

## ТУРБУЛЕНТНАЯ ТЕОРИЯ СЛАБОНЕРАВНОВЕСНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ И СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН

А. А. Галеев, В. И. Карпман

Получено кинетическое уравнение для взаимодействующих волн в слабонервновесной разреженной плазме. Обсуждается соотношение между ламинарной и турбулентной теориями ударных волн без столкновений в сильном магнитном поле. С помощью кинетического уравнения сделана оценка турбулентной ширины ударных волн.

### 1. Введение

Как известно, в разреженной плазме, состояние которой даже мало отличается от равновесного, возбуждаются, как правило, коллективные колебания, существенно влияющие на протекание релаксационных процессов в ней. Начальную стадию развития этих колебаний можно рассматривать как возникновение неустойчивостей на фоне исходного стационарного состояния, а соответствующие инкременты роста определяются из линейной теории устойчивости [1].

Возникающие вследствие неустойчивости волны не могут, разумеется, расти неограниченно. Процесс их установления определяется нелинейными эффектами взаимодействия между колебаниями. При этом существенно, что в плазме дисперсионные свойства отдельных колебаний вполне определяются линейаризованными уравнениями движения, а нелинейные эффекты могут быть описаны в терминах слабого (при малых амплитудах) взаимодействия между волнами. Благодаря этому можно говорить о слабо неидеальном «газе» волн, аналогичном фоновому газу в квантовой теории твердого тела [2]. Как и в теории фононов, можно считать, что слабое взаимодействие между отдельными волнами (при достаточном их числе) приводит к быстрой хаотизации фаз отдельных колебаний и к медленному изменению их амплитуд (см., например, [3]), что позволяет написать кинетическое уравнение для волн.

В настоящей работе предлагается общий метод вывода такого кинетического уравнения из гидродинамических уравнений движения плазмы в предположении, что элементарным актом взаимодействия низшего порядка является взаимодействие трех волн. Этот метод может быть в принципе применен при различных предположениях относительно уравнений движения плазмы.

В качестве конкретного примера (а также в связи с некоторыми применениями к теории ударных волн в разреженной плазме в сильном магнитном поле) за основные уравнения движения принимаются уравнения магнитной гидродинамики разреженной плазмы в сильном магнитном поле ( $H^2/8\pi \gg p$ ) с учетом дисперсионных эффектов, возникающих при частотах, сравнимых и больших ионной ларморовской частоты  $\omega_H = eH/mc$ .

Эти уравнения имеют вид (см., например, [4, 5])

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = (4\pi\rho)^{-1} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (1.1)$$

$$\partial \mathbf{H} / \partial t = \text{rot} [\mathbf{V} \mathbf{H}] - (m_i c / 4\pi e) \text{rot } \rho^{-1} [\text{rot } \mathbf{H}, \mathbf{H}], \quad (1.2)$$

$$\partial \rho / \partial t + \text{div} (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (1.3)$$

Система (1.1) — (1.3) отличается от уравнений обычной магнитной гидродинамики последним членом в уравнении (1.2), который становится малым при  $\omega \ll \omega_H$ . Этот член описывает характерные дисперсионные эффекты при  $\omega \gg \omega_H$  и поэтому систему (1.1) — (1.3) естественно называть «уравнениями магнитной гидродинамики с ионной дисперсией».

Полученное в разделе 2 настоящей работы кинетическое уравнение оказывается совпадающим по структуре с кинетическим уравнением, предложенным из феноменологических соображений Камаком и др. [6], однако в [6] не содержится ни явного вида, ни способа получения матричных элементов.

В разделах 4, 5 рассмотрены некоторые приложения кинетического уравнения взаимодействующих волн к теории структуры фронта ударных волн в разреженной плазме в сильном магнитном поле. В работах Сагдеева [7] в рамках ламинарной теории было показано, что фронт ударной волны в достаточно разреженной плазме, распространяющейся перпендикулярно и при небольших отклонениях от перпендикулярности к магнитному полю, обладает осцилляторной структурой<sup>1)</sup>. Этот результат был распространен в [8] на случай произвольных углов между фронтом и магнитным полем. Возникает вопрос об устойчивости этой осцилляторной структуры по отношению к распаду на две волны, сумма частот и волновых векторов которых равна соответственно частоте и волновому вектору исходной волны (подобные «распадные» неустойчивости периодических колебаний рассматривались ранее [10]).

Матричные элементы, фигурирующие в кинетическом уравнении, оказываются тесно связанными с инкрементами упомянутой выше распадной неустойчивости, что позволяет легко показать неустойчивость осцилляторной структуры по отношению к распадам на другие колебания (см. также [5]) и получить величину соответствующих инкрементов.

С помощью кинетического уравнения для взаимодействующих волн оценивается характер устанавливающейся из-за распада турбулентности и делаются оценки ширины ударной волны.

Отметим, наконец, что общие свойства матричных элементов позволяют существенно ограничить класс волн, обладающих неустойчивостью по отношению к распадам. Соответствующие результаты содержатся в разделе 3.

### 2. Кинетическое уравнение для волн

Система уравнений (1.1) — (1.3) для не слишком больших отклонений величин от равновесных может быть записана в виде

$$i\partial\varphi/\partial t + \hat{H}_0\varphi + \hat{H}_1\{\varphi, \varphi\} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  — вектор состояния, представляемый в виде столбца из компонент скорости  $\mathbf{v}$ , возмущения магнитного поля  $\mathbf{h}$  и плотности  $\rho$ ;  $\hat{H}_0$  — некоторый линейный оператор с действительными собственными значениями;  $\hat{H}_1$  — билинейный дифференциальный оператор.  $\hat{H}_0$  можно представить в виде матрицы, элементами которой являются дифференциальные операторы,  $\hat{H}_1\{\varphi, \varphi\}$  — в виде вектора-столбца.

