

К ВОПРОСУ ОБ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

C. C. Моисеев

§ 1. Апериодическая неустойчивость релятивистской плазмы во внешнем магнитном поле

Исследован характер апериодической неустойчивости релятивистской плазмы во внешнем магнитном поле и возникающий за счет апериодической неустойчивости нелинейный режим в слабом магнитном поле.

Показано, что толщина „бесстолкновительных“ ударных волн в слабом магнитном поле может стать значительно меньше, чем в нерелятивистском случае, а влияние слабых магнитных полей и парных соударений на развитие нелинейного режима падает с ростом энергии электронов.

Апериодическая неустойчивость нерелятивистской плазмы в магнитном поле в дрейфовом приближении впервые рассмотрена в [1-3].

Рассмотрим вопрос об апериодической неустойчивости релятивистской плазмы. При этом ограничимся случаем, когда ионы нерелятивистские, а анизотропия по скоростям имеется только у электрона типа $p_{\parallel} > p_{\perp}$ (давление вдоль магнитного поля больше поперечного давления).

Поправку к анизотропной функции распределения f_0 берем в виде

$$f_1 = \exp \{i(kz - \omega t)\} \Phi(\mathbf{p})(\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0). \quad (1)$$

Тогда (см., например, [4]) решение кинетического уравнения имеет вид

$$\Phi_v = \gamma_v \frac{e_v}{\Omega_v} \int_0^{\infty} e^{i a_v \xi} (\mathbf{E}^0 \mathbf{L})_{\varphi-\xi} d\xi. \quad (2)$$

Здесь $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$; $\Omega_v = \frac{e_v H_0}{m_v c}$; $a_v = \gamma_v \frac{\omega}{\Omega_v} - \frac{p_z k}{m_v \Omega_v}$.

$$L_x = 2p_{\perp} \cos(\varphi - \xi) \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{kv_{\parallel}}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right) \right],$$

$$L_y = 2p_{\perp} \sin(\varphi - \xi) \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{kv_{\parallel}}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right) \right],$$

\mathbf{E}_0 — амплитудное значение электрического поля возмущения ($v = i, e$;
 i — ионы, e — электроны).

В случае длинных волн и малых инкрементов, когда

$$|\Omega_v| \gg k \gamma_v \sqrt{v_v^2}, \quad \Omega_v \gg |\omega \gamma_v|, \quad (3)$$

с помощью стандартной процедуры легко получим следующее дисперсионное уравнение

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{kc} A_1 + k - \frac{\omega^2}{kc^2} = 0. \quad (4)$$

В (4) введено обозначение

$$A_1 = \frac{e^2}{\Omega_e^2} \left\{ -\frac{W_{\perp e}}{c^2} \frac{\omega}{m_e^2} - \frac{k^2}{\omega m_e^2} (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \right\} - \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{0i}^2}{\Omega_i^2} \omega, \quad (5)$$

где $W_{\perp e} = \varepsilon_e + p_{\perp e}$, а ε_e — внутренняя энергия электронов в единице объема, W_{\perp} по аналогии с обычной тепловой функцией назовем „поперечной тепловой функцией“ (на единицу объема), а величину $m_{e\text{вф.}} = \frac{W_{\perp}}{nc^2}$ — „эффективной поперечной массой“ частицы. Отметим, что в обычной релятивистской термодинамике энергия, приходящаяся на одну частицу, равна тепловой функции, отнесенной к одной частице^[5].

