1963 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXXIII, в. 8
1963 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXXIII, № 8

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ПОД УГЛОМ К МАГНИТНОМУ ПОЛЮ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В. И. Карпман

Исследуется структура фронта ударной волны, распространяющейся под углом к магнитному полю в разреженной плазме при $\frac{H^2}{8\pi} \gg p$.

§ 1. Введение

В работе [1] была получена ламинарная структура фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме в сильном магнитном поле $\left(\frac{H^2}{8\pi} \gg p\right)$. В этой работе было показано, что профиль фронта ударной волны носит осцилляторный характер, если частота столкновений электронов с ионами ν_{ei}, определяющая Джоулеву диссипацию,[1] достаточно мала, а именно

$$\nu_{ei} \ll \frac{c_A}{a\,(\mathrm{M}-1)}, \tag{1.1}$$

где M — число Маха; $c_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi n m_i}}$ — ионная альфвеновская скорость; a — длина электронной дисперсии

$$a = \frac{c}{\omega_{0e}} = c\sqrt{\frac{m_e}{4\pi n e^2}}, \tag{1.2}$$

определяющая ширину уединенной волны, получающейся из ударной, когда частота столкновений исчезает.[2] Ширина фронта ударной волны при условии (1.1) может стать значительно меньше свободного пробега $\left(\text{если } \sqrt{\frac{H^2}{8\pi n T}} \ll \frac{m_i}{m_e}\right)$, что позволяет рассматривать такую волну как „бесстолкновительную“ (именно в таком смысле мы и будем употреблять в дальнейшем этот термин).

Основную роль в формировании структуры фронта бесстолкновительных ударных волн, распространяющихся поперек магнитного поля, играют дисперсионные эффекты, обусловленные инерцией электронов, а основным параметром длины является длина электронной дисперсии (1.2) (подробнее см. [1, 3].)

Ионные же колебания, распространяющиеся перпендикулярно $\mathbf{H}$ при частотах $\omega \ll \sqrt{\omega_{0i}\omega_{Hi}}$, обладают, как известно, линейным законом дисперсии и поэтому на структуру фронта волны, распространяющейся поперек магнитного поля, влияния не оказывают. Однако, ионная дисперсия

---

[1] Другими видами диссипации при $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ можно пренебречь.

[2] Качественные соображения о возможности осцилляторной структуры ударных волн в достаточно разреженной плазме высказывались в работах [2].

начинает играть основную роль для бесстолкновительных ударных волн, распространяющихся не перпендикулярно к магнитному полю даже при очень малых отклонениях от перпендикулярности, а именно, $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, где θ — угол между плоскостью фронта и направлением $\mathbf{H}$.

В настоящей работе рассматриваются ударные волны, распространяющиеся под любым углом к магнитному полю, кроме $\theta \leqslant \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, $\frac{\pi}{2} - \theta \ll 1$.

Система основных уравнений

Характерные частоты всех движений, рассматриваемых в этой работе, много меньше электронной ларморовской частоты. Кроме того, мы пренебрегаем отклонениями от квазинейтральности $(n_i = n_e = n)$ и считаем плазму достаточно „холодной" $\left(p \ll \frac{H^2}{8\pi}\right)$. При этих условиях уравнения для электронной и ионной компонент плазмы принимают вид

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}] + \nu_{ei} m_e \mathbf{v}_e, \tag{2.1}$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}] - \nu_{ei} m_e \mathbf{v}_e, \tag{2.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi n e}{c}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}_i) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{2.5}$$

где ν_{ei} — эффективная частота столкновений электронов с ионами. Исключая теперь $\mathbf{E}$ из (2.1)—(2.2) и (2.1)—(2.4) и подставляя $\mathbf{v}_e$ из (2.3) в (2.1), получим следующую систему уравнений (при этом предполагается, что $\nu_{ei} \ll \omega_{Hi}$)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{4\pi n m}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\mathbf{H}], \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{V}\mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H} - \frac{c}{4\pi e}\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{n}[\operatorname{rot}\mathbf{H}\mathbf{H}]\right\}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{2.8}$$