Для волн малой амплитуды при пренебрежении нелинейным членом получаем уравнение

$$i\partial\varphi/\partial t + \hat{H}_0\varphi = 0. \quad (2.2)$$

<sup>1)</sup> Ламинарная теория ударных волн в плазме без столкновений рассматривалась также в работах ряда авторов [8].



Это уравнение имеет собственные решения вида  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r})}$ , где частота  $\omega_{\mathbf{k}}$  действительна в силу свойств оператора  $\hat{H}_0$ . Вектор  $\varphi$  можно разложить по собственным векторам оператора  $\hat{H}_0$ :

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} (C_{\mathbf{k}}^{(0)} \varphi_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + C_{-\mathbf{k}}^{(0)} \varphi_{-\mathbf{k}} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r})});$$

$$C_{-\mathbf{k}}^{(0)} = C_{\mathbf{k}}^{(0)*}, \quad \varphi_{-\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^*, \quad (2.3)$$

где  $C_{\mathbf{k}}^{(0)}$ ,  $C_{-\mathbf{k}}^{(0)}$  — комплексные амплитуды гармоник с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ ,  $-\mathbf{k}$  и частотами  $\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $-\omega_{\mathbf{k}}$  при отсутствии взаимодействия между отдельными волнами.

При получении кинетического уравнения основную роль играет следующий постулат: фазы амплитуд различных волн  $\alpha_{\mathbf{k}} = \arg C_{\mathbf{k}}^{(0)}$  распределены совершенно хаотически. Это утверждение нужно понимать следующим образом. Мы предполагаем, что волны (2.3) появляются в результате развития какой-либо неустойчивости (в дальнейшем рассматривается конкретный случай так называемой распадной неустойчивости, подробно исследованной ранее Ораевским и Сагдеевым [10]). В течение некоторого времени после своего возникновения из «источника неустойчивости» фазы отдельных  $C_{\mathbf{k}}^{(0)}$ , разумеется, коррелированы. Нелинейное взаимодействие волн, описываемое вторым членом в (2.1), приводит, однако, к ослаблению корреляции. Это ослабление корреляции происходит тем быстрее, чем больше гармоник появилось в результате развития неустойчивости<sup>2)</sup>.

Постулат хаотичности фаз означает, что корреляция между фазами  $C_{\mathbf{k}}$  полностью исчезает за время, малое по сравнению с временем изменения  $|C_{\mathbf{k}}|^2$  (т. е. энергий отдельных волн), благодаря нелинейному взаимодействию между гармониками. Благодаря этому при выводе кинетического уравнения мы можем применить усреднение по фазам (в смысле усреднения по ансамблю совокупностей фаз различных  $C_{\mathbf{k}}$ ):

$$\overline{C_{\mathbf{k}}^{(0)} C_{\mathbf{k}'}^{(0)}} = |C_{\mathbf{k}}^{(0)}|^2 \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}. \quad (2.4)$$

Мы разделяем плазму на медленно меняющийся фон и быстро осциллирующую часть, представляющую собой распространяющиеся волны в плазме. Плотность энергии этих волн в плазме есть

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}, \quad E_{\mathbf{k}} = |C_{\mathbf{k}}|^2 \{ \rho_0 |\mathbf{v}_{\mathbf{k}}|^2/2 + |\mathbf{h}_{\mathbf{k}}|^2/8\pi \}. \quad (2.5)$$

Нормируя вектор состояния  $\varphi_{\mathbf{k}}$  согласно условию

$$\rho_0 |\mathbf{v}_{\mathbf{k}}|^2/2 + |\mathbf{h}_{\mathbf{k}}|^2/8\pi = \omega_{\mathbf{k}}, \quad (2.6)$$

мы можем интерпретировать квадрат модуля амплитуды волны  $n_{\mathbf{k}} = |C_{\mathbf{k}}|^2$  как число квазичастиц с энергией  $\omega_{\mathbf{k}}$ .

Ясно, что сохраняется энергия и импульс фона и квазичастиц вместе взятых. Кроме того, как можно показать в квазиклассическом приближении, когда фон меняется медленно, сохраняется адиабатический инвариант  $n_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}$  (энергия осциллятора, деленная на частоту) для каждой ква-

<sup>2)</sup> Но интенсивности этих гармоник, разумеется, должны быть достаточно малы для того, чтобы можно было применять теорию возмущений.

зичастицы [6], т. е. полная производная

$$D(E_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}})/Dt \equiv Dn_{\mathbf{k}}/Dt = 0. \quad (2.7)$$

Изменение числа квазичастиц  $n_{\mathbf{k}}$  в данном состоянии из-за столкновений их между собой описывается нелинейным членом  $H_1\{\varphi, \varphi\}$  в уравнении (2.1). Если этот нелинейный член мал, то можно воспользоваться теорией возмущений. В разложении (2.3) теперь следует добавить к вектору состояния ортогональную составляющую  $\varphi'_{\mathbf{k}}$ , возникающую из-за нелинейного взаимодействия.