Используя (5), приведем дисперсионное уравнение к следующему виду

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{v_{iA}^2} + \frac{1}{v_{eA}^2} \right) \left[1 - \frac{4\pi}{H_0^2} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \right], \quad (6)$$

где

$$v_{eA} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n m_{e\text{вф.}}}}; \quad v_{iA} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n m_i}}.$$

Из (6) вытекает, что неустойчивость возникает, если

$$\frac{4\pi p_{\parallel}}{H_0^2} > 1 + \frac{4\pi p_{\perp}}{H_0^2}, \quad (7)$$

т. е. условие, аналогичное полученному в [2]. (Разумеется, значения давлений теперь определяются по релятивистскому состоянию). Однако по сравнению с нерелятивистским случаем, если $\Delta P \sim H_0^2$, инкременты могут существенно уменьшиться за счет увеличения $m_{e\text{вф.}}$ ($\Delta P = \|p_{\perp} - p_{\parallel}\|$).

Отметим, что учет магнитной „вязкости“ приводит нас к следующему дисперсионному уравнению [6]

$$\omega = \pm \frac{2k^2}{nm_i} \eta \pm \frac{1}{nm_i} \sqrt{4k^4 \eta^2 - nm_i k^2 \left(p_{\parallel} - p_{\perp} - \frac{H_0^2}{8\pi} \right)}, \quad (8)$$

где $\eta = \eta_i - \eta_e$; $\eta_i = \frac{P_i}{2\Omega_i}$; $\eta_e = \frac{\bar{p}_{ze}^2}{2m_e \Omega_e}$.

Из (8) видно, что стабилизирующий эффект магнитной „вязкости“ мал, если $\eta_e \sim \eta_i$, т. е. для достаточно „горячих“ электронов. Однако с дальнейшим повышением электронной температуры, когда $\eta_e \gg \eta_i$, этот эффект вновь начинает сказываться, как и для изотермической плазмы.

Рассмотрим теперь такие k , для которых

$$k\gamma, \sqrt{v_{\perp}^2} \gg |\Omega_{\perp}|, \omega \gg |\Omega_{\perp}|. \quad (9)$$

Как легко видеть в этом случае

$$\int_0^\infty \sin \xi e^{ia_y \xi} d\xi \approx 0; \quad \int_0^\infty \cos \xi e^{ia_y \xi} d\xi \approx i \frac{\Omega_y}{\gamma(\omega - kv_z)}, \quad (10)$$

и функция $\Phi(p)$ принимает следующий вид

$$\Phi(p) = \frac{2ieE_{0x}p_x}{kv_z - \omega} \left[\frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} + \frac{kv_z}{\omega} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}^2} \right) \right]. \quad (11)$$

(Ось иксов выбрана вдоль электрического поля возмущения). Но (11) совпадает с решением кинетического уравнения без внешнего магнитного поля H_0 [7], т. е. в области волновых чисел, удовлетворяющих (9), влияние магнитного поля несущественно. Как было показано в [7], рассматриваемые возмущения приводят к апериодической неустойчивости, если давление вдоль направления распространения меньше давления в перпендикулярном направлении (т. е. теперь при $p_{\perp} > p_{\parallel}$). Отметим, что в отсутствие магнитного поля при обратном знаке неравенства неустойчивость будет развиваться на аналогичном возмущении, но только другого направления. В магнитном поле, перпендикулярно ему, распространяется магнитозвуковая волна, отличающаяся от альфвеновской волны). Данная неустойчивость развивается при $k < k_{0e}$, а k_{0e} в случае слабой анизотропии и ультраперелистических электронов имеет вид [7]

$$k_{0e} = \frac{\omega_{0e}}{4c\tilde{\gamma}_e} \left(\frac{\Delta p}{p} \right)^{1/2}, \quad \left(\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_e} \right). \quad (12)$$

С учетом (12) имеем для области интересующих нас сейчас волновых чисел

$$\frac{|\Omega_e|}{c\tilde{\gamma}_e} \ll k < k_{0e}. \quad (13)$$

Комбинируя (12) и (13), приходим к выводу, что область (13), где влияние магнитного поля несущественно, существует, если

$$H_0^2 \ll nmc^2\tilde{\gamma}_e \frac{\Delta p}{p}. \quad (14)$$

Инкременты для области (13) могут значительно превысить инкременты из области, где справедливо дрейфовое приближение.

