1963 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXXIII, в. 7
1963 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXXIII, № 7

# ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКЕ

*Г. М. Заславский*

В работе [1] из соображений возрастания энтропии были получены выражения для тензора вязкости $\pi_{ik}$ и теплового потока $mc^2\nu_i$ в релятивистской гидродинамике. При этом коэффициенты переноса, естественно, не определяются.

В работе [2] был дан кинетический вывод тензора вязкости, получены коэффициенты вязкости для газа заряженных частиц в магнитном поле. Ниже выводится из кинетического уравнения тепловой поток при наличии магнитного поля и определяются коэффициенты теплопроводности. При этом используется тот же метод, что и в работе [2].

Релятивистское кинетическое уравнение относительно инвариантной функции распределения $F$ в пространстве четырех импульсов имеет вид [3]

$$u_m \frac{\partial F}{\partial x_m} + \frac{e}{mc} u_n F_{mn} \frac{\partial F}{\partial x_m} = \mathrm{St}\{F\}, \tag{1}$$

где $F_{ik}$ — тензор электромагнитного поля, $\mathrm{St}\{F\}$ — столкновительный член.[1] Используя вид $F$ с учетом диссипативных процессов [4], можно получить

$$\int u_i u_k u_l St\{F\}\, d^4p = \frac{1}{\tau_1} R_{ikl} + \frac{1}{\tau_2} (\nu_i U_k U_l + \nu_k U_i U_l + \nu_l U_i U_k), \tag{2}$$

где $\tau_1$, $\tau_2$ — параметры, играющие роль характерных времен столкновений и зависящие от конкретного вида $\mathrm{St}\{F\}$; $R_{ikl}$ — тензор, для которого в собственной системе отсчета $R_{\alpha\beta 4}$, $R_{444}=0$, а остальные компоненты совпадают с компонентами тензора

$$T_{ikl} = \int d^4p u_i u_k u_l F. \tag{3}$$

Кроме того,

$$R_{ikk} = \nu_i, \tag{4}$$

а в собственной системе отсчета

$$R_{\alpha 44} = q\nu_\alpha, \tag{5'}$$

где $q$ — скалярный множитель, зависящий от параметров распределения и вычисляемый непосредственно из (3) (см. выражение для $F'$, полученное в работе [4]). Из (5') нетрудно получить

$$R_{ikl} U_k U_l = -q\nu_i. \tag{5}$$

Выражение для $T_{ikl}$ с учетом диссипативных процессов [4] имеет вид

$$T_{ikl} = \frac{n}{\sigma} \frac{K_2(\sigma)}{K_3(\sigma)} (U_i \delta_{kl} + U_k \delta_{il} + U_l \delta_{ik}) + \frac{nK_4(\sigma)}{K_2(\sigma)} U_i U_k U_l + $$
$$+ \frac{K^4(\sigma)}{K_3(\sigma)} (U_i \pi_{kl} + U_k \pi_{il} + U_l \pi_{ik}) + R_{ikl}, \tag{6}$$

---

[1] Латинские индексы пробегают четыре значения, греческие — три.

где $K_\mu(\sigma)$ — функция Макдональда; $\sigma = \frac{mc^2}{\Theta}$; $\Theta$ — температура в энергетических единицах.

Умножим теперь (1) на $u_i u_k u_l$, проинтегрируем и спроектируем после этого на $U_k U_l$. Учитывая (2), (3), (5) и (6), получаем

$$U_k U_l \frac{\partial S_{iklm}}{\partial x_m} - \frac{e}{mc} U_k U_l F_{mn} (\delta_{in} T_{klm} + \delta_{kn} T_{ilm} + \delta_{ln} T_{ikm}) = -\frac{1}{\tau} \nu_i, \tag{7}$$

где вместо двух времен $\tau_1$ и $\tau_2$ введено одно время $\tau$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{q}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

и учтено $\nu_i U_i = 0$. Тензор 4-го ранга $S_{iklm}$ определяется выражением

$$S_{iklm} = \int d^4 p u_i u_k u_l u_m F. \tag{8}$$

Свертка в (8) по двум индексам дает с точностью до знака тензор давлений $T_{ik}$

$$S_{ikll} = -T_{ik} = -\int d^4 p u_i u_k F. \tag{9}$$

Найдем выражение $S_{iklm}$ для максвелловской функции распределения $F_0$. В собственной системе отсчета отличны от нуля только компоненты с двумя парами одинаковых индексов

$$\left.\begin{aligned} &S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} \equiv S; \quad S_{4444} \equiv -S_\varepsilon, \\ &S_{1122} = S_{1133} = \ldots \equiv \frac{1}{3} S; \quad S_{1144} = S_{2244} = S_{3344} = S_c. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

[Коэффициент $\frac{1}{3}$ в выражениях для компонент типа $S_{1122}$ возникает при интегрировании по углам в (8)]. Учитывая (10), нетрудно записать выражение для $S_{iklm}$ в произвольной системе отсчета

$$S_{iklm} = (S - 6S_c - S_\varepsilon) U_i U_k U_l U_m + \left(\frac{1}{3} S - S_c\right)(\delta_{ik} U_l U_m + \delta_{lm} U_i U_k + \delta_{il} U_k U_m + \delta_{km} U_i U_l + \delta_{im} U_k U_l + \delta_{kl} U_i U_m) + \frac{1}{3} S (\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}). \tag{11}$$

Из трех параметров $S$, $S_c$, $S_\varepsilon$ независимым является только один (например, $S$); остальные два можно выразить, используя условие (9). Это дает

$$S_c = -\frac{5}{3} S - P; \quad S_\varepsilon = -5S - 3P - P_\varepsilon, \tag{12}$$