Как будет видно из дальнейшего (см. (2.9)),  $\varphi'_{\mathbf{k}}$  является малой первого порядка, если амплитуда  $C_{\mathbf{k}}$  — малая первого порядка. Таким образом, решение, учитывающее взаимодействие между гармониками, ищется в виде

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} \{ C_{\mathbf{k}}(t) (\varphi_{\mathbf{k}} + \varphi'_{\mathbf{k}}) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r})} + C_{-\mathbf{k}}(t) (\varphi_{-\mathbf{k}} + \varphi'_{-\mathbf{k}}) e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в уравнение (2.1), получаем с точностью до малых второго порядка

$$-[\omega_{\mathbf{k}} + \hat{H}_0(\mathbf{k})] C_{\mathbf{k}} \varphi'_{\mathbf{k}} = i \frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} \varphi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}''} H_1\{\varphi_{\mathbf{k}'}, \varphi_{\mathbf{k}''}\} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''}-\omega_{\mathbf{k}})t}. \quad (2.9)$$

Условие разрешимости системы (2.9) для определения  $\varphi'_{\mathbf{k}}$  является ортогональность правой части к решению сопряженного уравнения

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}} + H_0(\mathbf{k})) = 0, \quad (2.10)$$

где  $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$  — вектор-строка. Умножая (2.9) скалярно на  $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$  слева, получаем

$$\left( \tilde{\psi}_{\mathbf{k}}, \left\{ i \frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} \varphi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}''} H_1\{\varphi_{\mathbf{k}'}, \varphi_{\mathbf{k}''}\} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''}-\omega_{\mathbf{k}})t} \right\} \right) = 0.$$

Переписывая это в виде

$$\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} C_{\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}''} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''}-\omega_{\mathbf{k}})t}, \quad (2.11)$$

где

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = -(\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}, H_1\{\varphi_{\mathbf{k}'}, \varphi_{\mathbf{k}''}\}) / (\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}}),$$

получаем динамическое уравнение (2.11) для  $C_{\mathbf{k}}(t)$ . Собственные векторы  $\varphi_{\mathbf{k}}$  оператора  $\hat{H}_0$ , явный вид системы (2.9) для конкретных уравнений магнитной гидродинамики с «ионной дисперсией» и решение  $\tilde{\psi}_{\mathbf{k}}$  однородного сопряженного уравнения даны в Приложении 1. Используя формулы Приложения 1, из (2.11) получаем явный вид матричного элемента

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}{H_0^2/8\pi}} \left[ 8 \left( \frac{B}{A} + 1 \right) \left( \frac{B'}{A'} + i \right) \left( \frac{B''}{A''} + 1 \right) \right]^{-1/2} \frac{c_A}{|\omega|} \left\{ -\frac{k_x c_A^2 k'_y k''_y}{\omega_H^2 A' A''} + \right.$$

$$\left. + k_x \left[ 1 + B \frac{\omega' \omega''}{k_y c_A^2} \left( \frac{k''_y}{k'^2} + \frac{k'_y}{k''^2} \right) \right] + k_x \left[ (1-B) B' \frac{\omega''}{\omega'} - B' B'' \frac{\omega}{\omega'} + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega\omega'}{k'^2 c_A^2} + \frac{\omega\omega''}{k''^2 c_A^2} B' \frac{k'_y}{k_y} \Big] + k_x \left[ (1-B) B'' \frac{\omega'}{\omega''} - B' B'' \frac{\omega}{\omega''} + \right. \\
& + \frac{\omega\omega''}{k''^2 c_A^2} + \frac{\omega\omega'}{k'^2 c_A^2} B'' \frac{k'_y}{k_y} \Big] + \frac{B k'_y}{A'} \left[ \frac{k_x}{k_y} + \frac{k'_x k'_y c_A^2}{\omega\omega'} - \frac{k''_x k''_y c_A^2}{\omega\omega''} - \right. \\
& - \left. \left( \frac{k'_y}{k_y} \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega} \right) \frac{[k'k'']_z}{k'^2} \right] + \frac{B k''_y}{A''} \left[ \frac{k_x}{k_y} + \frac{k''_x k''_y c_A^2}{\omega\omega''} - \frac{k'_x k'_y c_A^2}{\omega\omega'} - \right. \\
& \left. - \left( \frac{k''_y}{k_y} \frac{\omega'}{\omega''} + \frac{\omega'}{\omega} \right) \frac{[k''k']_z}{k''^2} \right] \Big\}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

где  $H_0$  — напряженность постоянного магнитного поля, направленного по оси  $y$ ,  $A = 1 - k_y^2 c_A^2 / \omega^2$ ,  $B = \omega^2 / k^2 c_A^2 - 1$ , и соответствующие величины с одним и двумя штрихами отличаются заменой  $\omega, k$  на  $\omega', k'$  и  $\omega'', k''$ .

Для определения  $C_k(t)$  в момент времени  $t$  воспользуемся теорией возмущений. Из (2.11) получим

$$\begin{aligned}
C_k(t) &= C_k^{(0)} + C_k^{(1)} + C_k^{(2)} + \dots, \\
C_k^{(1)} &= -i \sum_{k'k''} C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} \int_0^t V_{kk'k''}(t') dt', \quad (2.13) \\
C_k^{(2)} &= - \sum_{k'k''q'q''} C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{kk'k''}(t') V_{k''q'q''}(t'') - \\
& - \sum_{k'k''q'q''} C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{kk'k''}(t') V_{k'q'q''}(t'');
\end{aligned}$$

$V_{kk'k''}(t) = V_{kk'k''} \exp\{-i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t\}$ ,  $V_{kk'k''} \neq 0$  при  $k = k' + k''$ .

