

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРУКТУРЫ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В. И. Карпман и Р. З. Сагдеев

Исследуется устойчивость ламинарной структуры фронта ударных волн малой амплитуды в разреженной плазме. Показана неустойчивость осцилляторной структуры.

§ 1. Введение

В настоящее время в теории толщины фронта ударных волн в разреженной плазме, помещенной в сильное магнитное поле, существуют два совершенно различных подхода. В работах^[1-3] состояние плазмы внутри фронта предполагается устойчивым и поэтому рассматривается в рамках ламинарной теории. При этом возникающие в такой ударной волне колебания плазмы, разумеется, являются упорядоченными. В отличие от этих работ в^[4, 5] делается попытка построить турбулентную теорию толщины ударных волн. Такой эвристический подход основан на предположении о существовании некоей гипотетической неустойчивости плазмы внутри фронта ударной волны (в частности, в^[5] явно предполагается, что причиной неустойчивости является неизотропия распределения ионов по скоростям). Заметим, однако, что сильное магнитное поле подавляет такие неустойчивости^[6].

В такой ситуации для предпочтения одному из двух развивающихся подходов представляется естественным строгое исследование устойчивости ламинарной структуры фронта ударной волны.¹ Некоторые типы неустойчивости были уже предсказаны в^[3, 7]. Однако они появляются лишь в волнах достаточно большой амплитуды.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости ламинарной структуры фронта ударных волн малой амплитуды.

В § 2 приводится ламинарная структура фронта ударной волны в разреженной плазме ($p \ll \frac{H^2}{8\pi}$), а в § 3 — основные соотношения для малых возмущений, распространяющихся в однородной разреженной плазме при частотах, сравнимых с ионной ларморовской частотой. Такие возмущения удобно описывать, исходя из „магнитной гидродинамики с ионной дисперсией“, которая отличается от обычной магнитной гидродинамики членами, учитывающими дисперсионные эффекты вблизи ионной ларморовской частоты.

В § 4 показывается неустойчивость осцилляторной структуры ударной волны по отношению к распадам на другие колебания с частотами порядка ионной ларморовской частоты.

В § 5 высказываются некоторые замечания относительно эволюционности и устойчивости ударной волны с аperiодической структурой.

¹ Имеющиеся экспериментальные данные^[4], к сожалению, еще недостаточны для однозначного выбора между обеими теориями.

§ 2. Стационарное состояние

Дифференциальное уравнение, описывающее структуру фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля при $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$, имеет вид [3]

$$a^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H - H_1 - H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi m_e n u_1^2} - \frac{a^2}{u_1} \nu \frac{dH}{dx}, \quad (2.1)$$

где u_1 — скорость газа относительно фронта, а ν — частота столкновений между электронами и ионами,

$$a^2 = \frac{m_e c^2}{4\pi n e^2} = \frac{c^2}{\omega_{0e}^2}. \quad (2.2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что магнитное поле H направлено вдоль оси Y , а волна распространяется параллельно оси X (рис. 1).

Ход решения $H(x)$ нелинейного уравнения (2.1) существенно зависит от соотношения между коэффициентами, стоящими перед второй и первой производными в (2.1). В этом можно убедиться, если изобразить интегральные кривые уравнения (2.1) на фазовой плоскости (H, H') .

Если ν достаточно велико, характер фазовой кривой имеет вид, изображенный на рис. 2, а, где H_1 и H_2 — напряженности магнитного поля впереди и сзади фронта волны, соответственно.

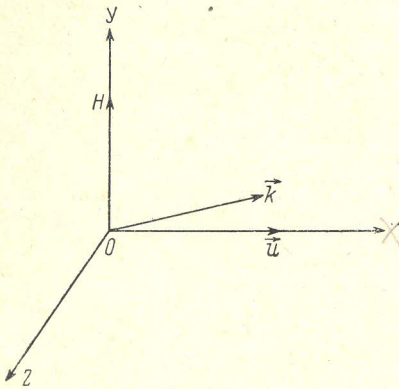


Рис. 1.

