Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. А. ГАЛЕЕВ

# ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 13 XII 1962)*

При отыскании собственных значений частот $\omega$ в линейной теории устойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле $H^{(0)}$ возникает обобщенная задача на собственные значения интегро-дифференциального оператора вида:

$$\hat{L}(x, \omega)\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{a}^{b} d\tau K(\xi, \omega, \tau)\, \delta(\xi - x - \varepsilon f(\tau))\, \psi(\xi). \tag{1}$$

Здесь $\hat{L}(x, \omega)$ — некоторый линейный дифференциальный оператор второго порядка $\hat{L}(x, \omega) \equiv \varepsilon^2 d^2/dx^2 + a(x, \omega)$, $\varepsilon$ — малый параметр, а коэффициент $a(x, \omega)$ и ядро $K(x, \omega, \tau)$ параметрически зависят от $\omega$ и являются медленно меняющимися функциями в смысле $\varepsilon\, d \ln K(x)/dx$, $\varepsilon\, d \ln a(x)/dx \ll 1$.

Например, в задаче о так называемой «универсальной неустойчивости» неоднородной плазмы интегральный оператор $\hat{K}$ имеет вид:

$$\hat{K}^{i,e}\psi(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[-\frac{m_{i,e} v_\perp^2}{2T(\xi)}\right] v_\perp dv_\perp \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2\pi/\omega_{Hi,e}} dt \exp\left\{\frac{ik_\perp v_\perp}{\omega_{Hi,e}}\left[\cos(\varphi - \omega_{Hi,e} t) - \cos\varphi\right]\right\}, \tag{1a}$$

$$\delta\left(\xi - x\, \frac{v_\perp}{\omega_{Hi,e}}\left[\sin(\varphi - \omega_{Hi,e} t) - \sin\varphi\right]\right)\psi(\xi),$$

а роль малого параметра играет ларморовский радиус

$$r_{i,e} = \sqrt{\frac{T}{m_{i,e}}}\, \omega_{Hi,e}^{-1} \left(\omega_{Hi,e} = \frac{e_{i,e} H^{(0)}}{m_{i,e} c}, \quad \omega \ll \omega_{Hi}\right.$$

($T(x)$ — температура электронов и ионов). В этом случае оператор, соответствующий (1), является комплексным даже для действительных $x$. Мнимая часть в нем возникает из-за учета полувычета в интегралах $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{i,e}^{(0)}}{\omega + k_\parallel v_\parallel} dv_\parallel$ с невозмущенной функцией распределения ионов и электронов $f_{i,e}^{(0)}(x, \mathbf{v})$. Эти полувычеты описывают взаимодействие «дрейфовых» волн с резонансными ионами и электронами ($v_\parallel = -\omega/k_\parallel$).

Мы будем предполагать далее, что уравнение (1) можно рассматривать на комплексной плоскости $z$, причем при решении задачи на собственные значения $\omega$ потребуем, чтобы собственные функции удовлетворяли условию $\psi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Наличие малого параметра $\varepsilon$ в уравнении (1) позволяет использовать асимптотические методы, аналогичные $WKB$-методу в квантовой механике. $\psi(x)$ представим в виде:

$$\psi(x) = \exp\left\{i \int\limits^{x} k_x(x, \omega)\, dx\right\}, \tag{2}$$

где $k_x(x, \omega) = k_x^{(0)}(x, \omega) + \varepsilon k_x^{(1)}(x, \omega) + \varepsilon^2 k_x^{(2)}(x, \omega) + \ldots$, $k_x^{(\alpha)}(x, \omega)$ — медленно меняющиеся функции ($d \ln k_x^{(\alpha)} / dx \ll 1$).

В первом приближении получаем для $k_x^{(0)}$ некоторое, вообще говоря, трансцендентное уравнение:

$$-\varepsilon^2 [k_x^{(0)}(x, \omega)]^2 + a(x, \omega) = \int_a^b K(x, \omega, \tau) \exp [ik^{(0)}(x, \omega) \varepsilon f(\tau)] d\tau. \quad (3)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением случая, когда (3) имеет вид:

$$-\varepsilon^2 [k_x^{(0)}(x, \omega)]^2 + a(x, \omega) - F(x, \omega, \varepsilon^2 [k_x^{(0)}(x, \omega)]^2) = 0 \quad (4)$$

(именно этот случай имеет место для оператора (1а)). Корни уравнения (4) имеют вид $\pm k_{xj}^{(0)}(x, \omega)$ ($j = 1, 2, \ldots$).

