Доклады Академии наук СССР
1963. Том 152, № 3

ФИЗИКА

В. И. КАРПМАН

К ТЕОРИИ СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 6 IV 1963)

В релаксационных процессах, происходящих в плазме без столкновений, существенную роль играют нелинейные эффекты. Часть этих эффектов учитывается в квазилинейной теории([1-3]), где рассматривается обратное влияние колебаний на функцию распределения частиц. Однако при этом пренебрегают нелинейным взаимодействием между волнами, которое в ряде случаев может существенно влиять на релаксацию колебаний. Взаимодействие между гармониками исследовалось ранее в ([4]) для плазмы в сильном магнитном поле ($H^2/8\pi \gg nT$) и в ([5]) для произвольной прозрачной среды. Однако общий метод, изложенный в ([5]), применим и для случая слабой «непрозрачности», когда декременты (инкременты) волн достаточно малы ($\gamma \ll \omega$), что позволяет рассматривать взаимодействие колебаний между собой и с плазмой с единой точки зрения и оценить более точно, чем это делалось ранее ([3]), роль взаимодействия колебаний в релаксационных процессах *.

В дальнейшем, для простоты изложения, мы будем рассматривать плазму без магнитного поля. Однако излагаемые ниже соображения справедливы и в общем случае. Соответствующие формулы, учитывающие магнитное поле, будут приведены в другом месте в связи с приложениями.

Следуя ([4, 5]), запишем выражение для электрического поля плазменных колебаний в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\, \mathbf{k}_-} \mathbf{E}_{\mathbf{p}}(t)\, e^{i(\mathbf{pr}-\omega_{\mathbf{p}} t)},$$
$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}_-} = \mathbf{E}^*_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k}_- = -\mathbf{k}, \quad \omega_{\mathbf{k}_-} = -\omega_{\mathbf{k}}, \quad \omega_{\mathbf{k}} > 0, \tag{1}$$

где $\omega_{\mathbf{p}}$ — действительная часть частоты; $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}(t)$ — амплитуда, зависимость которой от времени определяется, во-первых, инкрементом

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} k \left(\frac{\omega_k}{k}\right)^3 \frac{df}{dv}\bigg|_{v=\omega/k}, \tag{2}$$

где вместо невозмущенной функции стоит медленно меняющаяся средняя функция распределения ([1-3]), а во-вторых, нелинейным взаимодействием между гармониками. «Динамическое» уравнение для $E_{\mathbf{p}}(t)$ имеет вид ([4, 5]):

$$\frac{dE_{\mathbf{p}}}{dt} = \gamma_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} \exp\left[-i(\omega_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{p}''} - \omega_{\mathbf{p}})\, t\right] +$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+\mathbf{p}'''=\mathbf{p}} V_{\mathbf{pp}'\mathbf{p}''\mathbf{p}'''} E_{\mathbf{p}'} E_{\mathbf{p}''} E_{\mathbf{p}'''} \exp\left[-i(\omega_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{p}''} + \omega_{\mathbf{p}'''} - \omega_{\mathbf{p}})\, t\right], \tag{3}$$

где матричные элементы выражаются через функцию распределения (см. ниже). В турбулентной плазме фазы амплитуд $E_p(t)$ меняются гораздо быстрее их модулей и коррелируют между собой в течение очень малого времени по сравнению с характерным временем изменения $N_p(t) = |E_p(t)|^2$. Поэтому при вычислении dN_p/dt можно усреднить по фазам всех E_p в данный момент. Проведя это усреднение так же, как в ([4]), получим кинетиче-

* Другой подход к решению этого круга вопросов развивается в ([6]).