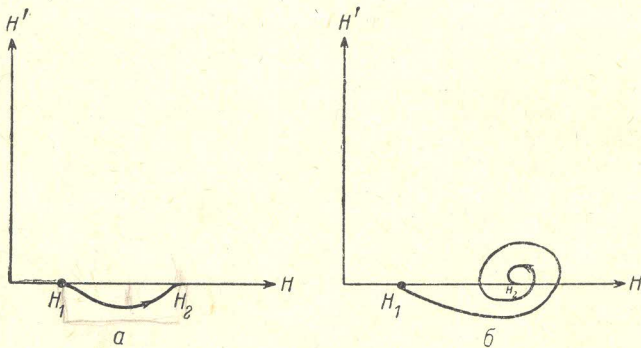


Рис. 2.

В этом случае членом с H'' в (2.1) можно пренебречь, и решение, описывающее профиль волны, определяется магнитной вязкостью $\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ (где σ — электропроводность)

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu}. \quad (2.3)$$

Уравнения профиля волны имеют вид (для случая достаточно слабых ударных волн ($M - 1 \ll 1$))

$$\left. \begin{aligned} H(x) &= H_0 - \frac{\Delta H}{2} \operatorname{th} \gamma x, & H_0 &= \frac{(H_1 + H_2)}{2}, \\ u(x) &= u_0 - \frac{\Delta u}{2} \operatorname{th} \gamma x, & u_0 &= \frac{(u_1 + u_2)}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где $u(x)$ — скорость течения внутри фронта; u_1, u_2 и H_1, H_2 — предельные значения скорости и магнитного поля (причем $u_1 = Mc_A$, где M — число Маха, а c_A — альфвеновская скорость); γ — обратная ширина фронта, а $\Delta u = u_1 - u_2$; $\Delta H = H_1 - H_2$ — скачки значений скорости и магнитного поля, причем имеют место соотношения

$$\gamma = \frac{4\pi\sigma(M-1)c_A}{c^2}, \quad (2.5)$$

$$\Delta u \approx \frac{4}{3}(M-1)u_1, \quad (2.6)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{8M^2+1}+1}{4M^2}. \quad (2.7)$$

Соотношения (2.4)–(2.7), следующие из уравнения (2.1), если выбросить из него член с H'' , могут быть получены, естественно, и из уравнений обычной магнитной гидродинамики (при $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$) с магнитной вязкостью

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(nu)}{dx} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left(m_i n u^2 + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0, \\ \frac{d(Hu)}{dx} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 H}{dx^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где σ выражается через частоту столкновений формулой (2.3).

Таким образом, при достаточно больших ν из (2.1) получается обычный магнитогидродинамический профиль ударной волны, определяемый магнитной вязкостью (в дальнейшем такая волна называется ударной волной с аperiodической структурой).

При достаточно малых ν определяющую роль в (2.1) играет как раз член со второй производной и характер профиля коренным образом меняется [3]. Сначала в невозмущенной плазме появляется уединенная волна, на гребне которой магнитное поле достигает максимального значения. Вследствие необратимой диссипации ($\nu \neq 0$) состояние плазмы после прохождения такой волны несколько отличается от исходного. Вслед за первой волной следует вторая и т. д. Расстояния между двумя соседними „возвышениями“ и „впадинами“ сокращаются до $a(1-M^{1/2})^{-1/2}$, где a — „длина электронной дисперсии“, определяемая формулой (2.2), а M — число Маха. При этом совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой вида [3]

$$u - u_2 \sim e^{-\frac{\nu}{u_0} x} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1-M^{-2})} \frac{x}{a} \right), \quad (2.9)$$

которая постепенно переходит в u_2 — скорость течения за ударной волной. Таким образом, при достаточно малых ν структура фронта носит осцилляторный характер. Соответствующие фазовые кривые изображены на рис. 2, б. Особая точка при $H = H_2$ принадлежит к типу „фокуса“, в то время как в первом случае (рис. 2, а) при $H = H_2$ получался узел.

Величина $\nu_{кр.}$, при которой происходит переход от аperiodического профиля к осцилляторному, определяется следующим образом

$$\nu_{кр.} = \frac{u}{a} \sqrt{\frac{H_1}{6(H_2 - H_1)}}. \quad (2.10)$$

Соотношения (2.4) имеют место при $\nu \gg \nu_{кр.}$.

Существенную роль в анализе устойчивости рассмотренных типов структуры ударных волн должны играть возмущения с частотой порядка и больше ионной ларморовской частоты ω_H .² Такие возмущения не описываются уравнениями магнитной гидродинамики, пригодной лишь для частот $\omega \ll \omega_H$. Удобные уравнения, описывающие интересующие нас возмущения, будут получены в следующем параграфе.