Если существует такой корень, что $\operatorname{Im} k_j^{(0)}(x) \neq 0$ при $x \to \pm\infty$, то соответствующее ему решение $\psi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ в двух случаях: а) когда $\operatorname{Im} k_j^{(0)}(x, \omega)$ имеет на полуосях $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ различные знаки и мы можем, не пересекая линии Стокса, продолжить решение (2) из области $x \to -\infty$ в область $x \to +\infty$; б) когда $\operatorname{Im} k_j^{(0)}(x, \omega)$ одного знака при $x \to \pm\infty$, но в так называемых точках поворота $z_1$, $z_2$ (где $k_x^{(0)}(z_{1,2}, \omega) = 0$ и $WKB$-приближение уже несправедливо) происходит смена решений (2), соответствующих различным знакам корня $\pm k_j^{(0)}$.

Во втором случае при продолжении приближенного решения (2) из области $x \to -\infty$ в область $x \to +\infty$ необходимо сшивать его с точным решением уравнения (1) вблизи точек поворота. Для построения точного решения представим интегральный оператор в виде дифференциального оператора бесконечного порядка, который в рассматриваемом нами случае является формальным разложением в ряд по $\varepsilon^2 d^2/dx^2$ функции $F(x, \omega, -\varepsilon^2 d^2/dx^2)$ (см. (4)). Аппроксимируя вблизи точки поворота $z_1$ малую разность $F(z, \omega, 0) - a(z, \omega)$ двумя членами разложения в ряд:

$$F(z, \omega, 0) - a(z, \omega) = -(z - z_1)/R,$$

получаем дифференциальное уравнение в безразмерной форме

$$\frac{d^2\psi(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} + \tilde{z}\psi - \sum_{l=2}^{\infty} (1 - \alpha_2)^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{R(1 - \alpha_2)}\right)^{\frac{2(l-1)}{3}} \alpha_{2l} \frac{d^{2l}\psi}{d\tilde{z}^{2l}} = 0, \quad (5)$$

где $\alpha_{2l} = \frac{(-1)^l}{l!} \left[\frac{d^l}{d\theta^l} F(z_1, \omega, \theta)\right]_{\theta=0}$ — коэффициенты, которые вблизи точки поворота можно считать постоянными, $\tilde{z} = (z - z_1)/(R\varepsilon^2(1 - \alpha_2))^{1/3}$.

Из этого уравнения видно, что имеется только два корня $k_x^{(0)}(z) \simeq \pm\sqrt{-\tilde{z}}$, которые могут обращаться в нуль при $\tilde{z} \to 0$. Для этих двух корней нам необходимо найти точное решение при $\tilde{z} \gg 1$, где уже применимо $WKB$-приближение, и, следовательно, приближенное и точное решения можно будет сшить в общей области их применимости. Остальные корни $k_{xj}^{(0)}$ даже при $\tilde{z} \to 0$ остаются конечными, и для них справедливость $WKB$-приближения нигде не нарушается.

Решая уравнение (5) с помощью обобщенного метода Лапласа, легко показать, что асимптотическое поведение решений, соответствующих корням $k_x^{(0)} \simeq \pm\sqrt{-\tilde{z}}$, такое же, как у функций Эйри

$$\psi(z) = \exp\{\pm {}^2/_3 (-\tilde{z})^{3/2}\}. \quad (6)$$

Как видно из (6), в комплексной плоскости $z$ от точки поворота $z_1$ отходят три луча $L$, на которых решение чисто осциллирующее, и три луча $N$, на которых оно чисто действительно и монотонно. При нарушении условия