Здесь и в дальнейшем $\mathbf{v}_i$, m_i обозначены через $\mathbf{V}$, m, а электропроводность выражается через частоту столкновений соотношением

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_e \nu_{ei}}. \tag{2.9}$$

Уравнения (2.6)—(2.8) представляют собой систему основных уравнений разреженной плазмы, пригодную для описания движений с частотами, сравнимыми и бо́льшими $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ — ионной ларморовской частоты. Область ее применимости определяется неравенствами

$$\omega \ll \sqrt{\omega_{Hi}\omega_{He}}, \quad \omega \ll \omega_{0i} = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_i}}. \tag{2.10}$$

Система (2.6)—(2.8) отличается от уравнений обычной магнитной гидродинамики холодной плазмы последним членом в уравнении (2.7), который становится малым при частотах, много меньших ω_H. Этот член описывает характерные дисперсионные эффекты при $\omega \gtrsim \omega_H$, и поэтому систему (2.6)—(2.8) можно называть уравнениями „магнитной гидродинамики с ионной дисперсией“.

§ 3. Дифференциальное уравнение, описывающее структуру. Исследование профиля ударной волны

Удобно выбрать систему координат так, чтобы ось X была направлена вдоль движения плазмы перед фронтом ударной волны, а плоскость XY проходила через направление напряженности $\mathbf{H}$ перед фронтом. В системе, где фронт покоится, все величины будут зависеть только от x. Из уравнений непрерывности (2.8) получаем

$$nV_x \equiv j = \mathrm{const}, \quad H_x = H_0 = \mathrm{const}. \tag{3.1}$$

При нашем выборе системы координат граничные условия при $x \to -\infty$ будут иметь вид

$$V_{1x} = u_1, \quad V_{1y} = V_{1z} = 0, \tag{3.2}$$

$$H_{1y} = H_1, \quad H_{1z} = 0 \tag{3.3}$$

(V_{1x}, V_{2x} и т. д. — предельные значения соответствующих величин при $x \to -\infty$, $+\infty$, соответственно). Учитывая (3.1)—(3.3) и одномерность движения, из основных уравнений (2.6), (2.7) легко получить

$$V_x = u_1 - \frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi mj}, \tag{3.4}$$

$$V_y = \frac{H_0}{4\pi mj}(H_y - H_1), \tag{3.5}$$

$$V_z = \frac{H_0 H_z}{4\pi mj}, \tag{3.6}$$

$$V_y H_0 - V_x H_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H'_y + \frac{mc}{e} V_x V'_z = -u_1 H_1, \tag{3.7}$$

$$V_z H_0 - V_x H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H'_z - \frac{mc}{e} V_x V'_y = 0. \tag{3.8}$$

Из этих уравнений следуют, прежде всего, предельные соотношения, связывающие величины с обеих сторон фронта ударной волны, т. е. соотношения для скачков на „разрыве“; из (3.5), (3.7) и (3.6)—(3.8) вытекает ($H_2 = H_{2y}$, $u_2 = V_{2x}$)

$$\frac{H_0^2}{4\pi mj}(H_2 - H_1) = u_2 H_2 - u_1 H_1, \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{H_0^2}{4\pi mj} - u_2\right) H_{2z} = 0. \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) следует, что H_{2z} может быть отличным от нуля только при условии $u_2 = u_1 = \frac{H_0^2}{4\pi mj}$. Это соответствует скачку вращательного типа, который мы здесь рассматривать не будем. Поэтому можно считать, что

$$H_{2z} = 0, \quad V_{2z} = 0. \tag{3.11}$$

Последнее равенство следует из (3.6).