§ 3. Магнитная гидродинамика с „ионной дисперсией“. Уравнения для малых возмущений

Ограничимся случаем, когда характерные частоты много меньше электронной ларморовской частоты. Тогда можно пренебречь инерцией электронов, но необходимо учитывать дисперсионные эффекты вблизи ионной ларморовской частоты. Предполагая $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$, можно написать уравнения движения для электронной и ионной компонент в виде

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i \bar{\mathcal{H}}] + \nu m_e \mathbf{v}_e, \quad (3.1)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathcal{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \bar{\mathcal{H}}] - \nu m_e \mathbf{v}_e, \quad (3.2)$$

$$\text{rot } \bar{\mathcal{H}} = \frac{4\pi ne}{c} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathcal{E}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{v}_i n) = 0, \quad (3.5)$$

где ν — эффективная частота столкновений электронов об ионы. В написанных уравнениях мы учли, что при интересующих нас условиях можно пренебречь отклонением от квазинейтральности, т. е. всюду считали, что $n_i \approx n_e = n$. Пренебрежение инерцией электронов означает также, что мы должны выбросить член $m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt}$ в левой части (3.2). Исключая теперь \mathcal{E} из (3.1) и (3.2) и пользуясь (3.3), получим

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{4\pi n m_i} [\text{rot } \bar{\mathcal{H}} \bar{\mathcal{H}}]. \quad (3.6)$$

В (3.6) и всюду в дальнейшем введено обозначение \mathbf{V} вместо \mathbf{v}_i . Исключим теперь \mathcal{E} из уравнений (3.1) и (3.4)

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \bar{\mathcal{H}}] + \frac{c m_e}{e} \text{rot} (\nu \mathbf{v}_e) - \frac{m_i c}{e} \text{rot} \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Подставляя сюда \mathbf{v}_e из (3.3), $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ из (3.6) и предполагая, что $\nu \ll \omega \frac{m_i}{m_e}$, получим:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{V} \bar{\mathcal{H}}] + \frac{c^2}{4\pi \sigma} \Delta \bar{\mathcal{H}} - \frac{c}{4\pi e} \text{rot} \left\{ \frac{1}{n} [\text{rot } \bar{\mathcal{H}} \bar{\mathcal{H}}] \right\}. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5)–(3.7) представляют собой систему основных уравнений разреженной плазмы, пригодную для описания движений с частотами, сравнимыми и большими ω_H — ионной ларморовской частоты. (Область ее применимости определяется неравенствами $\omega \ll (\omega_{Hi} \omega_{He})^{1/2}$, $\omega \ll \omega_{0i}$).

² В дальнейшем, там где это не приведет к опасности спутать ионную ларморовскую частоту с электронной, мы будем обозначать первую через ω_H вместо ω_{Hi} .

Эта система отличается от уравнений обычной магнитной гидродинамики разреженной плазмы ($p \ll \frac{H^2}{8\pi}$) последним членом в уравнении (3.7), который, как легко видеть из (3.6)—(3.7), становится малым при частотах, много меньших ω_{Hi} . Этот член ответственен за характерные дисперсионные эффекты вблизи ω_H . В дальнейшем мы будем называть эту систему „уравнениями магнитной гидродинамики с ионной дисперсией“.

Легко убедиться, что для одномерного течения плазмы поперек магнитного поля дисперсионный член в (3.7) исчезает и система (3.5)—(3.7) превращается в уравнения (2.8) обычной магнитной гидродинамики.

Отсюда, в частности, следует, что формулы (2.4)—(2.7), описывающие структуру ударной волны в аperiодическом случае (когда „электронная“ дисперсия не существенна), будут также являться решениями уравнений (3.5)—(3.7), ибо они вытекают из уравнений (2.8) обычной магнитной гидродинамики.

