1963 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXXIII, в. 7
1963 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXXIII, № 7

ПРОЦЕССЫ ВЯЗКОСТИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ

Г. М. Заславский и *С. С. Моисеев*

В работе [1] из соображений возрастания энтропии при диссипативных процессах был получен тензор вязкости, релятивистского газа. При этом коэффициент вязкости, естественно, не определяется. При наличии магнитного поля существенную роль может играть специфическая магнитная „вязкость", не связанная с диссипацией энергии (см., например, [2]). Ниже дается строгий вывод тензора вязкости для релятивистского газа из кинетического уравнения с помощью метода, аналогичного методу Грэда [3]. Полученные коэффициенты вязкости применяются для исследования устойчивости „бесстолкновительной" релятивистской плазмы в магнитном поле, причем учет магнитной „вязкости" эквивалентен учету конечности ларморовского радиуса. Применяемый метод исследования позволяет учесть возмущения с искривлениями магнитных силовых линий.

§ 1. Тензор вязкости релятивистской плазмы в магнитном поле

Релятивистское кинетическое уравнение для газа заряженных частиц имеет вид [4]

$$u_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{e}{mc} u_m F_{im} \frac{\partial F}{\partial u_i} = \mathrm{St}\{F\}, \tag{1.1}$$

где u_i — 4 — скорость частицы; F — инвариантная функция распределения в пространстве 4 импульсов; F_{ik} — тензор электромагнитного поля; $\mathrm{St}\{F\}$ — столкновительный член. Для учета вязких процессов следует рассмотреть второй момент от $\mathrm{St}\{F\}$. Функция распределения F с учетом диссипативных процессов найдена методом, аналогичным методу Грэда, в работе [5]. Используя результаты этой работы, нетрудно получить

$$mc \int d^4 p u_i u_k \,\mathrm{St}\{F\} = -\frac{1}{\tau} \pi_{ik}, \tag{1.2}$$

где π_{ik} — тензор вязкости, обладающий свойствами

$$\pi_{ii} = 0, \quad \pi_{ik} U_k = 0, \tag{1.3}$$

τ — константа, имеющая смысл характерного времени столкновений в собственной системе газа, как целого.

Умножая (1.1) на $p_i u_k$, интегрируя и учитывая (1.2), получаем

$$\frac{\partial T_{ikl}}{\partial x_l} + \frac{e}{mc} (F_{il} T_{kl} + F_{kl} T_{il}) = -\frac{1}{\tau} \pi_{ik}. \tag{1.4}$$

Здесь T_{ik} — тензор энергии импульса, равный

$$T_{ik} = \int p_i u_k F d^4 p = (P + P_\varepsilon) U_i U_k + P \delta_{ik} + \pi_{ik}. \tag{1.5}$$

P и $-P_\varepsilon$ — давление и энергия газа в собственной системе отсчета (соответственно компоненты T_{11} и T_{44} от максвелловской части функции F); U_i — 4 — скорость усредненного движения газа. T_{ikl} — тензор, введенный в работе [6] и для максвелловской функции распределения F_0 имеющий вид

$$T_{ikl} = mc \int d^4 p u_i u_k u_l F_0 = (3T + T_\varepsilon) U_i U_k U_l +$$

$$+ T(\delta_{ik} U_l + \delta_{il} U_k + \delta_{kl} U_i), \tag{1.6}$$

где T и T_ε — единственные отличные от нуля в собственной системе компоненты T_{114} и $-T_{444}$ $(T_{114} = T_{224} = T_{334})$

$$T = T_{114} = \frac{mP_\varepsilon}{\sigma} + \frac{mc^2 n}{\sigma^2},$$

$$T_\varepsilon = -T_{444} = -\frac{2mc^2 n}{\sigma} \frac{K_4(\sigma) + K_2(\sigma)}{K_3(\sigma) - K_1(\sigma)}. \tag{1.6'}$$

Здесь $\sigma = \frac{mc^2}{\Theta}$; Θ — температура в энергетических единицах; $K_\mu(\sigma)$ — функция Макдональда.