$C_k^{(0)}$  не зависит от времени и отвечает решению при отсутствии взаимодействия между гармониками. Изменение числа квазичастиц  $|C_k(t)|^2 - |C_k^{(0)}|^2$ , усредненное по фазам амплитуд  $C_k^{(0)}$  с помощью (2.4), есть с точностью до членов второго порядка

$$\overline{|C_k(t)|^2 - |C_k^{(0)}|^2} = \overline{|C_k^{(1)}|^2} + \overline{(C_k^{(0)} C_k^{(2)*} + C_k^{(0)*} C_k^{(2)})}. \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) в (2.14), усредняя по фазам  $C_k^{(0)}$  и используя соотношения

$$\left| \int_0^t V_{kk'k''}(t') dt' \right|^2 \rightarrow t 2\pi |V_{kk'k''}|^2 \delta(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k); \quad (2.15a)$$

$$V_{kk'k''} = V_{kk''k'}, \quad V_{kk'k''} = -V_{k_-, k'_-, k''_-}^*, \quad (2.15b)$$

$$V_{kk'k''} = V_{k'', k'_-, k'}^*, \quad V_{kk'k''} = -V_{k_-, k'_-, k}^*,$$

((2.15 а, б) можно проверить, используя (2.12); существенно, что (2.15б) выполняется при условии  $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$ ;  $\omega_{k'}, \omega_{k''} > 0$ ), получаем измене-

ние числа квазичастиц в единицу времени из-за столкновений:

$$\left( \frac{\partial n_k}{\partial t} \right)_S = 4\pi \sum_{k'k''} |V_{kk'k''}|^2 \{ (n_{k'} n_{k''} - n_k n_{k'}) \delta(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k) \times \\
\times \delta_{k'+k'', k} + 2(n_{k'} n_{k''} + n_k n_{k''} - n_k n_{k'}) \delta(\omega_{k''} - \omega_{k'} - \omega_k) \delta_{k'', k'+k} \}. \quad (2.16)$$

В этом уравнении суммирование идет только по волнам с положительными частотами  $\omega_k, \omega_{k'}, \omega_{k''} > 0$ . Из него вытекает сохранение энергии  $\omega_k$  и квазиимпульса  $k$  при «столкновениях» волн. Заметим, что уравнение (2.16) совпадает по форме с кинетическим уравнением, предложенным из феноменологических соображений в [6], однако в [6] не содержится ни явного вида, ни способа получения матричных элементов.

Интересно отметить некоторую аналогию между (2.16) и кинетическим уравнением для фононов в твердом теле [2]. Если в последнем положить  $n_k \gg 1$ , то оно (с точностью до вида матричных элементов) переходит в (2.16). Отметим также, что  $(\partial n_k / \partial t)_S$  обращается в нуль при

$$n_k = T / \omega_k, \quad (2.17)$$

где  $T$  — «эффективная температура» газа волн (в единицах энергии). Выражение (2.17) является не чем иным, как распределением Релея—Джинса.

### 3. Критерий распадной неустойчивости

В рамках формализма, развитого в предыдущем разделе, можно очень просто сформулировать критерий распадной неустойчивости, рассматривавшейся ранее Ораевским и Сагдеевым [10]. А именно, пусть по плазме распространяется волна с частотой  $\omega_k$  и волновым вектором  $k$ . Тогда возмущения в виде двух волн, частоты  $\omega_{k'}, \omega_{k''} > 0$  и волновые векторы  $k', k''$  которых удовлетворяют условиям

$$k' = k - k'', \quad \omega_{k'} = \omega_k - \omega_{k''}, \quad (3.1)$$

нарастают во времени.

Действительно, из (2.11) и (2.15) имеем систему двух уравнений для амплитуд  $C_{k'}, C_{k''}$ :

$$\partial C_{k'} / \partial t = -i V_{k'kk''} C_k^{(0)} C_{k''},$$

$$\partial C_{k''} / \partial t = -i V_{k''k_-, k} C_{k_-}^{(0)} C_{k'} \equiv i V_{k'kk''}^* C_k^{(0)} C_{k'}.$$

Так как амплитуды возмущений  $C_{k'}, C_{k''}$  малы, то амплитуду волны  $C_k^{(0)}$  можно считать постоянной ( $\partial C_k^{(0)} / \partial t \sim C_{k'} C_{k''} \sim 0$ ). Решение системы ищем в виде  $e^{vt}$  и получаем инкремент неустойчивости

$$v^2 = |V_{k'kk''}|^2 |C_k^{(0)}|^2. \quad (3.2)$$

Если возмущения таковы, что  $\omega_{k'} > \omega_{k''} > 0$ , и выполняются распадные условия

$$k' = k + k'', \quad \omega_{k'} = \omega_k + \omega_{k''}, \quad (3.3)$$

то имеем систему уравнений для определения амплитуд малых возмущений:

$$\partial C_{k'} / \partial t = -i V_{k'kk''} C_k^{(0)} C_{k''},$$

$$\partial C_{k''} / \partial t = -i V_{k''k_-, k} C_{k_-}^{(0)} C_{k'} \equiv -i V_{k'kk''}^* C_k^{(0)} C_{k'}.$$



Для решения вида  $e^{vt}$  получаем

$$v^2 = - |V_{k'k''}|^2 |C_k^{(0)}|^2 < 0, \quad (3.4)$$

т. е. волна устойчива.

Итак, при «распадной» неустойчивости могут появляться лишь волны с частотой, меньшей чем исходная.