Проведенные здесь рассуждения справедливы также и для нерелятивистского случая, если $H_0^2 \ll n\Delta p$.

Заметим, что токи J в электрических полях возмущения можно выразить в виде следующего „бесстолкновительного закона Ома“ в области больших и малых волновых чисел

$$\mathbf{J} = \eta_{1y}^{-1} \mathbf{E}; \quad \left(k_{1y} \sqrt{\bar{v_y^2}} \gg |\Omega_y| \right),$$

$$\eta_{1y}^{-1} \sim \frac{e^2 n \tau_{1y}}{m_y \tilde{\gamma}_y}; \quad \tau_{1y} \sim \frac{1}{k \sqrt{\bar{v_y^2}}}, \quad (15)$$

$$J = \frac{\eta_{2y}^{-1}}{(\Omega_y' \tau_2)^2} \left\{ \mathbf{E} - \frac{\Omega_y' \tau_2}{H_0} [\mathbf{E} \mathbf{H}_0] \right\},$$

$$\eta_{2y}^{-1} \sim \frac{e^2 n^2 \tau_2 c^2}{(\epsilon_y + p_{\perp y})}; \quad \tau_2 = \frac{1}{|\omega|}, \quad (16)$$

$$\Omega_y' = \frac{e_y H_0 c n}{(\epsilon_y + p_{\perp y})}$$

$$\left(k_{1y} \sqrt{\bar{v_y^2}} \ll |\Omega_y|; \quad \tau_2 |\Omega_y'| \gg 1 \right).$$

§ 2. Ударная волна в разреженной релятивистской плазме при отсутствии сильных внешних полей

Поскольку толщина ударных волн с диссипацией за счет парных соударений растет как квадрат энергии, то отсюда вытекает, что в высокотемпературной плазме, помещенной в установку разумного размера, такие волны практически не могут быть получены. В силу этого проблема так называемых „бесстолкновительных“ ударных волн, толщина которых может быть много меньше пробега частиц при парных соударениях, в релятивистской плазме приобретает еще большую остроту. В отличие от нерелятивистской плазмы этот вопрос для релятивистской плазмы фактически не изучен. Одна из возможностей распространения нерасплювающегося возмущения в разреженной плазме связана со следующим: за счет прихода из областей возмущения более быстрых частиц возникает анизотропное распределение по скоростям в новых областях плазмы и неоднородное магнитное поле развивающейся неустойчивости „удерживает“ частицы, подобно обычным столкновениям до исчезновения анизотропии (см. [8]).

Релятивистский случай, помимо существенных количественных изменений, характеризуется рядом качественных особенностей.

Рассмотрим прежде всего случай, когда внешние поля отсутствуют и оценим амплитуду пульсаций H_a в нелинейном режиме. Нетрудно видеть, например, из (15), что ионные токи, возникающие в электрическом поле возмущения, несущественны (за исключением только ультраполятивистского случая как для ионов, так и для электронов со сравнимыми температурами ионов и электронов). Поэтому оценим амплитуду пульсаций H_a с помощью релятивистского кинетического уравнения для электронов. При этом мы будем считать, что анизотропия по скоростям имеется только у ионов; распределение электронов, как видно будет из дальнейшего, можно считать изотропным.

Развитие нелинейного режима определяют в основном возмущения с максимальными инкрементами (ω_{\max} достигается при $k \approx 0.6k_{0i}$). Учитывая это обстоятельство, оценим амплитуду пульсаций H_a из соотношения

$$k_{0i} v f_{1e} \sim \frac{e}{m_e c \gamma} [\mathbf{p} \mathbf{H}_a] \frac{\partial f_{1e}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (17)$$

Отсюда

$$H_a \sim c p_{te} \frac{k_{0i}}{e}. \quad (18)$$

Здесь p_{te} — средняя величина в тепловом движении поперечной компоненты импульса электрона по отношению к магнитному полю H_a .

