Доклады Академии наук СССР
1963. Том 148, № 4

ФИЗИКА

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ

СТАБИЛИЗАЦИЯ «УНИВЕРСАЛЬНОЙ» НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ С РЕЛЯТИВИСТСКИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VII 1962)

1. Известно, что в неоднородной разреженной плазме, удерживаемой агнитным полем, возникает локальная неустойчивость на коротковолноых безмагнитных возмущениях, не связанная с конфигурацией магнитого поля ([1]). В ([2]) показано, что эта неустойчивость является «универсальой», т. е. не зависит от соотношений между градиентом температуры и радиентом плотности. При этом рассматривалась изотермическая плазма учитывалась конечность ионного ларморовского радиуса методом, разитым в ([3]). Ниже рассматривается плазма с нерелятивистскими ионами и елятивистскими электронами. В этом случае электронный ларморовский адиус сравним с ионным и учет конечности его, как будет показано ниже, ожет привести к стабилизации плазмы относительно «универсальной» еустойчивости. Мы примем следующие допущения: 1) давление плазмы ного меньше магнитного ($P \ll H^2/8\pi$); 2) квазинейтральность ($n_i = n_e$);) потенциальность электрических полей возмущения ($\mathbf{E} = -\vec{\nabla}\varphi$); 4) время толкновений много больше характерных времен задачи.

2. Функцию распределения вблизи точки $x = 0$ можно записать виде (магнитное поле направлено по z, неоднородность — по x)

$$f_\alpha = f_{0\alpha} + \left(x + \operatorname{sign} e_\alpha \frac{p_y}{m_\alpha \Omega_\alpha} \right) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial x} \quad (\alpha = i, e), \tag{1}$$

$$f_{0e} = \frac{\sigma n}{4\pi (mc)^3 K_2(\sigma)} e^{-\sigma\gamma} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \frac{n\sigma^3}{4\pi (mc)^3} e^{-\frac{\sigma}{mc} p};$$

$$\sigma = mc^2 / T_e; \quad \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad m_e = m, \quad m_i = M; \tag{2}$$

$$f_{0i} = n (2\pi M T_i)^{-3/2} \exp\left\{ -\frac{p^2}{2MT_i} \right\}; \quad \Omega_\alpha = \left| \frac{eH}{m_\alpha c} \right|.$$

Дисперсионное уравнение имеет вид (см., например, ([3]))

$$F = F_i + F_e = 0; \tag{3}$$

$$F_\alpha = \int (d\mathbf{p}) \left(\vec{\nabla} p \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \right). \tag{4}$$

Выбирая возмущения в виде

$$\varphi = \varphi_0(x) \exp i (y k_y + z k_z - \omega t),$$

етрудно получить

$$F_e = \frac{\sigma n}{mc^2} + \frac{\sigma}{mc^2} \left(\omega - \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{c^2}{\sigma} \frac{d}{dx} \right) \times$$

$$\times i\pi \sum_l \int d\mathbf{p} \cdot \delta_+ (\omega - k_z v_z + l\Omega_e / \gamma) f_{0e} I_l^2 \left(\frac{k_y p_\perp}{m\Omega_e} \right); \tag{5}$$

$$\delta_+(x) = \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x} + \delta(x);$$

$$F_i = \frac{n}{T_i} + \frac{1}{T_i}\left(\omega + \frac{k_y}{\Omega_i}\frac{T_i}{M}\frac{d}{dx}\right) \times$$

$$\times\, i\pi \sum_l \int d\mathbf{p} \cdot \delta_+ (\omega - k_z v_z + l\Omega_i) f_{0i} I_l^2 \left(\frac{k_y p_\perp}{M\Omega_i}\right). \qquad (6)$$

Полагая

$$\omega \ll \Omega_i; \quad \Omega_e / \gamma; \quad k_y \bar{p}_\perp \ll m_\alpha \Omega_\alpha, \qquad (7)$$

получаем после подстановки (4) — (6) в (3):

$$\sum_\alpha \left\{\frac{n}{T_\alpha} + \frac{i\pi}{T_\alpha}\left(\omega + \operatorname{sign} e_\alpha \cdot \frac{k_y T_\alpha}{m_\alpha \Omega_\alpha}\frac{d}{dx}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int d\mathbf{p} \cdot \delta_+ (\omega - k_z v_z) \left(1 - \frac{k_y^2 p_\perp^2}{m_\alpha^2 \Omega_\alpha^2}\right) f_{0\alpha}\right\} = 0. \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) в общем виде затруднительно, и мы исследуем его в различных предельных случаях. Кроме того, нас будут интересовать коротковолновые возмущения, что дает возможность воспользоваться неравенством:

$$\frac{k_y k_0 T_i}{\omega \Omega_i M} \gg 1, \qquad (9)$$

где $1 / k_0$ — характерная длина неоднородности. Электроны будем считать сильно релятивистскими ($\sigma \ll 1$).

