \tag{4.2}$$

Полная энергия звезды $\mathscr{E}$ выражается интегралом

$$\mathscr{E} = \int_0^M \left[E(\rho, S, \alpha) - \frac{Gm}{r} + \frac{u^2}{2}\right] dm, \tag{4.3}$$

где M — полная масса; $u = \left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{m=\mathrm{const}}$ — скорость; E — внутренняя энергия единицы массы, зависящая от плотности ρ, энтропии S и химического состава, заданного условно одной величиной α*. Интеграл второго члена в квадратной скобке есть гравитационная энергия, третьего — кинетическая энергия.

В данном элементе массы S и α сохраняются при перемещениях, а так как ρ и α суть заданные функции независимой переменной m, то можно записать

$$E(\rho, S, \alpha) = E(\rho, m), \tag{4.4}$$

где $E(\rho, m)$ — известная функция, поскольку задано распределение S и α и уравнение состояния вещества. При помощи (4.2) ρ выражается через $r(m, t)$.

Ограничимся состояниями покоя $u = 0$, $r = r(m)$ и найдем условие минимума:

$$\mathscr{E}_n = \int_0^M \left[E(\rho, m) - \frac{Gm}{r}\right] dm. \tag{4.5}$$

* Заметим, что при рассмотрении гидродинамической устойчивости необходимо рассматривать именно энергию E как функцию ρ при постоянной S, а не свободную энергию F как функцию ρ при данной температуре T. В качестве исторического курьеза можно отметить, что последний способ рассмотрения привел Ландау [15[к выводу о неустойчивости невырожденной звезды; интересны также приведенные в [15]; высказывания Нильса Бора о звездах.

Очевидно, что состояние минимума будет устойчиво, так как из него не может возникнуть никакое другое состояние, ни с $u = 0$, ни тем более с $u^2 > 0$.

Мы имеем вариационную задачу нахождения экстремума интеграла, зависящего от варьируемой функции $r(m)$ и ее производной $r'(m)$, входящей через ρ, согласно (4.1).

Условие экстремума, т. е. равенство нулю первой вариации, стандартным способом дает уравнение Эйлера вариационной задачи, которое может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} = -\rho \frac{Gm}{r^2}. \tag{4.6}$$

Величина

$$\rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = -\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)} = p \tag{4.7}$$

есть давление. Таким образом, условие экстремума есть просто условие гидростатического равновесия —градиент давления равен объемной силе. Для исследования устойчивости равновесия необходимо найти вторую вариацию, т. е. коэффициент при $(\delta r)^2$, и определить ее знак.

Коэффициент при $(\delta r')^2$ пропорционален $\frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho}$.

Поэтому необходимым условием устойчивости является $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$, иначе, взяв малое, но высокочастотное δr, так, что $(\delta r)^2$ мало, а $(\delta r')^2$ велико, можно было бы получить $\delta^2 E < 0$.

Физический смысл этого условия очевиден — вещество с $\frac{\partial p}{\partial \rho} < 0$ неустойчиво в малом, при данном давлении, безотносительно к гравитации.

В учебниках вариационного исчисления (например, [5]) доказывается, что при выполнении $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$ необходимым и достаточным условием определенного знака второй вариации $\delta^2 E$ является непересечение соседних экстремалей, т. е. решений уравнений, получающихся из условия $\delta E = 0$.

Переводя эту теорему на язык рассматриваемой задачи, получаем следующее условие устойчивости звезды. Пусть $r_0(m)$ есть решение, отвечающее полной массе M_0; при этом на краю звезды, т. е. при $m = M_0$ должно быть выполнено естественное условие $p = 0$. Пусть $r_1(m)$ есть решение, отвечающее другой массе M_1, близкой к M_0. Тогда решение устойчиво, если при всех m

$$\frac{r_1(m) - r_0(m)}{M_1 - M_0} < 0. \tag{4.8}$$

Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы при увеличении массы ($M_1 - M_0 = \Delta > 0$), т. е. при добавлении массы Δ снаружи каждый внутренний элемент массы приблизился к центру ($\Delta r = r_1 - r_0 < 0$).

Такое условие является весьма естественным и его можно рассматривать как некое обобщение условия $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$. Объем звезды и каждой ее части должен уменьшаться при наложении внешнего давления.