ское уравнение для волн

$$\frac{dN_p}{dt} = 2\gamma_p N_p + N_p\Big\{8 \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} N_{p'} \mathscr{P} \frac{\operatorname{Im}\left(V_{pp'p''}V_{p''p'-p}\right)}{\omega_{p'}+\omega_{p''}-\omega_p} +$$
$$+ 6\operatorname{Re}\Big(\sum_{p'} N_{p'}V_{pp-p'p'-}\Big)\Big\} + 4\pi \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} \{N_{p'}N_{p''}\,|V_{pp'p''}|^2 +$$
$$+ 2N_pN_{p'}\operatorname{Re}\,(V_{pp'p''}V_{p''p'\underline{p}})\}\,\delta\,(\omega_{p'}+\omega_{p''}-\omega_p), \tag{4}$$

где $\mathscr{P}$ — символ главного значения. (4) отличается от соответствующего уравнения (2.16) работы [4] наличием первых двух членов, описывающих испускание и поглощение волн «фоном», при котором меняется средняя функция распределения плазмы. Третий же член описывает нелинейное взаимодействие между гармониками, не связанное с их поглощением или испусканием. В прозрачной среде γ_p, $\operatorname{Im} V_{pp'p''}$, $\operatorname{Re} V_{pp-p'p'_-}$ исчезают и (4) переходит в кинетическое уравнение, полученное в [4].

Рассмотрим теперь функцию распределения плазмы $F\,(\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,t)$.

Будем искать ее в виде:

$$F\,(\mathbf{r},\,\mathbf{v},\,t) = f\,(\mathbf{v},\,t) + \sum_p \exp\,[i\mathbf{pr}]\,F_p\,(v,\,t), \tag{5}$$

$$F_p\,(v,\,t) = \frac{e}{im}E_pf_p\,(v,\,t)\exp\,[-\,i\omega_pt] +$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} \left(\frac{e}{im}\right)^2 E_{p'}E_{p''}f_{pp'p''}\exp\,[-\,i\,(\omega_{p'}+\omega_{p''})\,t] +$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''+\mathbf{p}'''=\mathbf{p}} \left(\frac{e}{im}\right)^3 E_{p'}E_{p''}E_{p'''}f_{pp'p''p'''}\exp\,[-\,i\,(\omega_{p'}+\omega_{p''}+\omega_{p'''})\,t], \tag{6}$$

где f, f_p, $f_{pp'p''}$ и т. д. — медленно меняющиеся функции времени. Подставляя (5) в кинетическое уравнение для функции распределения F и усредняя по фазам амплитуд поля E_p, получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\,\frac{e}{m}\sum_p \overline{\mathbf{E}_p^*\frac{dF_p}{\partial\mathbf{v}}}\exp\,[i\omega_pt], \tag{7}$$

$$\frac{\partial F_p}{\partial t} + i\,(\mathbf{pv})\,F_p = -\,\frac{e}{m}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\mathbf{E}_p\exp\,[-\,i\omega_pt] -$$
$$-\,\frac{e}{m}\sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} \mathbf{E}_{p'}\frac{\partial F_{p''}}{\partial\mathbf{v}}\exp\,[-\,i\,(\omega_{p'}+\omega_{p''})\,t]. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (8), будем иметь

$$f_p = (\omega_p - \mathbf{pv} + i\gamma)^{-1}\frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}},$$

$$f_{pp'p''} = (\omega_{p'}+\omega_{p''}-\mathbf{pv}+i\varepsilon)^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbf{p}'}{p'}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left(\frac{1}{\omega_{p''}-\mathbf{p}''\mathbf{v}+i\gamma}\frac{\mathbf{p}''}{p''}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mathbf{p}''}{p''}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left(\frac{1}{\omega_{p'}-\mathbf{p}'\mathbf{v}+i\gamma}\frac{\mathbf{p}'}{p'}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right)\right] + \frac{m}{e}\frac{V_{pp'p''}}{\omega_p-\mathbf{pv}+i\gamma}\frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right\} \tag{9}$$

и т. д.