Линеаризация уравнений (3.6)—(3.7) приводит к основным соотношениям для малых возмущений, распространяющихся в разреженной однородной плазме в магнитном поле \mathbf{H} при частотах

$$\omega \ll \sqrt{\omega_{Hi}\omega_{He}}, \quad \omega \ll \omega_{0i} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_i}}.$$

Приведем их в удобной для последующего изложения форме. Дисперсионное уравнение имеет вид (\mathbf{H} направлено, как показано на рис. 1; волновой вектор \mathbf{k} лежит в плоскости XY)

$$\omega_{1,2} = \frac{c_A}{2} \left(\sqrt{(k_x + k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2 k^2} \pm \sqrt{(k_x - k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2 k^2} \right), \quad (3.8)$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Малые возмущения магнитного поля и скорости (\mathbf{h} , \mathbf{v}) связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} h_y &= -\frac{k_x}{k_y} h_x, \\ h_z &= i \frac{c_A^2}{\omega_H} \frac{\omega(k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2 - k_y^2 c_A^2} h_x, \\ v_x &= \frac{c_A^2(k_x^2 + k_y^2)}{\omega k_y H} h_x; \quad v_y = 0, \\ v_z &= \frac{c_A^2 k_y}{\omega H} h_x. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

При частотах, малых по сравнению с ω_H , уравнение (3.8) переходит в дисперсионные формулы для „быстрой“ и альфвеновской волн

$$\omega_1 = c_A k, \quad \omega_2 = c_A k_y \quad (3.10)$$

[эти формулы получаются из (3.8), если положить там $\omega_H = \infty$]. Соответственно этому волну, частота которой определяется из (3.8) при положительном знаке перед корнем, мы будем называть быстрой, а при отрицательном — альфвеновской,³ хотя при $\omega \geq \omega_H$ существенно меняется характер поляризации этих волн по сравнению с быстрой и альфвеновской волнами в обычной магнитной гидродинамике, как это видно из (3.9). Например, у магнитного поля и скорости в „альфвеновской“

³ Медленная волна у нас отсутствует, так как мы пренебрегли всеми членами, содержащими p .

волне появляются компоненты, лежащие в плоскости, проходящей через \mathbf{H} , \mathbf{k} , а в „быстрой“ — компоненты вдоль оси z , перпендикулярной \mathbf{H} , \mathbf{k} .

При достаточно малых углах между \mathbf{k} и осью X (см. рис. 1), таких, что $k_y \ll k_x$ дисперсионные уравнения принимают вид

$$\omega^2 = \rho^2 k^2, \quad \rho^2 = \left(1 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2\right) c_A^2. \quad (3.11)$$

§ 4. Неустойчивость осцилляторной структуры ударной волны

Рассмотрим ударную волну с ламинарной осцилляторной структурой фронта.

Колебания скорости $u(x) - u_2 \equiv v(x)$ определяются формулой (2.9), колебания магнитного поля $h = \mathcal{H}(x) - H_2$ и плотности ρ связаны с $v(x)$ соотношениями

$$h = -\frac{v(x)H_0}{u_0}, \quad \rho(x) = -\rho_0 \frac{v(x)}{u_0}, \quad (4.1)$$

где мы учли, что число Маха M очень мало отличается от единицы.

При достаточно малой частоте столкновений $\nu \left(\nu \ll \frac{\omega_H}{M-1} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right)$ длина затухания осцилляций велика по сравнению с длиной волны (2.9), и можно, не учитывая затухание, поставить вопрос об устойчивости гармонической волны (2.9) по отношению к распадам на другие колебания. Необходимым условием распада является выполнение так называемых распадных условий^[8]

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_2; \quad \omega_1 = \omega_0 - \omega_2, \quad (4.2)$$

где k_0 — волновое число исходной волны, а \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 — волновые числа колебаний, возникающих в процессе распада; ω_0 , ω_1 и ω_2 — частоты соответствующих колебаний в лабораторной системе отсчета.

На основании (2.9) можно написать следующее выражение для k_0

$$k_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - M^{-2})} a^{-1} \approx \frac{\sqrt{M-1}}{a}, \quad (4.3)$$

где a — длина электронной дисперсии [формула (2.2)]. Поскольку рассматриваются слабые ударные волны, то $k_0 \ll a^{-1}$. Будем считать, что $k_0 \geq A^{-1}$, где A — длина „ионной дисперсии“

$$A = \frac{c}{\omega_{0i}} = \frac{c_A}{\omega_{Hi}} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} a,$$

что соответствует числам Маха $M-1 \geq \frac{m_e}{m_i}$. Даже при столь малых $M-1$ значения k_0 таковы, что надо пользоваться уравнениями гидродинамики с ионной дисперсией (3.6), (3.7). Частота исходной волны (2.9) в системе, где ударная волна покоится, очевидно, равна нулю. В лабораторной системе, где скорость ударной волны $u_1 \approx c_A$, соответствующая частота равна

$$\omega_0 = uk_0 \approx c_A k_0. \quad (4.3a)$$

Учитывая порядок k_0 , мы видим, что $\omega_0 \geq \omega_H$. Частоты $\omega_1(\mathbf{k}_1)$ и $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ волн, возникающих при распаде, должны определяться из дисперсионных уравнений (3.8).