Заметим, что (18) соответствует тем полям, для которых

$$r_e \sim \frac{1}{k_0}, \quad (19)$$

r_e — ларморовский радиус электрона.

Во всех тех случаях, когда $\frac{r_i}{r_e} \gg 1$, исследование интересующего нас нелинейного режима упрощается: движущийся ион „сталкивается“ с пульсациями много меньшими, чем r_i , и поэтому слабо отклоняется. Поэтому для f_{0i} должно быть справедливо уравнение Фоккера—Планка и изотропизация начального распределения по порядку величины может быть описана выражением

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial t} \sim D \frac{\partial^2 f_{0i}}{\partial p^2}, \quad (20)$$

где коэффициент диффузии в пространстве импульсов

$$D \sim \frac{e^2 H_a^2}{c^2 k_0^2 \tau_H}, \quad (21)$$

$\tau_H \sim \frac{1}{k_0 \sigma_i}$ — характерное время пролета частицы в поле возмущения. D может быть получен как из соображений размерности, так и из более строгих соображений. Усредненное кинетическое уравнение ионов по мелкомасштабным пространственным пульсациям квазистационарного нелинейного режима, получим для интересующего нас выражения, содержащего только члены, связанные с магнитным полем (именно они ответственны за изотропизацию)

$$St_H = 2 \frac{e^2}{c^2} \sum_k |H_k|^2 \left(v_x \frac{\partial}{\partial p_z} - v_z \frac{\partial}{\partial p_x} \right) \left[\delta(\mathbf{kv}) \left(v_x \frac{\partial}{\partial p_z} - v_z \frac{\partial}{\partial p_x} \right) f_0 \right]. \quad (22)$$

Выражение (22) записано для случая $\omega \ll \mathbf{kv}$, что справедливо при слабой анизотропии или если $m_e \tilde{\gamma}_e < m_i \tilde{\gamma}_i$ ($H_a = H_y$). Из (22) легко получить выражение для D .

В [7] получено общее выражение для k_{0i}

$$k_{0i}^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{c^2} \int \frac{d\mathbf{p}_x}{m_i \gamma_i p_z} \left(p_x \frac{\partial f_0}{\partial p_z} - p_z \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \right). \quad (23)$$

Выбирая в качестве $f_{0i} \sim \exp \left\{ -\sigma_i \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_i p_z}{\sigma_i m c} \right)^2} \right] \right\}$ и опуская простые, но громоздкие промежуточные выкладки, приведем выражение для k_{0i} в случае сильной анизотропии, а также выражение для \bar{p}_{xi}^2

$$k_{0i}^2 = \frac{\omega_{0i}^2}{c^2} \frac{\Delta p}{p_{\parallel}} \frac{K_0(\sigma_i) K_2(\sigma_i)}{K_1^2(\sigma_i)} \frac{\sigma_i}{1 + \sigma_i}, \quad (24)$$

$$\bar{p}_{xi}^2 = \frac{(m_i c)^2 (\sigma_i^2 + 3\sigma_i + 3)}{(1 + \sigma_i) \sigma_i^2}. \quad (25)$$

Здесь $K_{\mu}(\sigma)$ — функция Макдональда соответствующего индекса. Выражение для \bar{p}_{te} в случае максвелловского распределения электронов имеет вид

$$\bar{p}_{te} = \frac{\pi}{4} \frac{e^{-\sigma_e} m_e c}{K_2(\sigma_e)} \left\{ \frac{2\sigma_e^2 + 6\sigma_e + 6}{\sigma_e^3} \right\} \quad (26)$$

$(\sigma_e = \frac{m_e c^2}{\Theta_e}; \Theta_e — \text{температура электронов}).$