Согласно [5] матричные элементы $V_{pp'p''}$, $V_{pp'p''p'''}$, фигурирующие в кинетическом уравнении для волн, выражаются через соответствующие функции в (6):

$$V_{pp'p''} = \sum_{j=e,\,i}\frac{e_j}{m_j}\,\omega_{0j}^2\int\frac{\mathbf{pv}}{p}\,f_{pp'p''}^j(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}; \tag{10}$$

$$V_{pp'p''p'''} = -\,i\sum_{j=e,\,i}\left(\frac{e_j}{m_j}\right)^2\omega_{0j}^2\int\frac{\mathbf{pv}}{p}\,f_{pp'p''p'''}^j(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}, \tag{10a}$$

где ω_{0j} — плазменная частота, суммирование производится по сортам частиц.

Подставим теперь (6) в (7) и удержим члены, квадратичные по $N_p = E_p^* E_p$. При этом следует иметь в виду, что член $\overline{E_{p_-}E_{p'}E_{p''}}$ можно считать равным нулю только с точностью до членов третьего порядка по E_p. В следующем порядке он равен

$$\overline{E_{p_-}E_{p'}E_{p''}} = 2\,\frac{\exp\left[i\left(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p\right)t\right]}{i\left(\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p + i\varepsilon\right)}\left(V_{p_-p'p''}N_{p'}N_{p''} + V_{p'p''_-p}N_pN_{p''} + V_{p''pp'_-}N_pN_{p'}\right). \tag{11}$$

Для получения (11) можно поступить следующим образом: продифференцировав $E_{p_-}E_{p'}E_{p''}$ по времени, подставим производные из динамического уравнения (3), затем усредним по фазам и проинтегрируем от $-\infty$ до t.

В итоге получается следующее уравнение для $f(v, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{p}} N_p \frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left[\frac{\gamma_p}{(\omega_p - \mathbf{pv})^2 + \gamma_p^2}\frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right] +$$

$$+ 2\left(\frac{e}{m}\right)^3 \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial f_{pp'p''}}{\partial \mathbf{v}}\,\frac{V^*_{pp'p''}N_{p'}N_{p''} + 2V_{p''p'_-p}N_pN_{p'}}{\omega_{p'} + \omega_{p''} - \omega_p + i\varepsilon} +$$

$$+ 3\left(\frac{e}{m}\right)^4 \operatorname{Im}\sum_{p,p'}\frac{\mathbf{p}}{p}\frac{\partial f_{pp_-p'p'_-}}{\partial \mathbf{v}} N_pN_{p'}. \tag{12}$$

(12) и (4) вместе с (9) составляют полную систему уравнений квазилинейной теории, дополненной учетом взаимодействия волн второго порядка. Квадратичные по N_p члены в (12) и (4) становятся существенными, когда инкремент (2) становится достаточно малым из-за квазилинейной релаксации (образование «плато» [1-3]). Если частотный спектр волн таков, что выполняются «распадные» условия, т.е. $\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) = \omega(\mathbf{k})$, то члены, стоящие при δ-функции в (4), приводят к перекачке энергии в область малых фазовых скоростей, где поглощение волн велико. Если же распадным условиям удовлетворить нельзя (например, для электронных ленгмюровских колебаний), то существенную роль играет второй член в (4) и соответствующий ему в (12). Ниже будет показано, что он также может приводить к поглощению волн частицами с малыми скоростями $v \ll v_T$ и соответствующему нагреванию плазмы, причем этот эффект гораздо существеннее тех эффектов взаимодействия волн, которые оценивались в [3].

