Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 4

ФИЗИКА

В. Н. ОРАЕВСКИЙ, Р. З. САГДЕЕВ

ВЛИЯНИЕ «ДРЕЙФОВЫХ» ВОЛН НА ДИФФУЗИЮ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Л. А. Арцимовичем 11 I 1963)

Недавние теоретические исследования устойчивости равновесия неоднородной плазмы в сильном магнитном поле ([1], [2]) показывают, что, по крайней мере, в магнитных ловушках с большим ларморовским радиусом ($r_i/r \lesssim 1$, r_i — ларморовский радиус ионов, r — поперечный размер магнитной ловушки), существуют неустойчивости с длинами волн порядка или меньше r_i, которые, по-видимому, носят «универсальный» характер *. Важно знать, насколько возникающие вследствие этой неустойчивости пульсации ухудшают магнитное удержание плазмы. При этом следует различать два случая: 1) $\frac{p^2}{H^2/8\pi} = \beta < \frac{m}{M}$ и 2) $\frac{m}{M} < \beta \ll 1$.

В первом случае существует неустойчивость апериодического типа ([1]) с инкрементом нарастания

$$\nu \sim k_0 v_i$$

$\left(\text{где } k_0 \equiv \frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dx}\right.$, а v_i — ионная тепловая скорость$\Big)$, причем $\nu > k_z v_i$. Поэтому коэффициент аномальной диффузии D, связанный с этой неустойчивостью, можно оценить из простых размерностных соотношений:

$$D \sim \frac{\nu}{k_x^2}.$$

Подставляя сюда значение инкремента ν и минимальное значение k_x, которое оказывается порядка $1/r_i$ ([1]), легко получить, что

$$D \sim \frac{r_i}{r}\frac{cT}{eH}.$$

Рассмотрим подробнее второй предельный случай, представляющий наибольший интерес для приложений. В этом случае существуют лишь неустойчивости по отношению к раскачке «дрейфовых» волн. Следуя ([2], [3]), можно записать

$$\omega \simeq \frac{\omega_n}{k_y r_i}\left(1 + i\sqrt{\frac{m}{M}}\frac{\omega_n}{|k_z| v_i}\right). \qquad (1)$$

Здесь $\omega_n = k_y v_n$, $v_n = k_0 r_i v_i$, $n_0 = n_0(x)$, $T_0(x) = \mathrm{const}$. Такая зависимость сохраняется при $\omega_n/v_a < |k_z| < \omega_n/v_i$. При больших $|k_z|$ «дрейфовые» волны становятся затухающими:

$$\omega \simeq \omega_n\left[1 - i\exp\left(-\frac{\omega_n^2}{k_z^2 v_i^2}\right)\right]. \qquad (2)$$

(Становится существенным вклад «затухания Ландау» от резонансных ионов $\omega/k_z \approx v_z$.) При $k_z < \omega_n/v_a$ неустойчивость тоже отсутствует. Для дальнейшего удобно представить $\nu\,(\omega/k_z)$ графически (см. рис. 1).

* Эти неустойчивости отсутствуют в достаточно «коротких» системах, где $L \lesssim 10\,r$ (L — «эффективная» длина ловушки вдоль силовой линии).

Отметим, что при выводе (1) (см. [3]) рассматривались возмущения, осциллирующие внутри области неоднородности и затухающие при $x \to \infty$. Иными словами, рассматривались финитные решения в квазиклассическом приближении. В этом случае зависимость возмущенных величин от x имеет вид $e^{ik_x x}$, причем k_x определяется «дисперсионным» уравнением:

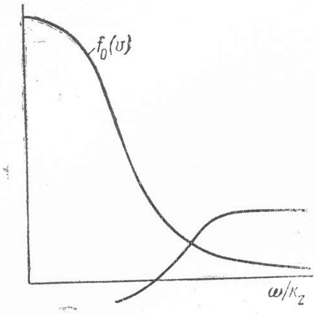

Рис. 1

$$\frac{2n}{T} - \sum \left[\frac{\omega}{T} - \frac{k_y}{m_j \Omega_j} \frac{d}{dx} \right] A(\theta_j) \frac{n_0(x)}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-m_j v^2/2T)\, dv}{\omega - k_z v} = 0, \qquad (3)$$

где $\Omega_j = eH/m_j c$, $A(\theta_j) = e^{-\theta_j^2/2} I_0(\theta_j^2/2)$, $\theta_j = k_\perp r_j$, $k_\perp^2 = k_y^2 + k_x^2$.