Используя (21), (24)–(26), легко получить выражение для толщины сильной ударной волны Δ , которое мы здесь приведем для двух предельных случаев

$$\Delta \sim \frac{m_i}{m_e} \frac{c}{\omega_{0i}} \sqrt{\frac{p_{\parallel i}}{\Delta p}} \sqrt{\frac{p_{\perp i}}{p_{\parallel i}}} \frac{1}{\tilde{\gamma}_e^2} \left(\frac{p_{\perp i}}{n m_e c^2} \right); (\gamma_i \sim 1, \gamma_e \gg 1), \quad (27)$$

$$\Delta \sim \frac{c}{\omega_{0i}} \sqrt{\frac{p_{\parallel i}}{\Delta p}} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i K_0(\sigma_i)}} \left(\frac{p_{\perp i}}{p_e} \right)^2; (\gamma_e \gg 1; \gamma_i \gg 1), \quad (28)$$

$$(p_{\perp i} > p_{\parallel i}).$$

Из (27) видим, что с ростом γ_e Δ уменьшается, что облегчает возможность экспериментальной проверки ударных волн.

Оценим отношение времени изотропизации $(T_i \sim \frac{\bar{p}_x^2}{D})$ и $\tau_{изл.}$ — времени излучения электронов в магнитном поле H_a для ультрарелятивистского случая

$$\frac{\tau_{изл.}}{T_i} \sim \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{3/2} \frac{\sigma_e \sigma_i^{3/2} \sqrt{\ln \sigma_i}}{r_0^{3/2} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\Delta p}{p_{||}}}} \quad \left(r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \right). \quad (29)$$

Мы видим, что $\tau_{изл.} \ll T_i$ для достаточно плотной ультрарелятивистской среды. Отсюда вытекает, что если даже в начале процесса $\Theta_e \sim \Theta_i$ (т. е. $r_e \sim r_i$), то за счет излучения r_e уменьшается, что оправдывает применимость уравнения Фоккера—Планка для ионов в ультрарелятивистском случае.

Сказанное здесь, разумеется, будет справедливым, если излучение не поглощается на расстояниях порядка толщины ударной волны. Поскольку в данном случае

$$\frac{|\Omega_{He}|}{\omega_{0e}} \sim \sqrt{\frac{\Theta_i}{m_e c^2}} \gg 1, \quad (30)$$

то для $\tau_{p/e}$ — времени поглощения фотонов на электронах — имеем^[9]

$$\tau_{p/e} \sim \frac{|\Omega_{He}|}{\omega_{0e}^2} \gamma_e^2. \quad (31)$$

Отсюда отношение

$$\frac{T_i}{\tau_{p/e}} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{p_{\perp i}}{n \Theta_e} \right)^2 \sqrt{\frac{m_e c^2}{\Theta_i}} \frac{\sqrt{\gamma_i}}{\gamma_e^2}. \quad (32)$$

Из (32) вытекает, что в интересующем нас диапазоне энергий $T_i \ll \tau_{p/e}$, т. е. излучение не поглощается внутри ударной волны.

Представляет интерес теперь оценить влияние слабых вмороженных полей ($H_0^2 \ll n \Theta_i$) на характер изотропизации функции распределения. Проиллюстрируем это на примере, когда электроны ультрарелятивистские, а ионы нерелятивистские с анизотропным распределением по скоростям. Выясним прежде всего характер развития неустойчивости в области длинных волн, не меньше ларморовских радиусов частиц в поле H_0 , для случая $\Theta_{||i} > \Theta_{\perp i}$. Используя (8), найдем значение k , соответствующее максимальному инкременту

$$k_g^2 = \frac{1}{r_{H_i}^2} \frac{H_0^2}{8\pi n \Theta_{||i}} \left[\frac{4\pi \Delta P}{H_0^2} - 1 \right] \left(\frac{\Theta_e}{\Theta_i} \ll \frac{m_i}{\gamma_e m_e} \right), \quad (33a)$$

$$k_g^2 = \frac{1}{r_{H_e}^2} \frac{m_i H_0^2}{\gamma_e m_e 8\pi n \Theta_e} \left[\frac{4\pi \Delta P}{H_0^2} - 1 \right] \left(\frac{\Theta_e}{\Theta_i} \gg \frac{m_i}{\gamma_e m_e} \right). \quad (33b)$$