Из (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) легко получить

$$u_1 = \frac{H_0^2}{4\pi mj} + \frac{H_2^2 + H_1H_2}{8\pi mj}, \tag{3.12}$$

$$u_2 = \frac{H_0^2}{4\pi mj} + \frac{H_1^2 + H_1H_2}{8\pi mj}, \tag{3.13}$$

$$V_{2y} = \frac{H_0(H_2 - H_1)}{4\pi mj}. \tag{3.14}$$

Заметим, что соотношения между предельными величинами на разрыве (3.11)—(3.14) совпадают с соответствующими уравнениями магнитной гидродинамики при $\frac{H^2}{8\pi} \gg p$ [4]. Таким образом, учет ионной дисперсии не приводит к изменениям условий на разрыве. Это связано с тем, что дополнительные члены, описывающие дисперсию $\left[\text{члены } c \frac{mc}{e} \text{ в (3.7), (3.8)}\right]$, содержат производные и обращаются в нуль при $x \to \pm\infty$. Однако структура разрыва определяется именно этими членами.

Заметим также, что условия эволюционности [5] приводят к неравенству

$$u_1 > u_2. \tag{3.15}$$

Из (3.12), (3.13) тогда вытекает, что поперечная составляющая магнитного поля после прохождения волны усиливается

$$H_2 > H_1. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.4)—(3.6) в (3.7), (3.8), получим

$$\frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi mj} H_y - u_0(H_y - H_1) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H'_y + \frac{cH_0V_x}{4\pi neu_1} H'_z = 0, \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi mj} - u_0\right) H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H'_z - \frac{cH_0V_x}{4\pi neu_1} H'_y = 0, \tag{3.18}$$

где обозначено

$$u_0 = u_1 - \frac{H_0^2}{4\pi mj} = \frac{(H_1 + H_2) H_2}{8\pi mj}. \tag{3.19}$$

Как и в (1), мы ограничимся исследованием слабых ударных волн, т. е. будем считать, что

$$u_1 - u_2 \ll u_1. \tag{3.20}$$

Только в этом случае можно пренебречь перепадом газокинетического давления по сравнению с магнитным, а также считать, что электропроводность σ (2.9) приблизительно постоянна внутри фронта волны. Благодаря (3.20) мы можем заменить в последних членах (3.17), (3.18) V_x на u_1. В (3.18) можно также пренебречь членом $\frac{c^2}{4\pi\sigma} H'_z$ по сравнению с последним, поскольку частота столкновений удовлетворяет условию

$$\nu_{ei} \ll \omega_{He} = \frac{eH}{m_e c}. \tag{3.21}$$

Учитывая граничные условия для H_z ($H_z \to 0$ при $x \to \pm\infty$), легко убедиться, что можно опустить H_z^2 в первых членах (3.17) и (3.18). После этих пренебрежений система (3.17), (3.18) сводится к следующему уравнению

$$A^2 \frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{H^2-H_1^2}{8\pi m j u_0}\right)^{-1}\frac{dH}{dx}\right]-$$

$$-B\frac{dH}{dx}-\frac{H^2-H_1^2}{8\pi m j u_0}H+H-H_1=0, \tag{3.22}$$

$$A=\left(\frac{eH_0}{m_i c}\right)\frac{c^2}{\omega_{0i}^2 u_0}; \quad B=\frac{c^2}{4\pi\sigma u_0}. \tag{3.23}$$

Здесь и в дальнейшем обозначено $H_y \equiv H$.

Приступим к решению уравнения (3.22). Введем обозначения

$$1+\frac{H_1^2}{8\pi m j u_0}=D^2,$$

$$H_2^2+H_1H_2+\cancel{H_2^2}\equiv 8\pi m j u_0 \cancel{\alpha}=\eta^2. \tag{3.24}$$

H_1^2 D^2

Тогда (3.22) примет вид

$$\cancel{A^2}D^2\frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)^{-1}\frac{dH}{dx}\right]-B\frac{dH}{dx}+D^2H\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)+H_1=0. \tag{3.25}$$

Для решения этого уравнения удобно перейти к новой независимой переменной $x=x(u)$, так чтобы

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{H^2}{\eta^2}, \tag{3.26}$$

откуда следует

$$\frac{dH}{du}=\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)^{-1}\frac{dH}{dx}. \tag{3.27}$$