#### 4. Распадная неустойчивость осцилляторной структуры ударных волн

Применим результаты предыдущего раздела к вопросу устойчивости осцилляторной структуры слабых ударных волн, распространяющихся в сильном магнитном поле. Если ударная волна распространяется строго поперек магнитного поля, то ее осцилляторную структуру можно представить себе как волну с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$  [7], причем

$$\omega_0 = k_0 c_A M, \quad (4.1)$$

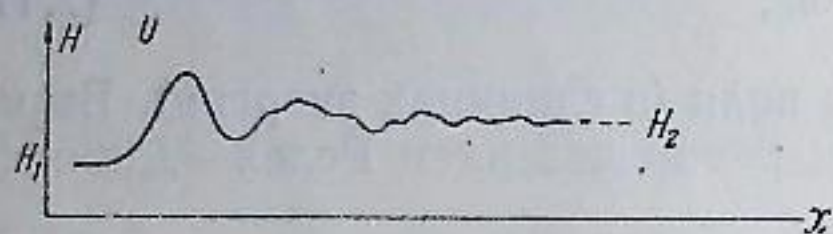


Рис. 1. Качественный профиль изменения магнитного поля в ударной волне, распространяющейся перпендикулярно  $H$ : а — ламинарный случай, б — турбулентный случай

где  $M$  — число Маха. График ламинарного профиля изображен на рис. 1, а. Стрелка указывает направление движения волны.

Если  $(M - 1) \gg m_e/m_i$ , то частота волны  $\omega_0$  значительно больше ионной ларморовской частоты  $\omega_H$ . В этом случае условия (3.1) для возмущения в виде двух «быстрых» магнитоакустических волн, одна из которых распространяется почти поперек магнитного поля (см. (П.3)),

$$c_A k' (1 + k_y'^2 c_A^2 / \omega_H^2) = k_0 c_A M - \omega_+ (k''), \quad (4.2)$$

$$k_x' = k_0 - k_x'', \quad k_y' = -k_y'',$$

можно выполнить только при  $k_y' c_A \lesssim \sqrt{M - 1} \omega_H \ll \omega_H$ . Матричный элемент  $V_{kk'k''}$  при этом условии имеет вид

$$V_{kk'k''} \approx \sqrt{\frac{\omega \omega' \omega''}{H_0^2 / 8\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k_x''}{k''}\right). \quad (4.3)$$

Кроме того, условия (3.1) можно выполнить для возмущения в виде «быстрой» ( $\omega'' = \omega_+ (k'')$ ) и «медленной» ( $\omega' = \omega_- (k')$ ) волн. Выражение для матричного элемента  $V_{kk'k''}$  легко получить из (2.12) в двух предельных случаях:

$$V_{kk'k''} \approx \sqrt{\frac{\omega \omega' \omega''}{H_0^2 / 8\pi}} \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{\omega}{\omega_H} \frac{k_y'' c_A}{\omega_H} \quad \text{при } k_y'' c_A \gg \omega_H, \quad (4.4a)$$

$$V_{kk'k''} \approx - \sqrt{\frac{\omega \omega' \omega''}{H_0^2 / 8\pi}} \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{k_x' c_A}{\omega_H} \quad \text{при } k_y'' c_A \ll \omega_H. \quad (4.4b)$$

Однако в случае (4.4a) частота медленной волны очень близка к ионной ларморовской частоте  $\omega' \approx \omega_H$  и при учете даже очень малого теплового разброса скоростей ионов эта волна сильно затухает [11]. Поэтому такие волны практически не существуют и распада (4.4a) не происходит.

При малых числах Маха инкременты распадных неустойчивостей (4.2) и (4.4b) имеют один и тот же порядок:

$$v_{1,2} \approx (M - 1) \omega_0. \quad (4.5)$$

С ростом числа Маха ( $M - 1 > \sqrt[3]{m_e/m_i}$ ) инкремент (4.5) становится одного порядка с частотой  $\omega' = k_y' c_A$  альфвеновской волны в распаде (4.4b), даже, согласно (4.5), формально может превышать ее. При этом нарушается условие применимости теории возмущений ( $v_2 \ll \omega', \omega''$ ). Разумно предположить, однако, что на самом деле величина инкремента при таких больших числах Маха не превышает частоты возмущения, т. е.  $v_2 \leq \omega'$ . Действительно, рассматриваемое взаимодействие носит резонансный характер (см. (3.1)), а понятие резонанса теряет смысл, если  $v_2 = \text{Im } \omega' > \text{Re } \omega'$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать не очень малые числа Маха ( $M - 1 > \sqrt[3]{m_e/m_i}$ , так что можно считать  $v_1 > v_2$  и, следовательно, осцилляторная структура ударной волны распадается, согласно (4.2).

Если же ударная волна распространяется под углом к магнитному полю ( $\theta \gg \sqrt{m_e/m_i}$ ) так, что существенна дисперсия ионов, то ее осцилляторную структуру можно представить себе как волну с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $k_0$  [9] (график ламинарного профиля см. на рис. 2, а) равными

$$\omega_0 = k_0 c_A M, \quad k_0 \approx \sqrt{(1 - M^{-2})} \text{tg}^{-1} \theta \omega_H / c_A. \quad (4.6)$$

Условиям (3.1) в этом случае удовлетворяют частоты  $\omega' = k_y' c_A$ ,  $\omega'' = -k_y'' c_A$  и волновые векторы  $k', k''$  возмущения в виде двух альфвеновских волн. Матричный элемент, описывающий взаимодействие этих волн, есть

$$V_{kk'k''} = \sqrt{\frac{\omega \omega' \omega''}{H_0^2 / 8\pi}} \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{k_x}{k}, \quad (4.7)$$