Вместе с тем важно отметить, что это условие получено не интуитивно, а является точным математическим утверждением, полное формальное доказательство которого дано, например, в в указанном учебнике [5].

При интегрировании уравнения равновесия удобно задаться плотностью в центре. Тогда в результате интегрирования получается зависимость $M(\rho_c)$. Так как при малых m

$$r(m) = \left(\frac{3\,m}{4\pi\rho_c}\right)^{1/3}, \tag{4.9}$$

то легко убедиться, что условие (4.8) будет удовлетворено лишь при $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$.

Таким образом, дано строгое доказательство того, что решения, расположенные на спадающей ветви кривой $M(\rho_c)$, там, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, являются неустойчивыми относительно малых возмущений.

Этот результат был получен выше в § 2 весьма грубым способом и его точное подтверждение является аргументом в пользу качественной правильности грубого рассмотрения.

Вместе с тем надо отметить, что выполнение $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ является необходимым, но вообще говоря не достаточным для устойчивости.

В части звезды вещество может иметь $\gamma < \frac{4}{3}$ и звезда останется устойчивой, в малой части должно быть лишь $\gamma > 0$. Как найти эффективное среднее γ, которое позволило бы судить об устойчивости решения? Построение пары кривых $r_0(m)$ и $r_1(m)$ для близких ρ_{c0} и ρ_{c1}, которым соответствуют близкие M_0 и M_1, позволяет всегда вполне однозначно проверить устойчивость по выполнению (4.8) при всех m и таким образом дает точное, исчерпывающее и практически удобное решение вопроса.

Другой способ доказательства того, что максимум кривой $M(\rho_c)$ играет роль границы устойчивости, дан в конце § 6.

§ 5. Физические причины малости показателя адиабаты ($\gamma < \frac{4}{3}$)

Вещество, состоящее из невзаимодействующих частиц, абсолютное число которых сохраняется, имеет показатель адиабаты между $^5/_3$ и $^4/_3$ как при высокой температуре, так и в виде вырожденного Ферми-газа.

Показатель адиабаты может быть меньше $^4/_3$ по следующим причинам:

1. При высокой температуре, при наличии статистического равновесия между частицами, по принципу Ле-Шателье при повышении температуры происходят процессы, сопровождающиеся поглощением энергии. При этом давление снижается (по сравнению с состоянием с той же энтропией и плотностью) даже в том случае, когда число частиц на единицу массы увеличивается.

Хойл и Фаулер [6] особо отмечают роль процесса $Fe^{56}_{26} = 13\alpha + 4n$, дающего 50%-ное превращение при температуре 400 *кэв* и плотности $\rho = 1000$ *г/см*^{3} или $T = 600$ *кэв* и $\rho = 3 \cdot 10^6$ *г/см*^{3} (напомним, что 1 *кэв* $= 1{,}16 \cdot 10^7$ *град*).

Второй пример такого процесса — рождение пар (e^+, e^-). Заметим, что вследствие рождения пар показатель адиабаты при температуре, сравнимой с $m_e c^2 = 500$ *кэв*, станет меньше $^4/_3$ в любом веществе малой плотности, в котором энергия и давление определяются в основном излучением (при $T < 500$ *кэв*) или излучением и парами (e^+, e^-) при $T > 500$ *кэв* *.

2. При абсолютном нуле Сальпетер [7] получил кривую $p(\rho)$ с $\gamma < {}^4/_3$ при $\rho > 10^9$ *г/см*^{3}; Хамада и Сальпетер [8], рассматривая модели звезд, с этим уравнением состояния получили типичную кривую M от ρ_c с максимумом при $\rho_c \sim 10^9$ *г/см*^{3}**.

Причиной является уменьшение числа электронов за счет «нейтронизации» вещества: электроны, находящиеся на краю Ферми-распределения, дают с ядрами обратный β-процесс:

$$(Z, A) + e^- = (Z-1, A) + \nu.$$

Если бы не было этого процесса, давление вырожденного релятивистского газа зависело бы от плотности с показателем, близким к $^4/_3$. По принципу Ле-Шателье, с повышением плотности равновесие смещается в сторону понижения давления и γ становится меньше $^4/_3$.

---

* Примечание при корректуре. Закон изменения показания адиабаты при этом подробно рассмотрен в заметке Г. Пинаевой (Астрономический журнал, 1964 г., в печати).