Учитывая уравнение непрерывности

$$\frac{\partial (nU_l)}{\partial x_l} = 0, \tag{1.7}$$

получаем из (1.6)

$$\frac{\partial T_{iil}}{\partial x_l} = \frac{\partial (3T - T_\varepsilon) U_l}{\partial x_l}. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.6) и (1.5) в (1.4), имеем

$$U_i U_k \frac{\partial (3T + T_\varepsilon) U_l}{\partial x_l} + (3T + T_\varepsilon) U_l \frac{\partial U_i U_k}{\partial x_l} +$$

$$+ T\left(\delta_{ik} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial x_l} (\delta_{ik} U_l + \delta_{il} U_k + \delta_{kl} U_i) +$$

$$+ \frac{e}{mc} (F_{il} \pi_{kl} + F_{kl} \pi_{il}) = -\frac{1}{\tau} \pi_{ik}. \tag{1.9}$$

Проектируем (1.9) на U_i и $U_i U_k$. Учитывая (1.3), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -U_i U_l \frac{\partial (T + T_\varepsilon)}{\partial x_l} - (2T + T_\varepsilon)\left(U_i \frac{\partial U_l}{\partial x_l} + U_l \frac{\partial U_i}{\partial x_l}\right), \tag{1.10}$$

$$2T \frac{\partial U_l}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l} (T_\varepsilon U_l) = 0. \tag{1.11}$$

Используя (1.8), (1.10) и (1.11), преобразуем (1.9) к виду

$$T w_{ik} + (F_{il} \pi_{kl} + F_{kl} \pi_{il}) \frac{e}{mc} = -\frac{\pi_{ik}}{\tau}, \tag{1.12}$$

где w_{ik} — тензор напряжений, равный

$$w_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + U_l \frac{\partial U_i U_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_l}{\partial x_l} (\delta_{ik} + U_i U_k), \tag{1.13}$$

что совпадает с выражением, полученным в работе [1]. Решая систему (1.12), находим компоненты π_{ik}.

Для случая, когда электрическое поле перпендикулярно магнитному, компоненты тензора вязкости даны в „Приложении". В частности, если электрическое поле в рассматриваемой системе отсчета отсутствует, то при $\tau\Omega \gg 1$ имеем

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{11} = -\frac{1}{2}\eta_0(w_{11}+w_{22}) - \eta w_{12}, \\ &\pi_{22} = -\frac{1}{2}\eta_0(w_{11}+w_{22}) + \eta w_{12}, \\ &\pi_{12} = \pi_{21} = \frac{1}{2}\eta(w_{11}-w_{22}); \quad \pi_{13} = \pi_{31} = -2\eta w_{23}, \\ &\pi_{23} = \pi_{32} = 2\eta w_{13}; \quad \pi_{33} = -\eta_0 w_{33}; \quad \pi_{44} = -\eta w_{44}, \\ &\pi_{34} = -\eta_0 w_{34}; \quad \pi_{24} = 2\eta w_{24}; \quad \pi_{14} = -2\eta w_{14}, \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

где **H** направлено вдоль оси z; η_0 — коэффициент вязкости, связанной со столкновениями; η — коэффициент магнитной „вязкости“

$$\eta_0 = \tau T, \tag{1.15}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{T}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{eH}{mc}. \tag{1.16}$$

Заметим, что коэффициент магнитной „вязкости“ можно получить сразу из (1.12) без правой части.

В нерелятивистском пределе коэффициенты вязкости (1.15) и (1.16) переходят в обычные выражения.

В случае двухкомпонентного газа с одинаковыми скоростями у обеих компонент вместо (1.15) и (1.16) имеем

$$\eta_0 = \tau_a T_a + \tau_b T_b, \tag{1.15'}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{T_a}{\Omega_a} + \frac{T_b}{\Omega_b}\right), \tag{1.16'}$$

где a и b — индекс компонент.