а инкремент неустойчивости по порядку величины равен

$$v \approx 8^{-1/2} (M - 1)^{1/2} \omega_H \text{tg}^{-1} \theta \quad \text{при } \text{tg} \theta \sim 1. \quad (4.8)$$

#### 5. Влияние турбулентности на структуру фронта ударной волны

В этом разделе мы разберем вопрос о том, насколько велико влияние турбулентных пульсаций, возникающих из-за распадной неустойчивости, на ламинарную осцилляторную структуру ударных волн. Прежде всего напишем из (2.7), (2.16) и (3.2) полное кинетическое уравнение для волн:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial n_k}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial n_k}{\partial k_x} \frac{dk_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial n_k}{\partial t}\right)_s + 2v n_k. \quad (5.1)$$

Здесь изменение числа волн в объеме мы приравняли изменению их числа при столкновениях и приращению из-за распадной неустойчивости. Производную определяем из условия, что частота в системе координат, движущейся с ударной волной  $\omega_k + k_x u$ , постоянна, а  $dx/dt = \partial \omega_k / \partial k_x + u$

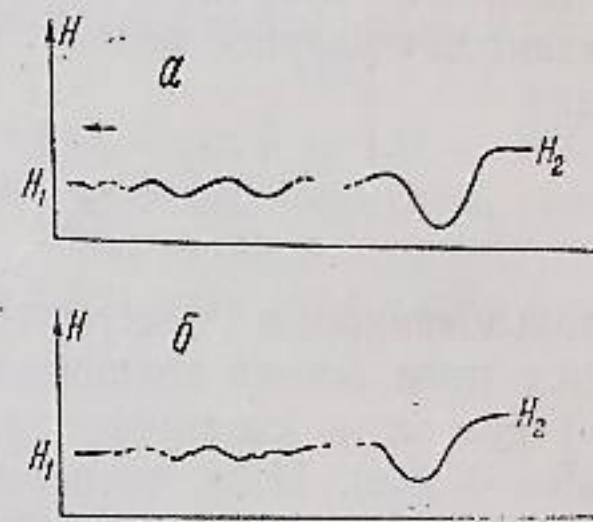


Рис. 2. Качественный профиль изменения магнитного поля в ударной волне, распространяющейся под углом к  $H$ ; а — ламинарный случай, б — турбулентный случай



групповая скорость волн в этой же системе координат ( $u$  — скорость потока плазмы относительно ударной волны).

В [6] использовано уравнение (5.1), но без источника волн, для построения структуры ударной волны в турбулентном режиме. В качестве источника энергии турбулентных пульсаций авторы пытаются использовать изменение частоты в системе покоя плазмы (а следовательно, и пропорциональной ей энергии) при прохождении их через поле потока с переменной скоростью. На самом деле, рассматривая «квазичастицы», движущиеся вместе с ударной волной, необходимо оперировать с энергией в системе координат, связанной с ударной волной. Но эта энергия, как можно показать из уравнения

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial n_k}{\partial x} \left( u + \frac{\partial \omega_k}{\partial k_x} \right) - k_x \frac{du}{dx} \frac{\partial n_k}{\partial k_x} = \left( \frac{\partial n_k}{\partial t} \right)_S, \quad (5.1a)$$

использованного в [6], естественно сохраняется, так как в медленно меняющемся поле потока сохраняется число квазичастиц  $n_k$  и их «энергия»  $\omega_k + k_x u$ , а в столкновениях выполняется закон сохранения энергии  $\sum n_k (\omega_k + k_x u)$ . Итак, источника энергии волн в такой схеме нет и возникает вопрос о его получении. Таким источником может служить распадная неустойчивость осцилляторной структуры ударной волны.

В качестве примера рассмотрим распространение слабой ударной волны поперек сильного магнитного поля ( $H^2/8\pi \gg \rho$ ). Как показано в предыдущем разделе, осцилляторная структура ударной волны неустойчива и распадается с инкрементом (4.5).

Рождающиеся при распаде низкочастотные волны (с частотами  $\sim k_{2y} c_A \sim \sqrt{M-1} \omega_H$ ) распространяются под большими углами к направлению распространения ударной волны и быстро сносятся потоком. Волны же с частотами  $\omega \gg \omega_H$  распространяются почти в одном направлении с ударной волной (их угловой разброс порядка  $k_{2y}/k_0 \sim \sqrt{m_e/m_i}$ ) и поэтому почти не сносятся. При столкновениях этих волн друг с другом рождаются низкочастотные волны, и благодаря сносу последних происходит диссипация энергии высокочастотной группы волн.

Из (4.3) мы можем оценить изменение числа этих волн из-за столкновений:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial N_k}{\partial t} \right)_S &= N_k / \tau, \quad \tau = 2/\pi \bar{\beta} \omega'', \\ \bar{\beta} &= \frac{1}{4} \sum_k N_k \omega_k / (H_0^2/8\pi), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $\tau$  — время столкновения волн,  $N_k$  — число высокочастотных волн с частотой  $\omega_k \sim \omega_0$ ,  $\bar{\beta}$  — отношение энергии волн к энергии магнитного поля.