Можно убедиться, что, как и в обычной квазилинейной теории, система (4), (12) обладает интегралом энергии, т. е.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(W_k + W_f) = 0, \quad W_k = \sum_{e,i}\frac{nm}{2}\int v^2 f(v)\, d^3v,$$

$$W_f = \frac{1}{8\pi}\sum_p |E_p|^2. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь в качестве примера релаксацию электронных колебаний в достаточно разреженной плазме, где столкновениями можно полностью пренебречь, причем ширину волнового пакета будем считать достаточно малой ($\Delta k \ll k$), а энергию волн большой по сравнению со средней кинетической энергией частиц. Тогда можно указать два этапа процесса релаксации колебаний. Сначала образуется «плато» в резонансной области скоростей $v \sim \omega/k \gg v_T$ (v_T — тепловая скорость электронов). Эта стадия процесса описывается обычной квазилинейной теорией [1-3]. К моменту образования плато энергия волн все еще будет большой по сравнению с тепловым шумом. Если ролью кулоновских столкновений в поглощении волн можно пренебречь, то релаксация будет определяться вторым членом в (4) (третий обращается в нуль из-за δ-функции).

Мнимая часть матричных элементов, вычисленная с помощью (10) и (9), определяется полувычетами двух типов. Это, во-первых, члены, пропорциональные df/dv при $v = \omega/k$ и обращающиеся в нуль после образования плато. Во-вторых, некоторые из матричных элементов ($V_{kk'_-k''}$, $V_{k''k'_-k}$) содержат мнимые члены, пропорциональные f'_v при $v = \frac{\omega_{k'} - \omega_{k''}}{k' - k''} \sim$ $\sim v_T \frac{v_T k}{\omega_0} \ll v_T$, благодаря которым затухание колебаний не исчезает и после прекращения квазилинейной релаксации. Члены такого типа имеют простой физический смысл. В результате нелинейного взаимодействия собственные колебания плазмы (1) порождают вынужденные колебания с комбинационными частотами $\omega_{k'} \pm \omega_{k''}$ и волновыми векторами $k' \pm k''$, эффективно взаимодействующие с частицами со скоростями $v = \frac{\omega_{k'} \pm \omega_{k''}}{|k'| \pm |k''|}$. Это взаимодействие и приводит к дополнительному поглощению.

Подстановка (10), (9) в (4) приводит к уравнению

$$\frac{dN_k}{dt} = N_k \sum_{k'} \alpha_{kk'} N_{k'}, \tag{14}$$

где $\alpha_{kk'}$ при $\Delta k = k - k' \ll k$ слабо зависит от k' и приближенно равно

$$\alpha_{kk'} \sim \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{v_T^2 k^2}{\omega_0^3} \left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 f'_{v=u}, \quad u \simeq v_T \frac{v_T k}{\omega_0}, \quad f'_{v=u} \simeq -\frac{k}{v_T \omega_0}. \tag{15}$$

Благодаря этому можно написать

$$\frac{dW_f}{dt} \approx -BW_f^2, \quad B \sim \frac{v_T k_0^3}{mn\omega_0^2} \overline{\left(\frac{\Delta k}{k_0}\right)^2}, \tag{16}$$

где W_f — полная плотность энергии турбулентных пульсаций, а k_0 — среднее волновое число. При $W_f/nT \ll 1$ величину B можно считать не зависящей от времени. Тогда решение (16) будет иметь вид:

$$W_f(t) \simeq \frac{W_{0f}}{1 + BW_{0f}t}, \tag{17}$$

где W_{0f} — энергия колебаний к моменту образования плато, равная по порядку величины первоначальной энергии колебаний. Таким образом, характерное время релаксации равно

$$\tau \sim (BW_{0f})^{-1} \sim \left(\frac{v_f}{v_T}\right)^3 \left(\frac{k_0}{\Delta k}\right)^2 \frac{nT}{W_{0f}} \omega_0^{-1}, \quad v_f = \frac{\omega_0}{k}.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность Р. З. Сагдееву за многочисленные плодотворные дискуссии и А. А. Галееву за полезное обсуждение результатов.

Поступило
28 III 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961). [2] А. А. Веденов. Атомная энергия, 13, 5 (1962). [3] W. Drummond, D. Pines, Материалы конференции по физике плазмы, Зальцбург, 1961, Доклад № 134. [4] А. А. Галеев, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 44, 592 (1963). [5] В. И. Карпман, ЖЭТФ, 44, 1307 (1963). [6] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).