3. Рассмотрим случай «больших» частот:

$$\omega \gg k_z \bar{v}_e \gg k_z \bar{v}_i.$$

Пренебрегая вычетными членами в (8), получаем

$$\omega^2 \left[M (nT_i)' - 16 (mc)^2 \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)'\right] = -\frac{2}{3}\left(Mc\Omega_i \frac{k_z}{k_y}\right)^2 n', \qquad (10)$$

где штрих означает дифференцирование по x.

Для того чтобы представить результат в более наглядной форме, положим

$$\frac{T_e'}{T_e} = \frac{1}{2} s \frac{T_i'}{T_i}.$$

Условие устойчивости имеет вид

$$1 - a + (1 - sa)\frac{d \ln T_i}{d \ln n} > 0, \qquad (11)$$

где

$$a = 16 \frac{m}{M}\frac{T_e}{T_i}\frac{1}{\sigma} \sim 16 \frac{r_e}{r_i};$$

r — ларморовский радиус. При $a \to 0$ условие (11) совпадает с полученным в [2]. Эффект стабилизации плазмы за счет конечности ларморовского радиуса релятивистских электронов существенно начинает сказываться при $a \gg 1$. (Например, при $T_e \sim 5$ Мэв, $T_i \sim 0{,}01$ Мэв, $\sigma \sim 10^{-1}$ получаем $a \sim 40$.) Будем считать также $|s| \gtrsim 1$. В этом случае условие (11) дает

$$\frac{d \ln T_i}{d \ln n} > -\frac{1}{s} \quad (s > 0), \qquad (12)$$

$$\frac{d \ln T_i}{d \ln n} < \frac{1}{|s|} \quad (s < 0).$$

4. «Средние» частоты: $k_z\bar{v}_i \ll \omega \ll k_z v_e$. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$i\pi \frac{\omega}{ck_z} b_e + \omega \frac{n}{T_e} + b_i = 0, \tag{13}$$

где

$$b_e = n' - 48 \frac{k_y^2 c^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{n}{\sigma^2} \right)', \qquad b_i = n' - \frac{k_y^2}{\Omega_i^2 M} (nT_i)'. \tag{14}$$

Записывая $\omega = \omega' + i\omega''$, получаем

$$\omega' = -\frac{1}{\pi} \frac{ck_z}{b_e} \frac{\sigma n \Omega_e}{c^2 k_y} \omega'', \qquad \omega'' = \frac{\pi b_i b_e c \, |k_z|}{\pi^2 b_e^2 + n^2 \sigma^2 \Omega_e^2 k_z^2 / (ck_y)^2}. \tag{15}$$

Из условия устойчивости $b_i b_e < 0$ получаем

$$\frac{1}{k^2 r_i^2} \geqslant \frac{d \ln T_i}{d \ln n} \geqslant -\frac{1}{s} \quad (s > 0), \qquad \frac{d \ln T_i}{d \ln n} < \frac{1}{|s|} \quad (s < 0). \tag{16}$$

5. «Низкие» частоты: $\omega \ll k_z \bar{v}_i$. В этом случае вычетные члены от электронной и ионной функций распределения играют существенную роль. Вклад электронов в дисперсионное уравнение мал и можно воспользоваться результатами работы ([2]). Условие устойчивости имеет вид

$$\frac{d \ln T_i}{d \ln n} \leqslant 1. \tag{17}$$

6. Используя результаты (12), (16) и (17), получаем, что на рассматриваемых ветвях колебаний плазма стабилизирована при следующих значениях параметра $d \ln T_i / d \ln n$:

$$-\frac{1}{s} < \frac{d \ln T_i}{d \ln n} < 1 \quad (s > 0), \qquad \frac{d \ln T_i}{d \ln n} < \frac{1}{|s|} \quad (s < 0). \tag{18}$$

Таким образом, наличие релятивистской электронной компоненты в неоднородной плазме приводит к тому, что неустойчивость, возникающая на продольных колебаниях, не является «универсальной».

В заключение выражаю благодарность Р. З. Сагдееву за внимание и ценные советы, С. С. Моисееву и В. Н. Ораевскому — за плодотворные дискуссии.

Новосибирский государственный университет

Поступило 21 VI 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ДАН, 138, 581 (1961). [2] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Универсальная неустойчивость магнитного удержания плазмы, Препринт Инст. ядерн. физики Сибирск. отд. АН СССР, 1962. [3] M. N. Rosenbluth, N. A. Rostoker, N. Krall, Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., Salzburg, 1961.