** См. также книгу Уилера «Гравитация, нейтрино и Вселенная», ИЛ, 1962.

3. При дальнейшем повышении плотности при абсолютном нуле образуются свободные нейтроны. При плотности порядка ядерной нейтроны взаимодействуют и их притяжение, по-видимому, недостаточное для образования чисто нейтронных ядер [9, 10], все же существенно снижает давление и может дать $\gamma < \frac{4}{3}$ для нейтронного газа.

Рассматривая процессы, уменьшающие γ, следует напомнить, что весь изложенный выше способ рассмотрения гидродинамической устойчивости основан на разделении процессов на две резко различные группы.

1) Быстрые процессы, протекающие за время, меньшее в сравнении с гидродинамическим временем. По отношению к таким процессам вещество находится в каждый момент в состоянии равновесия, эти процессы протекают почти адиабатически, а следовательно, с *постоянной энтропией*. Когда, например, при повышении температуры равновесие $Fe \to 13\alpha + 4n$ сдвигается вправо, происходит поглощение энергии, но за счет увеличения числа частиц в целом энтропия сохраняется. Известная зависимость константы равновесия от температуры и плотности тождественно обеспечивает сохранение S.

Поэтому зависимости $E(\rho, S)$, $p(\rho, S)$, входящие в уравнения гидродинамики и гидростатики, уже включают в себя предположение о поддержании равновесия быстрых процессов, которые влияют на γ. Примером заведомо быстрого процесса является также рождение пар при высокой температуре.

2) Медленные процессы, примером которых является сгорание водорода. В звезде водород отнюдь не находится в равновесии с гелием. При быстром гидродинамическом расширении или сжатии вещества в условиях звезд главной последовательности концентрации водорода и гелия должны рассматриваться как константы.

Медленные процессы не влияют на γ, но рассматриваются как один из факторов постепенной эволюции.

Очевидно, в принципе возможны процессы, скорость которых как раз порядка гидродинамической. К этим процессам наша схема не применима и необходимо совместное рассмотрение гидродинамики и ядерного процесса.

Не исключено, что нейтронизация в определенных условиях может оказаться как раз таким процессом.

По замечанию А. А. Овчинникова *, качественным отличием такого случая является большая эффективная вязкость и затухание колебаний, наподобие отмеченного Альбертом Эйнштейном влияния обратимых химических реакций на звуковые колебания.

---

* Дипломная работа. МГУ, физический ф-т, 1961.

§ 6. Эффекты общей теории относительности

Известно, что с учетом общей теории относительности Ферми-газ из невзаимодействующих частиц дает кривую $M(\rho_c)$ с максимумом M [11], более того, даже решения, устойчивые относительно малых возмущений, на восходящей ветви $M(\rho_c)$ не соответствуют абсолютному минимуму энергии [12]. Другими словами, вещество ведет себя так, как нерелятивистское с $\gamma < 4/3$ при $\rho > \rho_{кр}$.

С учетом теории относительности надо иметь в виду, что сохраняющейся величиной является число барионов (плотность массы не пропорциональна плотности барионов), так как к массе покоя добавляется избыток энергии, деленный на c^2.

Обозначим плотность барионов через n, а показателем адиабаты назовем $\frac{d \ln p}{d \ln n} = \gamma$.

Определенное таким образом $\gamma \geqslant \frac{4}{3}$ для вырожденного газа и, в принципе, для отталкивающихся частиц [13] может достичь значения $\gamma = 2$.

Однако в уравнение гравитационного потенциала входит не n, а $\rho + \frac{3p}{c^2}$. Эта величина всегда асимптотически, при $n \to \infty$, пропорциональна p, поэтому и получается качественная картина $M(\rho_c)$, такая как для вещества с эффективным $\gamma < \frac{4}{3}$ при высокой плотности. Докажем более строго, не прибегая к аналогии с нерелятивистским случаем, что максимум кривой $M(\rho_c)$ представляет собой границу между устойчивыми и неустойчивыми решениями.

Известно, что производная $\frac{dM}{dN}$ массы звезды M по числу барионов N, не имеет особенности в максимуме [14]. Отсюда следует, что при том же значении $\rho_c = \rho_{кр}$, при котором имеет максимум $M(\rho_c)$, достигается также максимум $N(\rho_c)$.