Подстановка (3.26), (3.27) в (3.25) приводит это уравнение к виду

$$\frac{d^2H}{du^2}-\beta\frac{dH}{du}+\alpha H-\frac{H_1}{A^2D^2\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)}=0, \tag{3.28}$$

$$\beta=\frac{B\,D^2}{A^2\cancel{D^2}}, \quad \alpha=\frac{1}{A^2}. \tag{3.29}$$

Для решения этого уравнения можно применить наглядную аналогию, предложенную ранее в работе [1], а именно, это есть уравнение движения частицы (роль координаты играет H, времени — u) в эффективной потенциальной яме вида

$$V(H)=\frac{1}{4A^2}\left[H^2-H_1^2-\frac{\eta H_1}{D^2}\frac{\left(1+\frac{H}{\eta}\right)\left(1-\frac{H_1}{\eta}\right)}{\left(1-\frac{H}{\eta}\right)\left(1+\frac{H_1}{\eta}\right)}\right] \tag{3.30}$$

с отрицательным „трением“ — β. График этого потенциала представлен на рис. 1. Минимум имеет место в точке H_1, а максимум в точке H_2. Благодаря отрицательному трению, „равновесие“ в точке H_1 неустойчиво и „движение“, начинающееся в точке H_1, заканчивается в точке H_2.

Характер „движения“ может быть периодическим или апериодическим в зависимости от соотношения между коэффициентом „трения“ β и длиной дисперсии A. В достаточно плотной плазме, когда число столкновений и, следовательно, коэффициент β велик, т. е. при условии

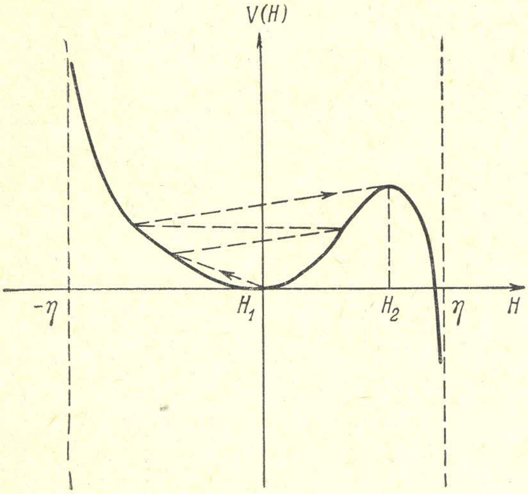

Рис. 1. График „эффективного потенциала“ $V(H)$.

$$\beta > \frac{2D}{A}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2} \quad (3.31)$$

рост магнитного поля внутри фронта имеет апериодический характер и при

$$\beta \gg \frac{2D}{A}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2}$$

$$\left(\nu_{ei} \gg \frac{eH_0}{m_e c}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2}\right) \quad (3.32)$$

совпадает с известным гидродинамическим профилем, определяемым магнитной вязкостью. Соответственно этому положение „равновесия“ на фазовой плоскости является точкой типа „узел“ (рис. 2, *а*). В разреженной плазме с достаточно малым числом столкновений [условие, обратное (3. 32)]

$$\nu_{ei} \ll \frac{eH_0}{m_e c}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2} \quad (3.33)$$

особая точка $H=H_1$ становится „фокусом“ (рис. 2, *б*).

Характер особых точек на фазовой плоскости и общий ход кривых, разумеется, не меняются при переходе от переменной u к переменной x,

Рис. 2. Вид фазовых кривых в случаях достаточно большой (*а*) и малой (*б*) частоты столкновений.

ибо $H'_x=H'_u\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)$, причем $1-\frac{H^2}{\eta^2}>0$. Поэтому все сказанное и рисунки (2, *а*, *б*) можно также считать относящимся к фазовой плоскости (H, H'_x).

Отсюда вытекает следующий ход профиля ударной волны (рис. 3). Профиль начинается с малых осцилляций, переходящих в серию уединенных волн „разрежения". Последние постепенно переводят магнитное поле к значению H_2.[3]

Магнитное поле внутри фронта достигает значений меньших, чем в невозмущенной плазме. Общая картина профиля ударной волны является перевернутой по отношению к профилю, полученному в [1] для случая ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, где фронт начинается с уединенных волн „сжатия", переходящих в малые осцилляции. Причиной этого обращения является противоположный характер закона дисперсии, определяющей структуру фронта. Если для случая волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю, дисперсия определяется инерцией электронов и $\frac{\omega}{k}$ убывает с ростом k, то в нашем случае $\frac{\omega}{k}$ растет с ростом k (см. [3], стр. 93).