Так как число рождающихся в единицу времени волн  $\nu N \sim (M-1)\omega_0 N$  не может быть скомпенсировано уходом их из-за столкновений  $N/\tau \sim \bar{\beta} \omega'' N$ , то разумно предположить, что вся энергия ламинарной ударной волны перекачивается в энергию волн в группе, т. е.

$$\bar{\beta} \cong (M-1)^2. \quad (5.3)$$

Приравнивая изменение числа волн  $N$  в объеме к уходу их (5.2) из-за столкновений, получаем оценку для распределения волн в пространстве (пользуемся системой координат, связанной с пакетом)

$$(\partial \omega_k / \partial k_x + u) \partial N_k / \partial x \cong (\partial N_k / \partial t)_S$$

или

$$(M-1) c_A \partial N / \partial x = 1/2 \pi \bar{\beta} \omega'' N,$$

т. е. изменение плотности можно аппроксимировать экспонентой

$$N \sim e^{x/L}, \quad L = 2c_A / \pi (M-1)^{1/2} \omega_H. \quad (5.4)$$

Соответствующий турбулентный профиль см. на рис. 1,б.

Если ударная волна распространяется под углом к магнитному полю  $H_0$ , большим, чем  $\sqrt{m_e/m_i}$ , то становится существенной инерция ионов. В этом случае она неустойчива и распадается на волны, бегущие под самыми различными углами к направлению распространения ударной волны (см. (4.8)). Поэтому большая часть энергии, перекачанной в результате распада в турбулентные пульсации, сносятся потоком.

Ввиду малости энергии турбулентных пульсаций  $\bar{\beta} \approx (M-1)^2 \ll 1$  время их столкновений очень велико и поэтому основным процессом, уменьшающим число пульсаций, является их снос. Приравнивая прирост пульсаций из-за распада и их снос, получаем распределение пульсаций в пространстве:

$$2\nu n_k = c_A \partial n_k / \partial x.$$

Из (4.8) записываем это соотношение в виде

$$(M-1)^{1/2} \omega_H / 4 \operatorname{tg} \theta = c_A \partial n_k / \partial x, \quad n_k \sim e^{x/L}, \quad (5.5)$$

где

$$L = 4c_A \operatorname{tg} \theta / (M-1)^{1/2} \omega_H, \quad \operatorname{tg} \theta \sim 1.$$

Итак, при учете распадной неустойчивости ударной волны длина осциллирующей структуры не успевает дорасти до своего значения  $c_A / \nu_{ei}$  ( $\nu_{ei}$  — частота электрон-ионных столкновений) в плазме без столкновений, так как по мере появления осцилляций в ударной волне начинает проявляться распад. Ширина ударной волны оказывается малочувствительной к направлению распространения волны и определяется характерными размерами, приведенными в (5.4) и (5.5). Частоты же турбулентных пульсаций по порядку величины совпадают с частотой осцилляций ламинарной структуры и существенно зависят от угла. Картина турбулентного профиля в этом случае изображена на рис. 2,б.

Авторы выражают искреннюю благодарность Р. З. Сагдееву за стимулирующие дискуссии и ценные советы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Система (2.1) для конкретных уравнений магнитной гидродинамики «ионной дисперсией» (1.1), (1.3) примет вид ( $A = \exp \{-i(\omega_k' + \omega_k'' - \omega_k) t\}$ )

$$\begin{aligned} -\omega_k C_k v_k' - C_k \frac{[k h_k'] H_0}{4\pi \rho_0} &= i \frac{\partial C_k}{\partial t} v_k - \sum_{k'+k''=k} C_k' C_k'' \left\{ (v_k' k'') v_k'' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\pi \rho_0} [k' h_k'], \left( h_k'' - \frac{\rho_k''}{\rho_0} H_0 \right) \right\} A, \\ -\omega_k C_k h_k' - C_k [k [v_k' H_0]] &= i \frac{\partial C_k}{\partial t} h_k + \sum_{k'+k''=k} C_k' C_k'' \left\{ [k [v_k' h_k'']] - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{c m_i}{4\pi \rho_0 e} [k [k' h_k'] \left( h_k'' - \frac{\rho_k''}{\rho_0} H_0 \right)] \right\} A, \\ -\omega_k C_k \rho_k' + \rho_0 C_k (k v_k') &= i \frac{\partial C_k}{\partial t} \rho_k - \sum_{k'+k''=k} C_k' C_k'' \rho_k' (v_k' k) A. \end{aligned} \quad (П.1)$$



Легко проверить, что необходимо выписывать лишь компоненты по осям  $x$  и  $z$  уравнения (1.3). Третье уравнение эквивалентно уравнению  $\text{div } \mathbf{h} = 0$ , т. е.  $h_x = -k_y h_y / k_x$ . При равных нулю правых частях (П.1) дает нам уравнения

$$(\omega_k + H_0(\mathbf{k})) \varphi_k = 0 \quad (\text{П.2})$$

для определения собственного вектора  $\varphi_k$ . Решая систему (П.2), находим компоненты собственного вектора  $\varphi_k$  оператора  $\hat{H}_0$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2 = 0; \quad \varphi_3 = -\frac{i\omega}{\omega_H A} \frac{k_y^2 c_A^2}{\omega^2} \varphi_1; \quad \varphi_4 = -\frac{k_y \omega H_0}{k^2 c_A^2} \varphi_1; \\ \varphi_5 = \frac{ik_y H_0}{\omega_H A} \varphi_1; \quad \varphi_6 = \frac{k_x}{\omega} n_0 \varphi_1; \quad A \equiv 1 - \frac{k_y^2 c_A^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Выписывая уравнение (2.10) в явном виде с помощью (П.2), получаем решение сопряженного уравнения:

$$\begin{aligned} \psi_2 = 0; \quad \psi_3 = -\frac{\omega_H}{i\omega} B \psi_1; \quad \psi_4 = -\frac{\omega}{k_y H_0} \psi_1; \\ \psi_5 = \frac{\omega_H}{ik_y H_0} B \psi_1; \quad \psi_6 = 0, \quad B \equiv \frac{\omega^2}{k^2 c_A^2} - 1. \end{aligned}$$

Частоты собственных колебаний определяются формулой

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} C_A \left( \sqrt{(k + k_y)^2 + c_A^2 k^2 k_y^2 / \omega_H^2} \pm \sqrt{(k - k_y)^2 + c_A^2 k^2 k_y^2 / \omega_H^2} \right). \quad (\text{П.3})$$

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 24 июля 1962 г.