Определение инкремента распадной неустойчивости при достаточно малой амплитуде исходной волны (2.9) производится следующим образом^[8].

Обозначим через \mathbf{v}_1 , \mathbf{h}_1 и \mathbf{v}_2 , \mathbf{h}_2 возмущения скорости и магнитного поля, возникающие в результате распада. Тогда полную скорость течения и магнитное поле в системе покоя ударной волны запишутся в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathcal{H} = \mathbf{H} + \mathbf{h} + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2$ — скорость и магнитное поле за ударной волной (в силу малости $M \ll 1$ можно считать $u_2 \approx c_A$, $H_2 \approx H_0$); \mathbf{v} и \mathbf{h} — осцилляции ламинарной структуры, определяемые формулами (2.9), (4.1); \mathbf{u} и \mathbf{v} направлены вдоль оси X , а \mathbf{H} и \mathbf{h} — вдоль оси Y (см. рис. 1).

Подставляя (4.4) в уравнения (3.6), (3.7) мы должны произвести линеаризацию по \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , а также отбросить члены второго порядка по \mathbf{v} и \mathbf{h} в силу предполагаемой малости исходных колебаний. (При этом, разумеется, нужно сохранить произведения типа $v_1 v$, $v_2 v$ и т. д., описывающие взаимодействие распадающейся волны с „продуктами распада“. После этого для \mathbf{v}_1 , \mathbf{h}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{h}_2 получается система уравнений вида

$$\hat{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = 0, \quad (4.5)$$

где \hat{L} — некоторый дифференциальный матричный оператор. Поскольку в системе покоя ударной волны \hat{L} не содержит времени явно, можно искать \mathbf{v}_1 , \mathbf{h}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{h}_2 в виде, пропорциональном

$$\exp[i(\omega t + \mathbf{k}_1 \mathbf{r})], \quad \exp[i(\omega t + \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2)],$$

соответственно. При этом можно ограничиться возмущениями, у которых \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 лежат в плоскости XY (рис. 1). Заметим, что частота возмущений в системе ударной волны ω связана с частотами этих возмущений ω_1 и ω_2 в лабораторной системе соотношениями

$$\omega_1 = \omega + k_{1x} u, \quad \omega_2 = -\omega + k_{2x} u. \quad (4.6)$$

Замечая, что на основании (2.9) $v \sim \frac{1}{2}(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x})$ и учитывая распадающие условия (4.2), получим, что члены типа $v_2 v$ будут содержать экспоненту $\exp ik_{1x} x$, а $v_1 v = \exp ik_{2x} x$. Взяв компоненты Фурье, соответствующие этим экспонентам, от уравнений (4.5), мы получим алгебраическую систему уравнений для v_1 и v_2 . Из равенства нулю ее детерминанта и определится инкремент неустойчивости, равный $\text{Im } \omega$ (для неустойчивости необходимо, чтобы $\text{Im } \omega < 0$).

Алгебраическая система, получающаяся из (4.5), после описанных операций, имеет вид

$$H_0 \omega_1 v_{1x} - \frac{c_A^2 (k_{1x}^2 + k_y^2)}{k_y} h_{1x} = \left(\frac{v}{2u}\right) \lambda h_{2x}, \quad (4.7)$$

$$H_0 \omega_1 v_{1y} = -\left(\frac{v}{2u}\right) k_0 c_A^2 h_{2x}, \quad (4.8)$$