Следовательно, слева и справа от $\rho_{кр}$ можно выбрать два различных стационарных решения $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ с одинаковым N. Одно из них можно представить как возмущенное другое:

$$\rho_2(r) = \rho_1(r) + \delta\rho.$$

В общем случае уравнения для малых возмущений, которые естественно рассматриваются при фиксированном N, $\delta N = 0$, имеются решения

$$\delta\rho = \varphi(r) e^{\omega t}.$$

В данном случае, вблизи $\rho_c = \rho_{кр}$, мы нашли частное решение возмущения $\delta\rho$, для которого $\omega = \omega^2 = 0$, поскольку рассматриваемое возмущение представляет собой разность двух близких стационарных (не зависящих от времени) решений *.

Очевидно, случай с $\omega^2 = 0$ лежит на границе между $\omega^2 < 0$, где ω мнимое, и $\omega^2 > 0$, где ω вещественно.

Первый случай соответствует устойчивости, второй — неустойчивости.

Эти соображения одинаково применимы как для модели звезды, построенной с учетом общей теории относительности, так и для нерелятивистского случая.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Н. А. Дмитриеву за ознакомление с его соображениями, А. Г. Масевич, Д. А. Франк-Каменецкому и другим участникам летней школы за дискуссию, Г. А. Пинаевой за помощь в оформлении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Физические процессы внутри звезд. М., Физматгиз, 1959.
2. М. Шварцшильд. Строение и эволюция звезд. М., ИЛ, 1961.
3. Г. И. Баренблатт, Я. Б. Зельдович. Докл. АН СССР, 118, 671, 1958.
4. J. Oppenheimer, H. Snyder. Phys. Rev., 56, 455, 1939.
5. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
6. F. Hoyle, W. Fowler. Astrophys. J., 132, 565, 1960.
7. E. E. Salpeter. Astrophys. J., 134, 669, 1961.
8. T. Hamada, E. E. Salpeter. Astrophys. J., 134, 683, 1961.
9. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 38, 1123, 1960.
10. K. A. Brueckner, L. L. Gammel, J. T. Kubis. Phys. Rev., 118, 1095, 1960.
11. J. Oppenheimer, G. H. Volkoff. Phys. Rev., 55, 374, 1939.
12. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 42, 641, 1962.
13. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 41, 1609, 1961.
14. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 42, 1667, 1962.
15. L. D. Landau. Z. Phys. Sowjetunion. 1, 285, 1932.
16. А. Б. Северный. Изв. Кр. АО, № 2, 1, 1948.
17. R. C. Tolman. Ap. J., 90, 541, 569, 1939.

* Метод нахождения частного решения для возмущений сравнением известных решений задачи систематически развивался в работе [3].

Поступила 29.IX 1962 г.

С. С. Моисеев

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ «БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ» УДАРНЫХ ВОЛН В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЕ

Обсуждается влияние коллективных процессов на поведение ударных волн в релятивистской плазме.

Показано, что толщина «бесстолкновительных» ударных волн падает с ростом энергии релятивистских электронов. Влияние слабых магнитных полей также падает с ростом энергии электронов.

On some peculiarities of non-collisional shock waves in the relativistic plasme, by *S. S. Moisseev*.— The influence of collective processes on behaviour of the shock waves in the relativistic plasma is discussed. It is shown, that the thickness of collisionsfree shock waves decreases, when the energy of relativistic electrons increases. The influence of a weak magnetic fields decreases in this case too.

1. Теория релятивистской плазмы должна найти себе применение при исследовании ряда астрофизических явлений. В качестве одного из примеров можно указать на отмеченную в [1] возможность преимущественного ускорения тяжелых элементов до релятивистских энергий за счет турбулентной энергии газомагнитной среды.

В силу малой плотности межзвездного газа большое значение приобретает изучение кинетики разреженной релятивистской плазмы.

Одной из особенностей релятивистской плазмы является уменьшение влияния парных столкновений по сравнению с влиянием коллективных процессов. Так, возрастают безразмерные параметры, характеризующие влияние коллективных процессов: $\omega_H \tau_D$ в γ раз, $\omega_0 \tau_D$ в $\gamma^{3/2}$ раза, где $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ (v — скорость частицы); ω_0, ω_H — соответственно плазменная частота и частота вращения частиц в магнитном поле; τ_D — время рассеяния частиц за счет парных столкновений [2].