§ 2. Влияние магнитной „вязкости“ на устойчивость релятивистской плазмы в магнитном поле

Полученные в § 1 коэффициенты магнитной вязкости позволяют решить тот круг задач, который связан с учетом конечности ларморовского радиуса для состояний релятивистской плазмы, описываемых гидродинамическими уравнениями. Ниже рассматриваются „желобковая“ неустойчивость, в которой магнитные силовые линии не искривляются при возмущениях и неустойчивости в анизотропной плазме, существенно связанные с искривлением магнитных силовых линий. В нерелятивистском случае „желобковая“ неустойчивость с учетом конечности ларморовского радиуса рассматривалась в работе [7], а анизотропная в работе [2].

Для плазмы в магнитном поле можно получить систему гидродинамических уравнений методом работы [8], если электрическое поле перпендикулярно магнитному (именно такая ситуация возникает, например, при „желобковых“ возмущениях). Уравнение для давлений при этом имеет вид в нерелятивистском случае

$$\left.\begin{aligned} &mn_e\frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla\vec{P}_e - \nabla\vec{\pi}_e - en_e\mathbf{E} - \frac{en_e}{c}[\mathbf{V}_e^*\mathbf{H}] + n_e m\mathbf{g}, \\ &Mn_i\frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla\vec{P}_i - \nabla\vec{\pi}_i + en_i\mathbf{E} + \frac{en_i}{c}[\mathbf{V}_i^*\mathbf{H}] + n_i M\mathbf{g}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где $\vec{P}$ и $\vec{\pi}$, соответственно — тензоры давления и вязкости; учтен знак заряда электронов (масса m) и ионов (масса M); $\mathbf{g}$ — потенциал поля тяжести ($\mathbf{g} \perp \mathbf{H}$). Скорость $\mathbf{V}$ определяется по функции распределения в нулевом приближении; а $\mathbf{V}^*$ учитывает также скорость, связанную с поправкой к функции распределения в следующем приближении. Эти поправки к скорости ионов и электронов входят одновременно в токи и заряд в уравнениях Максвелла. Вследствие этого нельзя, вообще говоря, получить замкнутую систему гидродинамических уравнений только для ионов (или только для электронов; как это сделано в работе [8], где незаконно пренебрегается поправкой, вообще говоря, не малой к электронной функции распределения.

Складывая уравнения (2.1) и исключая поправки к скоростям аналогично тому, как это делается в работе [8], получаем гидродинамическое описание всей плазмы в целом с уравнением для давлений (пренебрегая нелинейным членом)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \vec{P} - \nabla \vec{\pi} + \frac{1}{4\pi}[[\nabla \mathbf{H}]\mathbf{H}] + \rho \mathbf{g}. \tag{2.2}$$

Здесь все параметры плазмы (ρ, V, P, π) учитывают двухкомпонентность системы. В частности, если невозмущенная скорость плазмы равна нулю, то, ввиду равенства скоростей возмущения электронов и ионов, коэффициенты вязкости определяются по формулам (1.15′) и (1.16′). Эти последние соображения приводят к тому, что система одножидкостных гидродинамических уравнений для плазмы, как целого, замыкается.

В работе [7] рассматривался случай $\Theta_e \sim \Theta_i$ (индексы i, e относятся соответственно к ионам и электронам); $\Theta = \frac{P}{n}$. В случае, когда $\Theta_e \gg \Theta_i$, следует учесть конечность электронного ларморовского радиуса. Дисперсионное уравнение в этом случае для нерелятивистской плазмы имеет вид

$$\omega^2 - 2\eta' \frac{k}{\rho_0}\omega + g\frac{\rho_0'}{\rho_0} = 0, \tag{2.3}$$

где ρ_0 — невозмущенная плотность плазмы; штрих означает дифференцирование по координате в направлении силы тяжести, а η — коэффициент магнитной вязкости плазмы, равный:

$$\eta = \frac{n}{2}\left(\frac{\Theta_i}{\Omega_i} - \frac{\Theta_e}{\Omega_e}\right), \qquad (\Omega_i,\ \Omega_e > 0). \tag{2.4}$$

Из (2.4) видно, что увеличение электронной температуры уменьшает стабилизацию плазмы.