Из (1) видно, что инкремент нарастания волн меньше ω и $k_z v_i$. Поэтому естественно для учета усредненного влияния «дрейфовых» волн на «диффузию» применить квазилинейный метод [4]. Если длины волн турбулентных пульсаций λ_n превосходят ларморовский радиус частиц, можно воспользоваться дрейфовым кинетическим уравнением.

Разобьем, следуя [4], функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ на «медленно меняющуюся» $f_0(x, \mathbf{v}, t)$ и «быстро осциллирующую» $f_\sim(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ части. Уравнение для $f_\sim$ имеет такой же вид, как и в линейной теории*:

$$f_\sim = \frac{c\dfrac{E_y}{H}\dfrac{\partial f_0}{\partial x} + \dfrac{k_z}{k_y}\dfrac{e}{m} E_y \dfrac{\partial f_0}{\partial v_z}}{-i\omega + ik_z v_z}, \qquad (4)$$

где

$$E_y = \sum E_k e^{i(\omega t - \mathbf{kr})} + \text{c. c.},$$

а в уравнении для f_0 нужно удержать усредненный член второго порядка:

$$\frac{df_0}{dt} \simeq \sum_k \left\{ \frac{c}{H}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{k_z}{k_y}\frac{\partial}{\partial v_z} \right\} |E_k|^2 \operatorname{Im}(\omega - k_z v_z)^{-1} \left\{ \frac{c}{H}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{k_z}{k_y}\frac{\partial}{\partial v_z} \right\} f_0. \qquad (5)$$

Член

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ c^2 \frac{|E_k|^2}{H^2} \operatorname{Im}(\omega - k_z v_z)^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\} \qquad (6)$$

в уравнении (5) и дает аномальную диффузию. Можно показать, что если не делать никаких предположений об отношении r_i/λ_n, то член, описывающий аномальную диффузию, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ c^2 \frac{|E_k|^2}{H^2} J_0^2(\theta) \operatorname{Im}(\omega - k_z v_z)^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\}, \qquad (7)$$

где $\theta = k_\perp v_\perp / \Omega_j$.

Как видно из (7), скорость аномальной диффузии определяется спектром

$$|E|^2 = |E|^2 \left(\frac{\omega}{k_z} \right),$$

* В рассматриваемых нами «дрейфовых» волнах электрические поля можно считать потенциальными, т. е. $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Это соотношение используется в дальнейшем.

который устанавливается из-за конкуренции двух факторов: 1) «накачка» «дрейфовых» волн вследствие неустойчивости; 2) нелинейные эффекты взаимодействия между разными «гармониками». Так как нет регулярного метода отыскания спектра турбулентности в такого рода задачах, мы проведем оценку порядка величины пульсаций, исходя из следующих наглядных физических соображений.

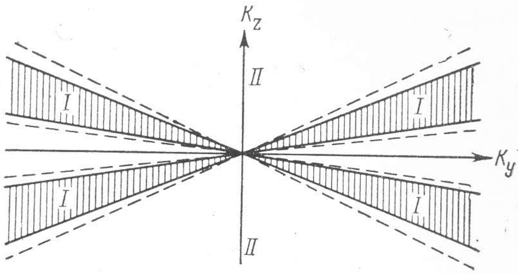

Рис. 2

На рис. 2 в пространстве $\mathbf{k}$ изображена область неустойчивости (область I — заштрихована), получающаяся из линейной теории. Если представить турбулентный «фон» как суперпозицию различных «гармоник» — масштабов $\mathbf{k}$, то процесс установления спектра на «языке» рис. 2 происходит следующим образом. Вследствие неустойчивости амплитуды пульсаций с $\mathbf{k}$, лежащими внутри области I, начинают расти. По мере возрастания амплитуды включается нелинейное взаимодействие между «масштабами» внутри области I, приводящее, в частности, к «рождению» флуктуаций с $\mathbf{k}$, лежащими в области II, где имеется сильное затухание (см. (2)). Таким образом, когда оба процесса сравниваются, устанавливается квазистационарная картина.