#### Литература

- [1] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. УФН, 73, 701, 1961.
- [2] Р. Пайерлс. Квантовая теория твердых тел, ИИЛ, 1956.
- [3] Л. Э. Гуревич. Основы физической кинетики, Гостехиздат, 1940.
- [4] С. И. Брагинский. Препринт ИАЭ, 1961.
- [5] В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. ЖТФ (в печати). 39, 805, 1963.
- [6] М. Самас, А. Кантровитц, М. Литвак, Р. Патрик, Н. Петсчек. Preprint, Salzburg, 1961.
- [7] Р. З. Сагдеев. ЖТФ, 31, 1185, 1961; Диссертация, Новосибирск, 1962.
- [8] C. Gardner, H. Goertzel, H. Grad, C. Morawetz, M. Rose, H. Rubin. Report № 374, Geneva Conference, 1958. L. Davies, R. Lüst, A. Schlüter. Zs. f. Naturforsch., 13a, 916, 1958. J. Adlam, J. Allen. Phil. Mag., 3, 448, 1958. R. Sagdeev. Uppsala conference, 1959. C. Morawetz. Preprint, 1959. P. L. Auer, H. Hurwitz, Jr. R. W. Kilb, Preprint, 1961.
- [9] В. И. Карпман. ЖТФ (в печати). 33, 959, 1963.
- [10] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291, 1962.
- [11] Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов. Тр. 2-й Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, Атомиздат, 1959.

#### TURBULENT THEORY OF A WEAKLY NONEQUILIBRIUM RAREFIED PLASMA AND THE STRUCTURE OF SHOCK WAVES

A. A. Galylev, V. I. Karpman

A kinetic equation is derived for interacting waves in a weakly nonequilibrium rarefied plasma. The relation between the laminar and turbulent theories of shock waves «without collisions» in a magnetic field is discussed. An estimate of the turbulent width of shock waves is made on basis of the kinetic equation.

#### К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ФЕРМИОНОВ

В. С. Ваняшин

В рамках теории уравнений второго порядка для фермионов выдвигается предположение об универсальной связи киральности с электрическим зарядом. Именно, компоненты любого спинорного поля с положительной киральностью ( $\psi_+ = 1/2 (1 + \gamma_5)\psi$ ) всегда электрически заряжены и подвергаются преобразованию электромагнитной калибровки, в то время как компоненты с отрицательной киральностью ( $\psi_- = 1/2 (1 - \gamma_5)\psi$ ) всегда электрически нейтральны. Универсальное слабое взаимодействие носит характер взаимодействия, изменяющего киральность, что отражается как в его векторно-аксиальной структуре, так и в заряженности слабых токов. Рассмотрен также вопрос о виде в исследуемой теории лагранжиана взаимодействия с псевдоскалярным полем.

#### 1. Введение

Уравнения второго порядка для фермионов были впервые рассмотрены Марковым еще в 1936 г. [1]. В 1958 г. они были использованы Гелл-Манном и Фейнманом для обоснования векторно-аксиального характера слабого взаимодействия [2].

Основным вопросом, возникающим при использовании уравнения второго порядка вместо уравнения Дирака, является вопрос об интерпретации дополнительной степени свободы. Уравнение второго порядка допускает вдвое большее число решений по сравнению с уравнением Дирака. Эти решения, помимо обычных квантовых чисел, можно характеризовать еще собственными значениями оператора  $\gamma_5$  (оператора киральности, «chirality» — по терминологии Эддингтона [3]). Киральность, которая здесь, в отличие от случая уравнения Дирака, является сохраняющейся величиной, на первый взгляд кажется «лишним» квантовым числом. Поэтому было предложено считать «физическими» только половину компонент  $\psi$ , выделяемых проекционным оператором  $1/2 (1 + \gamma_5)$  [4]. По существу, на этой точке зрения основан двухкомпонентный формализм работ Фейнмана, Гелл-Манна [2], Броуна [5] и Тонина [6].

Несомненную эвристическую ценность представляет другая точка зрения, согласно которой все компоненты  $\psi$  являются физическими, но электромагнитным взаимодействием обладают только компоненты с положительной киральностью. Марксом [7,8] было показано, что части волновой функции с положительной и отрицательной киральностью можно сопоставить с заряженной и нейтральной компонентами дублетов  $(e, \nu)$  и  $(p, n)$ . Для полноты картины необходимо включить в общую схему мюон и гипероны, что и было сделано, однако встретило определенные трудности (см. [8]). Ниже будет показано, что трудность, связанная с  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гиперонами, является в известной степени преодолимой. Включение же мюона в схему в настоящее время не представляет затруднений. Мюон описывается одной волновой функцией вместе со своим нейтрино, в пользу существования которого свидетельствуют последние эксперименты [9].