Рассмотрим плазму, в которой ионы нерелятивистские, а электроны релятивистские. При этом скорости возмущения будем считать нерелятивистскими. Тогда дисперсионное уравнение останется прежним (2.3), а изменятся только параметры, характеризующие состояния электронного и ионного газов. Имеем

$$\rho_0 = \frac{n}{c^2}(Mc^2 + P_{\varepsilon e} + P_e), \tag{2.5}$$

$$\eta = \frac{c}{2eH}(n\Theta_i - T_e), \tag{2.6}$$

где M — масса иона, а величина

$$\rho_{0e} = \frac{1}{c^2}(P_{\varepsilon e} + P_e) \tag{2.7}$$

представляет собой эффективную плотность для релятивистских частиц. Из условия устойчивости

$$k^2 > \frac{g}{n'^2}\rho_0\rho_0' \tag{2.8}$$

и (2.6) следует, что плазма стабилизируется при

$$n\Theta_i \neq T_e, \tag{2.9}$$

т. е. в ультрарелятивистском случае при

$$\gamma_e \frac{\Theta_e}{\Theta_i} \neq \frac{M}{m}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.10}$$

Совершенно аналогично учитывается высокотемпературная электронная компонента в релятивистской плазме с анизотропным ионным давлением при нерелятивистских возмущениях скорости. Учитывая результаты работы [2], получаем критерии устойчивости для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля и почти поперек магнитного поля в однородной плазме, соответственно

$$k_{\parallel}^2 > \frac{1}{4}\left(P_{\parallel} - P_{\perp} - \frac{H^2}{4\pi}\right)\frac{\rho_0}{\eta_{\parallel}^2}, \tag{2.11}$$

$$k_{\perp}^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(P_{\perp} - P_{\parallel} - \frac{P_{\parallel}}{P_{\perp}}\frac{H^2}{4\pi}\right)\frac{\rho_0}{\eta_{\parallel}^2}, \tag{2.12}$$

где

$$\eta_{\parallel} = \frac{c}{2eH}(n\Theta_{\parallel i} - T_e) \tag{2.13}$$

Авторы благодарны Р. З. Сагдееву за внимание к работе и дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для компонент тензора вязкости, если $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. Направим ось z вдоль $\mathbf{H}$, а ось y вдоль $\mathbf{E}$. Имеем

$$\pi_{13} = -\tau T w_{13} + \frac{\tau^2 T\Omega}{1+(\tau\Omega)^2-(\tau\omega_E)^2}(w_{23} + \tau\Omega w_{13} + i\tau\omega_E w_{34}),$$

$$\pi_{23} = -\frac{\tau T}{1+(\tau\Omega)^2-(\tau\omega_E)^2}(w_{23} + \tau\Omega w_{13} + i\tau\omega_E w_{34}),$$

$$\pi_{33} = -\tau T w_{33},$$

$$\pi_{34} = -\tau T w_{34} + \frac{i\tau^2\omega_E T}{1+(\tau\Omega)^2-(\tau\omega_E)^2}(w_{23} + \tau\Omega w_{13} + i\tau\omega_E w_{34}),$$

$$\pi_{12} = -\frac{\tau T}{\Delta}\left\{\left[1+(\tau\Omega)^2 - 4(\tau\omega_E)^2\right]\left[w_{12} + \tau\Omega(w_{11} - w_{22}) + i\tau\omega_E w_{14}\right] - \right.$$
$$\left. - 3i\tau^2\omega_E\Omega\left[w_{24} + \tau\Omega w_{14} + i\tau\omega_E(w_{44} - w_{22})\right]\right\},$$

$$\pi_{24} = \frac{\tau T}{\Delta}\left\{3i\tau^2\omega_E\Omega\left[w_{12} + i\tau\omega_E w_{14} + \tau\Omega(w_{11} - w_{22})\right] - \right.$$
$$\left. - \left[1+4(\tau\Omega)^2 - (\tau\omega_E)^2\right]\left[w_{24} + \tau\Omega w_{14} + i\tau\omega_E(w_{44} - w_{22})\right]\right\},$$