В кинетическом уравнении для ионов нелинейный член имеет вид $\frac{e}{M}E_\perp \frac{\partial f_1}{\partial v_\perp}$. Для оценки амплитуды пульсаций сравним его с линейным членом $\partial f_1/\partial t \sim \nu f_1$. Полагая $\partial f_1/\partial v \sim f_1/v_i$, получим

$$\nu f_1 \sim \frac{e}{M} E_\perp \frac{f_1}{v_i}; \quad E_\perp \sim \frac{Mv_i}{e}\nu. \tag{8}$$

Из (1) видно, что наибольший вклад в диффузию можно ожидать от волн с $kr_i \sim (M\beta/m)^{1/2}$. Используя (1), (7), (8) можно оценить коэффициент диффузии *:

$$D_x \approx \sum c^2 \frac{|E_k|^2}{H^2}\frac{1}{kr_i}\frac{\nu}{\omega^2} \approx \frac{M^2c^2v_i^2}{e^2H^2}\frac{1}{kr_i}\frac{v_i}{r} \approx \left(\frac{m}{M\beta}\right)^{1/2}\frac{r_i}{r}\frac{cT}{eH}. \tag{9}$$

До сих пор мы предполагаем, что распределение электронов по скоростям близко к максвелловскому. Поэтому все записанные выше выражения справедливы лишь в том случае, когда столкновения хотя и редки, но успевают восстанавливать максвелловское распределение, нарушаемое диффузией резонансных электронов (для которых $v \approx \omega/k_z$). В противоположном предельном случае (когда диффузия резонансных частиц, определяемая членом, описывающим столкновения электронов с волнами $St_b(f)$, существенно влияет на инкремент) возникает любопытная ситуация, при которой отпадает необходимость оценки амплитуд пульсаций. Для этого случая

$$St_b(f) \gg St_c(f), \tag{10}$$

где $St_c = (f)$ — член, описывающий кулоновские столкновения. В коэффициент диффузии входит уже сильно заниженное значение инкремента $\bar{\nu}$:

$$\bar{D}_x \approx \sum c^2 \frac{|E_k|^2}{H^2}\frac{\bar{\nu}}{\bar{\omega}^2}\frac{1}{kr_i}. \tag{11}$$

Для определения инкремента, учитывая (10), представим функцию распределения в резонансной области в виде $f = f^{(0)} + f^{(1)}$, где $f^{(0)}$ удовлет-

* Естественно, при $\nu \sim \omega$ выражение для коэффициента диффузии (7) не точно, поэтому оно используется лишь для оценки порядка величины.

воряет уравнению:

$$St_b\,(f^{(0)}) = 0. \tag{12}$$

Решение этого уравнения дает установившееся «плато» в пространстве (x, v_z), так что

$$\nu^{(0)}\,\{f^{(0)}\} = \frac{\omega}{n_0}\left\{-v_e^2 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} + \frac{cT}{eH}\frac{k_y}{k_z}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x}\right\}_{v_z \approx \omega/k_z} = 0 \tag{13}$$

Находя $f^{(1)}$ из уравнения

$$[St_b\,(f^{(1)}) + St_c\,(f^{(0)})]_{v_z \approx \omega/k_z} = 0 \tag{14}$$

и учитывая при этом, что сама величина $f^{(0)}$ (но не ее производные по v_z!) мало отличается от максвелловской, получим

$$\bar{\nu} \approx \frac{\nu \nu_e v_e^2}{\bar{D}_{v_z}}, \tag{15}$$

где ν_e — частота электронных столкновений, $D_{v_z} \approx e^2 \mid E_z \mid^2/m^2\omega$; v_e^2 — электронная тепловая скорость. Из (15) и (13) легко получить коэффициент аномальной диффузии

$$\bar{D}_x \approx \nu_e r^2 \frac{v_a}{v_e}. \tag{16}$$

Поступило
5 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев, ДАН, **146**, 581 (1962). [2] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Препринт Инст. ядерн. физ. Сибирск. отд. АН СССР, 1962; Л. И. Рудаков, А. Михайловский, Препринт Инст. атомн. энергии им. И. В. Курчатова, 1962. [3] А. А. Галеев, Препринт Новосибирск. гос. унив., 1962. [4] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УМН, 701 (1961).