Оценивая амплитуду магнитного поля длинноволновых возмущений из кинетического уравнения для ионов, а время изотропизации из (21), получим, что в случае (33a) время изотропизации в данной волновой области будет $T_{igp} \sim \frac{1}{\Omega_H}$ (если $\Delta \Theta_i \sim \Theta_{||i}$), а для случая (33b)

$$T_{igp} \sim \frac{1}{\Omega_{H_i}} / \frac{m_i \Theta_{\perp i}}{m_e \gamma_e \Theta_e} \sqrt{\frac{\Delta \Theta_i}{\Theta_{\perp i}}}. \quad (34)$$

Если

$$H_0 \ll \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \sqrt{n m_e c^2 \gamma_e} \sqrt{\gamma_e} \sqrt{\frac{\Delta \Theta_i}{\Theta_{||i}}} , \quad (35)$$

то, как нетрудно видеть, существует область волновых чисел, где влияние вмороженного поля несущественно, а развитие неустойчивости при $m_i \Theta_i \gg m_e \gamma_e \Theta_e$ определяется электронами [см. (13), где нужно теперь k_{oe} заменить на k_{oi}].

Сравнивая время изотропизации в этой коротковолновой области с T_{typ} в случае (33а), видим, что если

$$H_0 \gg \frac{\gamma_e m_e \Theta_e}{m_i \Theta_{||i}} \sqrt{n \Delta \Theta_i} , \quad (36)$$

то на характер изотропизации основное влияние оказывают длинные волны: толщина ударных волн тогда по порядку величины совпадает с ионным ларморовским радиусом в поле H_0 (если $\Delta \Theta \sim \Theta_{||i}$). Из (36) видим, что с ростом энергии электронов влияние вмороженных полей на развитие нелинейного режима падает.

В случае (33б) длинные волны не оказывают влияния на развитие нелинейного режима в слабых магнитных полях ($H_0^2 \ll n \Delta \Theta_i$). Сравним еще время рассеяния нерелятивистских ионов за счет парных соударений $\tau_D^{i/i}$ с временем изотропизации в случае, когда электроны ультра-релятивистские, а $H_0 = 0$

$$\frac{\tau_D^{i/i}}{T_i} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \sqrt{\frac{\Delta \Theta}{\Theta_{\perp i}}} \frac{\gamma_e^2}{\sqrt{n} r_0^{3/2} L} . \quad (37)$$

Из (37) видим, что во многих практически интересных случаях влияние парных соударений на характер протекающих процессов в плазме мало, причем тем меньше, чем больше энергия электронов.

Выражаю благодарность профессору Д. А. Франк-Каменецкому и Р. З. Сагдееву за ценные советы.

Литература

- [1] Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. Сб. „Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций“, III, 268. Изд. АН СССР, М., 1958.
- [2] А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев. Сб. „Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций“, III, 278. Изд. АН СССР, М., 1958.
- [3] S. Chandrasekhar, A. Konfmann, K. Watson. Proc. Roy. Soc., A245, 435, 1958.
- [4] Г. М. Заславский, С. С. Моисеев. ПМТФ, 6, 24, 1961.
- [5] И. М. Халатников. ЖЭТФ, 27, 529, 1954.
- [6] Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Докл. на III рижской конференции по магнитной гидродинамике, Рига, 1962.
- [7] Г. М. Заславский, С. С. Моисеев. ЖЭТФ, 42, 1962.
- [8] С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. Докл. на Всесоюзной конференции по магнитной гидродинамике. М., 1962.
- [9] А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяттар, С. В. Пелетинский. ЖЭТФ, 42, 552, 1962.

Поступило в Редакцию
6 августа 1962 г.