$$\pi_{22} = -\tau T w_{22} + 2\tau\Omega\pi_{12} + 2i\tau\omega_E\pi_{24},$$

$$\pi_{14} = -\tau T w_{14} - i\tau\omega_E\pi_{12} - \tau\Omega\pi_{24},$$

$$\pi_{11} = -\tau T w_{11} - 2\tau\Omega\pi_{12},$$

$$\pi_{44} = -\tau T w_{44} - 2i\tau\omega_E\pi_{24},$$

где

$$\Delta = 1 + 5\left[(\tau\Omega)^2 - (\tau\omega_E)^2\right] + 4\left[(\tau\Omega)^2 - (\tau\omega_E)^2\right],$$

$$\omega_E = \frac{eE}{mc}.$$

Для чисто магнитной „вязкости“ в отсутствие столкновений имеем

$$\pi_{34} = \frac{\Omega T}{\Omega^2 - \omega_E^2} w_{23},$$

$$\pi_{23} = -\frac{T}{\Omega^2 - \omega_E^2}(\Omega w_{13} + i\omega_E w_{34}),$$

$$\pi_{33} = 0; \quad \pi_{13} = \frac{T}{\Omega^2 - \omega_E^2}\Omega w_{23},$$

$$\pi_{24} = \frac{T}{4(\Omega^2 - \omega_E^2)^2}\left\{3i\omega_E\Omega\left[i\omega_E w_{14} + \Omega(w_{11} - w_{22})\right] - \right.$$
$$\left. - (4\Omega^2 - \omega_E^2)\left[\Omega w_{14} + i\omega_E(w_{44} - w_{22})\right]\right\},$$

$$\pi_{12} = -\frac{T}{4(\Omega^2 - \omega_E^2)^2}\left\{(\Omega^2 - 4\omega_E^2)\left[\Omega(w_{11} - \omega_{22}) + i\omega_E w_{14}\right] - \right.$$
$$\left. - 3i\omega_E\Omega\left[\Omega w_{14} + i\omega_E(w_{44} - w_{22})\right]\right\},$$

$$\pi_{22} = -\frac{T}{2(\Omega^2 - \omega_E^2)}(\Omega w_{12} - i\omega_E w_{24}),$$

$$\pi_{14} = \frac{T}{2(\Omega^2 - \omega_E^2)^2}\left[\Omega(2\Omega^2 + \omega_E^2)w_{24} - i\omega_E(\Omega^2 + 2\omega_E^2)w_{12}\right],$$

$$\pi_{11} = \frac{\Omega T}{2(\Omega^2 - \omega_E^2)^2}\left[(\Omega^2 - 4\omega_E^2)w_{12} - 3i\omega_E\Omega w_{24}\right],$$

$$\pi_{44} = -\frac{i\omega_E T}{2(\Omega^2 - \omega_E^2)^2}\left[3i\omega_E\Omega w_{12} - (4\Omega^2 - \omega_E^2)w_{24}\right].$$

Литература

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954. — [2] Г. М. Заславский, С. С. Моисеев. ПМТФ, *5*, 42, 1962. — [3] H. Grad. Commun. on pure a. appl. Mathem., *2*, 331, 1949. — [4] С. Т. Беляев, Г. И. Будкер. ДАН СССР, *107*, 807, 1956. — [5] С. С. Моисеев. ЖЭТФ, *37*, 553, 1959. — [6] С. С. Моисеев. Изв. вузов, Физика, № 3, 159, 1960. — [7] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker. Доклад на конференции по физике плазмы и управляемым термоядерным реакциям, Зальцбург, 1961. — [8] Г. Чу, М. Гольдбергер, Ф. Лоу. ПСФ, № 7, 139, 1957.

Новосибирский государственный
университет

Поступило в Редакцию
2 июля 1962 г.