$$H_0 \omega_1 v_{1z} - k_y c_A^2 h_{1z} = -\left(\frac{v}{2u}\right) c_A^2 k_y \left(\frac{\omega_0}{\omega_2} + 1\right) h_{2z}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1 h_{1x} - k_y H_0 v_{1x} + i H_0 \frac{\omega_1}{\omega_H} k_y v_{1z} = \\ & = \left(\frac{v}{2u}\right) \left\{ \left[k_{2x} c_A + \frac{c_A^2 (k_{2x}^2 + k_y^2)}{\omega_2} \right] h_{2x} + i \frac{k_y^2 k_{2x} c_A^3}{\omega_2 \omega_H} h_{2z} \right\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1 h_{1z} - k_y H_0 v_{1z} - i \frac{H_0}{\omega_H} k_y \omega_1 v_{1x} = \\ & = \left(\frac{v}{2u}\right) \left[-\left(k_{1x} c_A - \frac{c_A^2 k_y^2}{\omega_2}\right) h_{2z} - i \frac{c_A^2}{\omega_H \omega_2} \left(k_{2x}^2 + k_y^2 - \frac{k_0 \omega_2}{c_A}\right) k_{1x} c_A h_{2x} \right], \end{aligned} \quad (4.11)$$

где

$$\lambda = -\frac{(k_{1x}k_{2x} + k_{2x}^2)c_A^2}{k_y} + \frac{c_A^2(k_{2x}^2 + k_y^2)}{k_y\omega_2^2} [k_0k_{2x}c_A^2 - k_{1x}c_A\omega_2]. \quad (4.12)$$

Эти уравнения соответствуют компоненте Фурье $\sim \exp ik_{1x}x$. Уравнения, отвечающие другой компоненте $\sim \exp ik_{2x}x$, могут быть легко получены из (4.7)—(4.12) простой заменой индекса 1 на 2. При этом в левых частях появятся v_2 , h_2 , а в правых — v_1 , h_1 . При выводе этих уравнений мы всюду считали $u \approx c_A$. Заметим, что если положить $\frac{v}{u} = 0$, то рассматриваемые уравнения переходят в алгебраические уравнения для малых возмущений в однородной среде, из которых, в частности, следуют формулы (3.9). Пользуясь этим, мы исключили в правых частях (4.7)—(4.12) компоненты скорости v_{2x} , v_{2y} , v_{2z} , выразив их через h_{2x} , h_{2z} по формулам (3.9).

Полученная система уравнений слишком громоздка. Для ее упрощения предположим, что волновой вектор \mathbf{k}_1 одного из колебаний, возникающих при распаде, мало отличается от k_0 , т. е.

$$k_{2x} \ll k_0; \quad k_y \ll k_{1x}. \quad (4.13)$$

Легко видеть, что распадным условиям (4.2) при этом всегда можно удовлетворить (см. также сноску 4). Из (4.13) вытекает, что для волны с волновым вектором \mathbf{k}_2 всегда можно пренебречь дисперсией, т. е. отбросить члены при \mathbf{v}_2 , \mathbf{h}_2 , содержащие ω_H в знаменателе (ибо $k_0 \sim \frac{c_A}{\omega_H}$).

Учитывая (4.13) и сделанные выше замечания относительно порядков величин, систему (4.7)—(4.12) легко свести к следующему уравнению

$$\omega_1^2 \left(\omega_1^2 - c_A^2 k_{1x}^2 - \frac{c_A^4}{\omega_H^2} k_y^2 k_{1x}^2 \right) h_{1x} = - \left(\frac{v}{2u} \right) \omega_1^3 \omega_2 h_{2x}. \quad (4.14)$$

При получении этого уравнения мы использовали также то обстоятельство, что в правых частях (4.7)—(4.12), содержащих $\frac{v}{2u}$, можно пользоваться соотношениями, справедливыми при отсутствии взаимодействия между рассматриваемыми тремя типами колебаний, в частности, можно пользоваться дисперсионными уравнениями (3.8), которые с учетом (4.13) принимают вид

$$\omega_1^0(\mathbf{k}_1) \approx c_A k_{1x}, \quad \omega_2^0(\mathbf{k}_2) \approx c_A \sqrt{k_{2x}^2 + k_y^2}. \quad (4.15)$$

Индекс „0“ сверху здесь подчеркивает, что эти соотношения справедливы в пренебрежении указанным взаимодействием между колебаниями.⁴

Чтобы получить еще одно уравнение для h_{1x} , h_{2x} , достаточно, как уже отмечалось выше, переставить индексы 1 и 2 в системе (4.7)—(4.12) и свести получившуюся систему к одному уравнению, аналогично тому,

⁴ Для того, чтобы выполнялись распадные условия (4.2), нужно взять в общих дисперсионных уравнениях (3.8) знак плюс перед корнем. Легко убедиться, что только в этом случае можно удовлетворить распадным условиям и (4.13).