$|(z-z_1)/R| \ll 1$ эти лучи переходят в линии действительной

$$\mathrm{Im}\int_{z_1}^{z} k_x(z)\,dz = 0, \quad z \in L,$$

и мнимой

$$\mathrm{Re}\int_{z_1}^{z} k_x(z)\,dz = 0, \quad z \in N,$$

фазы функции (2) в $WKB$-приближении (см. рис. 1). Заметим, что если определить решение $\psi(z)$ как спадающее ($\psi(z)\to 0$) при $|z|\to\infty$, $z\in N_{01}$, то линии $L$ будут ограничивать область $z\in D_1$, $N_{01}\in D_1$, в которой $\psi(z)\to 0$ при $|z|\to 0$. Учитывая это замечание и то, что в силу (5) связь между решениями, спадающим на линии $N_{01}$ и осциллирующим на $L_0$, такая же, как в обычной квантовой механике, мы получаем условие для определения собственных частот $\omega$, соответствующих решениям $\psi(z)\to 0$, $|z|\to\infty$, $z\in D_{1,2}$:

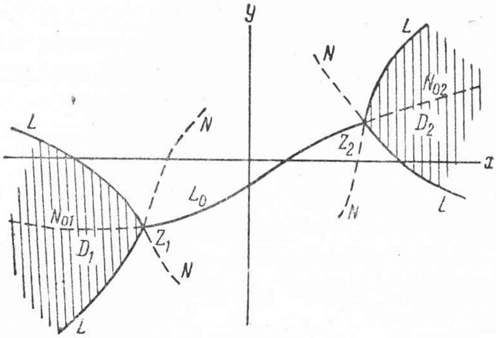


Рис. 1

$$\int_{z_1}^{z_2} k_x^{(0)}(z, \omega^{(p)})\,dz = \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

в случае, когда имеются две точки поворота $z_{1,2}$, соединенные линией $L_0$ (см. рис. 1). (В отличие от обычной квантовой механики интегрирование здесь идет в комплексной плоскости $z$ по линии $L_0$, а волновое число необходимо определять из трансцендентного уравнения (3)). Решение $\psi(x)\to 0$ в этом случае при $x\to\pm\infty$, если области $D_{1,2}$ охватывают обе полуоси $x\to\pm\infty$ (рис. 1).

Итак, собственные частоты $\omega^{(p)}$ можно получить из условия (7), если знать аналитические функции $a(z,\omega)$, $K(z,\omega,\tau)$ и определить $k_x^{(0)}(z,\omega)$ из трансцендентного уравнения (3). Однако в теории устойчивости часто достаточно ограничиться знаком и порядком величины инкремента $\nu = -\mathrm{Im}\,\omega$. Для их нахождения полезными оказываются интегральные соотношения, которые легко получить из дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 d^2\psi/dx^2 + a(x,\omega)\psi - F(x,\omega,-\varepsilon^2 d^2/dx^2)\psi = 0, \tag{8}$$

соответствующего (4). Действительно, умножим его на $\psi^*(x)$ и проинтегрируем в «бесконечных» пределах. Тогда, используя вид (2) функции $\psi(x)$ и интегрирование по частям, получим:

$$\varepsilon^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 dx - \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}[a(x,\omega) - F(x,\omega,\varepsilon^2|k_x(x,\omega)|^2)]\,|\psi|^2\,dx = 0,$$

$$\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}[a(x,\omega) - F(x,\omega,\varepsilon^2|k_x(x,\omega)|^2)]\,|\psi|^2\,dx = 0. \tag{9}$$

Второе условие в теории устойчивости плазмы имеет простой физический смысл закона сохранения энергии в системе волновое возмущение + частицы плазмы (как мы уже отмечали, именно мнимая часть интегралов $\int\frac{f_{i,e}^{(0)}}{\omega+k_\parallel v_\parallel}dv_\parallel$, входящих в выражения для $a(x)$ и $F(x)$, описывает взаимодействие волны и частиц).

