kr	$\alpha=\pi/4$		$\alpha=\pi/3$		$\alpha=\pi/2$	
	Re $j(r)/E_0c$	Im $j(r)/E_0c$	Re $j(r)/E_0c$	Im $j(r)/E_0c$	Re $j(r)/E_0c$	Im $j(r)/E_0c$
0.5	0.0965	—0.1187	0.1518	—0.0930	0.1517	—0.0239
1.0	0.0504	—0.1006	0.0960	—0.0819	0.1522	—0.0014
1.5	0.0223	—0.0950	0.0821	—0.0892	0.1586	0.0037
2.0	—0.0020	—0.0908	0.0668	—0.1031	0.1630	0.0022
2.5	—0.0253	—0.0842	0.0460	—0.1176	0.1642	—0.0013
3.0	—0.0477	—0.0729	0.0193	—0.1292	0.1627	—0.0044
3.5	—0.0673	—0.0556	—0.0121	—0.1343	0.1597	—0.0059
4.0	—0.0820	—0.0325	—0.0462	—0.1309	0.1564	—0.0054
4.5	—0.0894	—0.0049	—0.0797	—0.1177	0.1540	—0.0032
5.0	—0.0875	0.0247	—0.1097	—0.0950	0.1530	—0.0002
5.5	—0.0758	0.0531	—0.1327	—0.0640	0.1538	0.0029
6.0	—0.0545	0.0767	—0.1505	—0.0271	0.1560	0.0051

источником произвольного вида. Интегральное уравнение (5) заменяется в этом случае системой интегральных уравнений для плотностей тока.

Автор выражает благодарность профессору Н. Н. Лебедеву за ценные советы и помощь в работе.

Литература

[1] Л. А. Вайнштейн. Изв. АН СССР, сер. физ., *12*, 166, 1948. — [2] Б. Нобл. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1962. — [3] P. M. Morse a. P. J. Rubenstein. Phys. Rev., *54*, 895, 1938. — [4] Г. А. Гринберг. ЖТФ, *XXVII*, вып. 11, 2595, 1957. — [5] R. F. Millar. Proc. Camb. Phil. Soc., *54*, 479, 1958. — [6] E. T. Copson. Quart. J. Math., *17*, 19, 1946. — [7] Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд. Сб. задач по мат. физ., М., 1955. — [8] М. И. Конторович и Н. Н. Лебедев. ЖТФ, *VIII*, вып. 10—11, 1192, 1938.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
30 июля 1962 г.

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Н. Ораевский

В предыдущей работе [1] была исследована устойчивость известных нелинейных установившихся движений в плазме без магнитного поля — электронных ленгмюровских и ионных продольных колебаний — по отношению к одномерным возмущениям. Оказалось, что ионные продольные колебания устойчивы по отношению к произвольным одномерным возмущениям. Электронные же ленгмюровские колебания неустойчивы по отношению к возмущениям, имеющим вид суммы ионной волны и электронной ленгмюровской (с другой частотой и другой фазовой скоростью).

В настоящей заметке будет показано, что результаты работы [1] качественно не меняются, если рассматривать возмущения любого вида (а не только одномерные). Так же, как и в [1], здесь будет рассмотрена устойчивость волн не слишком большой амплитуды (параметр малости $\alpha \equiv \frac{\delta v}{u}$, где δv — амплитуда скорости, а u — фазовая скорость волны, исследуемой на устойчивость).

Линеаризованные относительно малых отклонений от установившегося движения уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & m_{i,e}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\cos \mathbf{k}_0\mathbf{r}'\delta\mathbf{v}_{i,e}\nabla\right)\mathbf{v}_{i,e}+(\mathbf{v}_{i,e}\nabla)\,\delta\mathbf{v}_{i,e}\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'=e_{i,e}\mathbf{E}- \\ & -\frac{1}{n_0}(1-\alpha\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}')\nabla p_{i,e}+\alpha\frac{n_{i,e}}{n_0}\gamma\frac{p_{0i,e}}{n_0}\nabla(\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}') \\ & \frac{\partial n_{i,e}}{\partial t}+n_0\nabla\mathbf{v}_{i,e}+\nabla(n_{i,e}\delta\mathbf{v}_{i,e}+\alpha n_0\mathbf{v}_{i,e})\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}'=0, \\ & \frac{\partial}{\partial t}\left(p_e-\gamma\frac{p_0}{n_0}n_e\right)=\gamma(\gamma-1)\frac{p_0}{n_0}\alpha\frac{\partial}{\partial t}n_e\cos\mathbf{k}_0\mathbf{r}', \\ & \nabla\mathbf{E}=4\pi e(n_i-n_e). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

(Как и в работе [1], считаем $p_i=0$). Здесь индексы i и e относятся, соответственно, к ионным и электронным величинам.

В уравнениях (1) удержаны лишь члены первого порядка по α.

Как показано в [1], неустойчивость может возникнуть лишь в том случае, если существуют „вырожденные состояния“, т. е. существуют возмущения, для которых все величины могут быть представлены в виде

$$A(\mathbf{r},\ t)=A_0e^{i\omega' t}\{B_1e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}'}+B_2e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}'}\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ связаны следующим соотношением

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_0+\mathbf{k}_2. \tag{3}$$

Как легко видеть, из (2) и (3) следует, что

$$\omega_1=\omega_0+\omega_2. \qquad (4)^1$$

Используя теорию возмущений для вырожденных состояний, можно найти поправку к частоте ω' (т. е. к частотам ω_1 и ω_2).

Для обоих исследуемых случаев мы не будем приводить здесь промежуточных вычислений (которые аналогичны вычислениям, проделанным в работе [1]), а укажем, для каких видов возмущений выполнимы условия (3) и (4), и выпишем поправки к частотам.

Если ω_0 и $\mathbf{k}_0$ — частота и волновой вектор ионных продольных колебаний, то условия (3) и (4) могут быть выполнены для возмущений, имеющих вид суммы двух электронных продольных волн. Поправка ν_i к частоте ω' в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\nu_i=\frac{\delta v}{2u}\frac{1}{2(\omega_1\omega_2)^{1/2}}\Big[&\omega_1\omega_2\cos\left(\widehat{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}\right)+(\gamma-2)k_1k_2v_T^2+ \\ &+\omega_2k_1u\cos\left(\widehat{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_0}\right)+\omega_1k_2u\cos\left(\widehat{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_0}\right)\Big],\quad v_T=\sqrt{\frac{T\gamma}{m_e}},\end{aligned} \tag{5}$$

т. е. ионные продольные колебания устойчивы.

Возмущения, которые приводят к неустойчивости электронной продольной волны с волновым вектором $\mathbf{k}_0$ и частотой ω_0, имеют вид суммы ионной продольной волны (с $\mathbf{k}_1$ и ω_1) и электронной продольной волны (с $\mathbf{k}_2$, ω_2). Поправка ν_e к частоте может быть записана в виде

$$\nu_e=\pm i\frac{\delta v}{2u}\left\{\frac{\omega_1k_2u}{\omega_2}\left[\omega_2\cos\left(\widehat{\mathbf{k}_0\mathbf{k}_2}\right)+(\gamma-2)k_2\frac{v_T^2}{u}\right]\right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Используя (3), (4) и (6), легко показать, что одномерные возмущения, рассмотренные в [1], имеют максимальные инкременты нарастания.

Литература

[1] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. ЖТФ, *XXXII*, вып. 11, 1291, 1962.

Поступило в Редакцию
6 августа 1962 г.

[1] Условия (3), (4) эквивалентны условиям (2) и (3).