Рассмотрим более детально осцилляции в передней части профиля фронта. Полагая в (3.25) $H = H_1 + h$, где $h \ll \eta \sim H_2$ (подчеркнем, что мы не требуем малости h по сравнению с H_1, так как H_1 может быть весьма малым по сравнению с H_2), получим

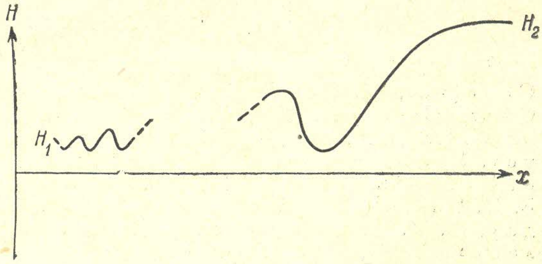

Рис. 3. Профиль изменения магнитного поля во фронте ударной волны в случае достаточно малой частоты столкновений [см. (3.33)].

$$A^2D^2h'' - Bh' + D^2\left(1 - \frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)h = 0. \tag{3.34}$$

Это уравнение имеет решение

$$h = \text{const}\, e^{\gamma x} \cos kx, \tag{3.35}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\beta = \frac{B}{2A^2D^2}, \tag{3.36}$$

$$k = A^{-1}\sqrt{1 - \frac{3H_1^2}{\eta^2}}, \tag{3.37}$$

Эти формулы определяют волновое число и декремент затухания осцилляций в передней части фронта ударной волны.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$H_2 - H_1 \ll H_2 \tag{3.38}$$

(продольная же составляющая H_0 может быть любой). Используя (3.38), (3.24), легко привести основное уравнение (3.25) к виду

$$A^2H'' - \frac{H^2 - H_1^2}{8\pi mju_0} - B\frac{dH}{dx} + H - H_1 = 0. \tag{3.39}$$

Это уравнение было получено ранее Р. З. Сагдеевым для случая когда ударная волна распространяется почти перпендикулярно магнитному полю, причем в этом случае длина дисперсии выражается формулой

$$A \approx \frac{c\theta}{\omega_{0i}}, \quad \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll \theta \ll 1. \tag{3.40}$$

[3] Характерный размер последних уединенных волн порядка „длины ионной дисперсии" A.

(Условие, ограничивающее θ снизу, необходимо для пренебрежения инерцией электронов). Таким образом, оказывается, что уравнение (3.39) применимо не только при малых θ, но и в более общем случае (3.38) с практически любыми θ $\left(\text{кроме исчезающе малых } \theta \lesssim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right)$. При этом длина дисперсии в общем случае дается формулой (3.23), переходящей при $\operatorname{tg}\theta = \frac{H_0}{H_1} \to 0$ в (3.40). Качественный же ход профиля, полученный ранее для малых углов, сохраняет свой характер и при больших θ.

Пользуюсь возможностью поблагодарить Р. З. Сагдеева за плодотворные обсуждения проблемы.

Литература

[1] Р. З. Сагдеев. ЖТФ, XXXI, 1955, 1961.— [2] C. Cardner, H. Goertzel, H. Grad, C. Morawetz, M. Rose a. H. Rubin. Report № 374, Geneva Conference, 1958; L. Davies, R. Liist, A. Schlüter. Zs. f. Naturforsch., *13a*, 916, 1958; J. Adlam, J. Allen. Phil. Mag., *3*, 448, 1958. R. Sagdeyev. Uppsala conference, 1959; C. Morawetz. Preprint, 1959; P. L. Auer, H. Hurwitz, Jr., R. W. Kilb. Phys. Fl. *4*, 1105, 1961.— [3] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, *1*, 82, 1961.— [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, М., 1958.— [5] Р. В. Половин. УФН, *72*, 3, 1960.

Новосибирский государственный университет

Поступило в Редакцию 30 июля 1962 г.