В наиболее часто встречающемся случае, когда $U(x) \equiv -\operatorname{Re} k_x^2(x, \omega)$ имеет форму «ямы» ($U(\pm\infty) > 0$, $\pm U(x) < 0$ при $x_1 < x < x_1$), а $|\operatorname{Im} k_x| \ll |k_x|$, функция $\psi(x)$ существенно отлична от нуля и является почти чисто осциллирующей внутри «ямы», но почти сразу за точками $x_1$, $x_2$ спадает экспоненциально. В этом случае из второго условия (9) следует, что

$$\operatorname{Im}\{a(x^{(p)}, \omega^{(p)}) - F(x^{(p)}, \omega^{(p)}, \varepsilon^2 |k_x|(x^{(p)}, \omega^{(p)})|^2)\} = 0, \; x_1 < x^{(p)} < x_2. \quad (10а)$$

Это условие совместно с уравнением

$$\operatorname{Re} \varepsilon^2 k_x^2 (x^{(p)}, \omega^{(p)}) - \operatorname{Re}\{a(x^{(p)}, \omega^{(p)}) - F(x^{(p)}, \omega^{(p)}, \varepsilon^2 k_x^2)\} = 0, \quad (10б)$$

вытекающим из (8), может служить для определения знака и порядка величины $\operatorname{Im} \omega^{(p)}$. Уравнение (1), получающееся в частной задаче о так называемой «универсальной неустойчивости» неоднородной разреженной плазмы, приведено в работе ([1]) и имеет в общем случае очень громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся лишь приведением результатов решения этой задачи с помощью (10а, б).

В случае параллельности силовых линий магнитного поля $H^{(0)}$ в области частот $k_z u_i < \omega < k_z V_A$ ($u_i = \sqrt{T/m_i}$, $V_A = \sqrt{H^2/4\pi n_0 m_i}$, $n_0$, $T$ — плотность и температура плазмы, возмущение $\psi$ выбираем в виде $\psi \equiv \psi(x) \times \exp\{i\omega t + ik_y y + ik_z z\}$), в плазме даже в отсутствие градиента температуры ($dT/dx \equiv 0$) развивается неустойчивость с инкрементом $\nu \sim \frac{ck_y T}{en_0 H} \frac{dn_0}{dx}$ относительно возмущений с длинами волн $\lambda_x \sim r_i$ ([2]). Если же учесть эффект непараллельности силовых линий магнитного поля («shear»), когда их угол наклона $\theta(x)$ относительно оси $z$ (поле $\mathbf{H}^{(0)}$ при этом лежит в плоскости $(y, z)$) меняется с координатой $x$, то уже при условии *

$$R\frac{d\theta}{dx} \sim \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\theta}{dx} dx > \frac{r_i}{R}, \quad (11)$$

где $R$ — характерный размер, на котором существенно меняется плотность $n(x)$, неустойчивость в отсутствие градиента температуры $T(x)$ стабилизируется. Это происходит потому, что во втором условии (9) уже нельзя во всей области локализации возмущения пренебречь полувычетом в интегралах с ионной функцией распределения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_i^{(0)}}{\omega + k_\parallel v_\parallel} dv_\parallel \quad \left(k_\parallel(x) = k_z + k_y \int^x \frac{d\theta}{dx} dx\right),$$

который описывает «затухание Ландау» на ионах.

При «shear'е» порядка (11) «дрейфовые» непотенциальные ($\omega > k_\parallel V_A$) волны не взаимодействуют в области своей локализации с ионами и остаются неустойчивыми, правда, лишь при $d \ln T / d \ln n < 0$. Неустойчивость относительно этих возмущений удается стабилизировать сужением «ямы» $U(x)$ при таком «shear'е», когда длина волны $\lambda_x$ становится по порядку величины больше ширины $X = x_2 - x_1$ «ямы» и финитных решений $\psi(x)$ не существует. Наибольшая величина shear'а $R\, d\theta/dx > \sqrt{8\pi nT/H^2}$ требуется для стабилизации возмущений в области частот $\omega > k_z u_e$.

Автор выражает искреннюю благодарность Р. З. Сагдееву за постоянный интерес к работе и ценные советы, В. Е. Захарову за полезное обсуждение.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
10 XII 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Галеев, Препринт Новосибирск. гос. унив., 1962. [2] Б. Б. Кадомцев, А. К. Тимофеев, ДАН, **135**, 581 (1962); А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Препринт Инст. ядерн. физ. Сибирск. отд. АН СССР, 1962; А. Б. Михайловский, Л. Н. Рудаков, Препринт Инст. атомн. энергии им. И. В. Курчатова, 1962. [3] M. N. Rosenbluth, Summary, Conference of Plasma Stability, Harwell, Sept. 1962.

* Этот результат согласуется с предварительным рассмотрением ([3]).