как было получено (4.14). После соответствующих пренебрежений получим

$$[\omega_2^2 - c_A^2 (k_x^2 + k_y^2)] h_{c_x} \left(\frac{v}{2u} \right) \omega_1^2 h_1 x. \quad (4.16)$$

Приравнявая нулю детерминант системы (4.14), (4.16), мы должны учесть соотношения (4.6), из которых следует, что ω_1 и ω_2 должны иметь одинаковую малую мнимую часть $\left(\frac{v}{u} \right)$.

Пренебрегая добавками к действительным частям ω_1 и ω_2 , связанным со взаимодействием колебаний, можем написать

$$\omega_1 = \omega_1^0 + i\nu, \quad \omega_2 = \omega_2^0 + i\nu, \quad (4.17)$$

где ω_1^0 , ω_2^0 определяются формулами (4.15) [которые, кстати, легко получаются, если отбросить члены $\sim \frac{v}{u}$ в уравнениях (4.14), (4.16)]. Подставляя (4.17) в детерминант системы (4.14), (4.16) и удерживая члены, линейные относительно $\frac{v}{u}$, получим окончательное выражение для ν

$$\nu \approx \pm \frac{v}{4u} \omega_1 \approx \pm \frac{v}{4c_A} \omega_1. \quad (4.18)$$

Отрицательный знак ν приводит к распадной неустойчивости.

§ 5. Заключение. Об устойчивости волны с аperiodической структурой

Таким образом, показано, что осцилляторная структура фронта ударной волны, имеющая место при $\nu < \nu_{кр}$, оказывается неустойчивой по отношению к распаду.

Сделаем несколько замечаний относительно устойчивости волны с аperiodической структурой, которая описывается формулами (2.4)—(2.7) и удовлетворяет также уравнениям обычной магнитной гидродинамики.

Если рассматривать „косые“ волны, то из дисперсионного уравнения (3.8) вытекает, что они могут обгонять фронт волны, даже если скорости течения удовлетворяют условиям эволюционности в обычной магнитной гидродинамике [9]

$$u_2 < c_A < u_1.$$

Рассмотрим, например, простейший случай, когда $k_y \ll k$. Из (3.11) легко вычислить проекцию групповой скорости таких волн на ось X

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = c_A \left(1 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2 \right)^{1/2}.$$

Легко видеть, что при достаточно большом k_y (но $k_y \ll k$) эта скорость может оказаться большей u_1 и, таким образом, число расходящихся от разрыва волн станет на единицу больше, чем в обычной магнитной гидродинамике, в то время как число граничных условий останется тем же. Таким образом, ударная волна с аperiodической структурой (2.4)—(2.7), будучи эволюционной в обычной магнитной гидродинамике, не является таковой с точки зрения магнитной гидродинамики с ионной дисперсией.

В связи с этим необходимо провести исследование устойчивости структуры таких волн по отношению к „косым“ возмущениям.

Литература

- [1] J. Adlam, J. Allen. *Phil. Mag.*, 3, 448, 1958; G. Gardner, H. Goertzel, H. Grad, C. Morawetz, M. Rose a. H. Rubin. Доклад № 374 на II Женевской конференции, 1958; Р. З. Сагдеев. Выступление на X международном астрономическом съезде, 1961 — [2] Р. З. Сагдеев. Доклад на IV конференции по ионизационным явлениям. Упсала, 1959; С. Morawetz. Preprint № 2, NYO-8677, 1959. — [3] Р. З. Сагдеев. *ЖТФ*, XXXI, 1185, 1961. — [4] A. Kantrowitz, R. M. Patrick, H. E. Petschek. Preprint, 1959. — [5] H. E. Petschek. Доклад на Всесоюзном съезде механиков. М., 1960. — [6] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. *УФН*, 73, 701, 1961. — [7] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. *Ядерный синтез*, 1, стр. 82, 1961. — [8] В. Н. Ораевский и Р. З. Сагдеев. *ЖТФ*. XXXII, 1291, 1962. — [9] Р. В. Половин. *УФН*, 72, 3, 1960.

Новосибирский государственный
университет

Поступило в Редакцию
22 мая 1962 г.