где $P$ и $P_\varepsilon$ — параметры, определяющие $T_{ik}$ относительно $F_0$

$$T_{ik} = (P + P_\varepsilon) U_i U_k + P\delta_{ik} \tag{13}$$

и с точностью до множителя $mc^2$ совпадающие, соответственно, с плотностью давления и энергии газа. Непосредственным вычислением легко получить

$$S = 3 \frac{n}{\sigma^2} \frac{K_3(\sigma)}{K_2(\sigma)} = 3 \frac{w}{\sigma^2}; \ (w = P + P_\varepsilon). \tag{14}$$

Перейдем непосредственно к вычислению $\nu_i$. Будем считать, что в собственной системе отсчета электрическое поле отсутствует. Подставляя (11) в (7) и учитывая (5), находим

$$-U_i U_m \frac{\partial (S_c + S_\varepsilon)}{\partial x_m} - \frac{\partial S_c}{\partial x_i} - (3S_c + S_\varepsilon) \frac{\partial U_i U_m}{\partial x_m} - \frac{e}{mc} qF_{in}\nu_n = -\frac{1}{\tau}\nu_i. \quad (15)$$

Проектирование (15) на $U_i$ дает уравнение

$$U_m \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x_m} + (3S_c + S_\varepsilon)\frac{\partial U_m}{\partial x_m} = 0. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получаем

$$-\frac{\partial S_c}{\partial x_m}(\delta_{im} + U_i U_m) - (3S_c + S_\varepsilon) U_m \frac{\partial U_i}{\partial x_m} - \frac{e}{mc} qF_{in}\nu_n = -\frac{1}{\tau}\nu_i. \quad (17)$$

Величину $U_m \frac{\partial U_i}{\partial x_m}$ выразим из закона сохранения энергии — импульса

$$\frac{\partial S_{ikll}}{\partial x_k} = -\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (18)$$

уравнение (18) дает (см., например [1])

$$U_m \frac{\partial U_i}{\partial x_m} = -\frac{1}{w}\frac{\partial P}{\partial x_m}(\delta_{im} + U_i U_m) \quad (19)$$

или, после подстановки (19) в (17), с учетом (12)

$$5\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{w}{\sigma^2} - \frac{2S + P}{w}\frac{\partial P}{\partial x_m}\right)(\delta_{im} + U_i U_m) - \frac{e}{mc} qF_{in}\nu_n = -\frac{1}{\tau}\nu_i. \quad (20)$$

Наконец, преобразуя скобку первого члена в (20) к виду

$$d\frac{w}{\sigma^2} - \frac{2S + P}{w} dP = \frac{K_3^2(\sigma) - K_2(\sigma) K_4(\sigma)}{K_2(\sigma) K_3(\sigma)} \frac{1}{n}\left(PdP - nwd\frac{1}{\sigma}\right) =$$

$$= \frac{K_3^2(\sigma) - K_2(\sigma) K_4(\sigma)}{K_2(\sigma) K_3(\sigma)} \frac{P^2}{mc^2 n} d\frac{\mu}{\Theta}, \quad (21)$$

где $\mu = \frac{mc^2(w - \Theta\xi)}{n}$ — химический потенциал; $mc^2\xi$ — энтропия единицы собственного объема, получаем окончательное уравнение для определения $\nu_i$

$$5\frac{K_3^2(\sigma) - K_2(\sigma) K_4(\sigma)}{K_2(\sigma) K_3(\sigma)} \frac{P^2}{nmc^2}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\mu}{\Theta}\right)(\delta_{im} + U_i U_m) -$$

$$-\frac{e}{mc} qF_{in}\nu_n = -\frac{1}{\tau}\nu_i. \quad (22)$$

В частности, если $F_{ik} \equiv 0$, сравнивая (22) с выражением, полученным в [1]

$$\nu_i^0 = -\frac{\varkappa}{c}\left(\frac{P}{w}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\mu}{\Theta}\right)(\delta_{im} + U_i U_m), \quad (23)$$

получаем коэффициент теплопроводности

$$\varkappa = 5\tau \frac{w}{m}\frac{K_3^2(\sigma) - K_2(\sigma) K_4(\sigma)}{K_2^2(\sigma)}. \quad (24)$$

В нерелятивистском пределе выражение (24) для $\varkappa$ переходит в обычное.

Пусть теперь $F_{ik} \neq 0$. Учитывая (23), (24), можно написать

$$\frac{1}{\tau} \nu_i^0 + \frac{e}{mc} q F_{in} \nu_n = \frac{1}{\tau} \nu_i. \tag{25}$$

Эта система алгебраических уравнений определяет тепловой поток при наличии внешнего поля в любой системе отсчета. Рассмотрим для примера случай собственной системы отсчета. Так как $\nu_4 = 0$, $F_{12} = H$, $F_{21} = -H$ (ось $z$ выбираем вдоль $\mathbf{H}$), то

$$\nu_x = \frac{\nu_x^0 + q\tau\Omega\nu_y^0}{1 + (q\tau\Omega)^2}, \tag{26}$$

$$\nu_y = \frac{\nu_y^0 - q\tau\Omega\nu_x^0}{1 + (q\tau\Omega)^2},$$

$$\nu_z = \nu_z^0; \quad \left(\Omega = \frac{eH}{mc}\right).$$

В заключение выражаю благодарность С. С. Моисееву за внимание к работе и ценные дискуссии.

### Литература

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, изд. 2-е, М., 1954. — [2] Г. М. Заславский, С. С. Моисеев. ЖТФ XXXIII, 782, 1963. — [3] С. Т. Беляев, Г. И. Будкер. ДАН СССР, *107*, 807, 1956. — [4] С. С. Моисеев. ЖЭТФ, *37*, 553, 1959.

Новосибирский государственный университет

Поступило в Редакцию 2 июля 1962 г.