Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 44 *1963* *Вып. 4*

О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТАХ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЫ

В. И. Карпман

Получены уравнения, описывающие нелинейные взаимодействия электромагнитных волн в прозрачной среде. Результаты применяются к исследованию вторичных гармоник с удвоенной частотой, возникающих при распространении волн в среде. Определены интенсивности и поляризации этих гармоник в кварце.

1. В [1] были получены динамическое и кинетическое уравнения, описывающие нелинейные взаимодействия между волнами в плазме, находящейся в сильном магнитном поле. В настоящей работе аналогичные уравнения получены для произвольной прозрачной среды.

В последнее время вопросы нелинейной электродинамики среды приобретают интерес в связи с появлением экспериментальных возможностей изучения нелинейных эффектов. Например, Франкен и др. [2] сообщали, что при прохождении интенсивного монохроматического пучка света в оптическом диапазоне частот через кристаллический кварц наблюдалось возникновение гармоники с удвоенной частотой. Это явление весьма просто интерпретируется при помощи уравнений для взаимодействующих волн, полученных в настоящей работе.

2. Ограничиваясь для простоты немагнитными средами ($\mu \approx 1$), запишем уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{1}$$

Нелинейные эффекты описываются членами второго и более высокого порядков по E в зависимости вектора поляризации $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$. Ограничиваясь членами второго порядка, можем написать (см. [3])

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}; \tag{2}$$

$$P_\alpha^{(1)} = (4\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \varphi_{\alpha\beta}^{(1)} (t - t_1)\, E_\beta (t_1), \tag{3}$$

$$P_\alpha^{(2)} = (4\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{t_1} dt_2 \varphi_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} (t - t_1, t_1 - t_2)\, E_\beta (t_1)\, E_\gamma (t_2), \tag{4}$$

$\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$. Функция $\varphi_{\alpha\beta}^{(1)} (\tau)$ в (3) определяет тензор диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 1 + \int\limits_0^\infty \varphi_{\alpha\beta}^{(1)} (\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} (\omega) = \overset{*}{\varepsilon}_{\alpha\beta} (-\omega). \tag{6}$$

В дальнейшем рассматриваются лишь прозрачные среды. Тогда можно написать [4]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) = \overset{*}{\varepsilon}_{\beta\alpha}(\omega). \tag{7}$$

Для простоты мы не рассматриваем пространственной дисперсии, т. е. считаем, что $\varphi^{(1)}_{\alpha\beta}(t - t_1)$ не зависит от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, а $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ — от $\mathbf{k}$. Даже в этом случае $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ может, вообще говоря, зависеть от $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (например, для холодной плазмы). В дальнейшем, однако, зависимость $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ от координат явно не выписывается, поскольку она не играет существенной роли и загромождает формулы. Все полученные результаты тривиально обобщаются на случай пространственной дисперсии.

Нужно иметь в виду, что $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ в некоторых случаях обращается в нуль, например для тел, обладающих центром симметрии (при отсутствии зависимости $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$ от $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$). В таком случае нужно учитывать член третьего порядка по полю — $\varphi^{(3)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Излагаемый ниже метод применим и в этом случае, однако мы его специально не рассматриваем, поскольку обсуждаемые ниже эффекты существенно связаны с членом $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}$, квадратичным по полю.

3. Выпишем сначала основные соотношения линейного приближения в удобной для последующего изложения форме. Решение линеаризованных уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathbf{E} = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} c_{\mathbf{p}}\, \mathbf{E}(\mathbf{p}) \exp\{i(\mathbf{pr} - \omega_{\mathbf{p}} t)\}, \tag{8}$$

$$\mathbf{H} = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} c_{\mathbf{p}}\, \mathbf{H}(\mathbf{p}) \exp\{i(\mathbf{pr} - \omega_{\mathbf{p}} t)\},$$

где $c_{\mathbf{p}}$ — постоянные. Здесь и в дальнейшем мы обозначаем волновой вектор гармоники с положительной частотой через $\mathbf{k}$, а волновой вектор гармоники с отрицательной частотой — через $\mathbf{k}_-$, так что

$$\begin{gathered} \mathbf{k}_- = -\mathbf{k}, \qquad \omega_{\mathbf{k}_-} = -\omega_{\mathbf{k}}, \qquad c_{\mathbf{k}_-} = \overset{*}{c}_{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{k}_-) = \mathbf{E}^*(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{H}(\mathbf{k}_-) = \mathbf{H}^*(\mathbf{k}). \end{gathered} \tag{9}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{p})$ удовлетворяют уравнениям ($\mathbf{p} = \mathbf{k}, \mathbf{k}_-$)

$$[\mathbf{pH}(\mathbf{p})]_\alpha = -(1/c)\,\varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta(\mathbf{p}), \qquad \omega_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}) = c\,[\mathbf{pE}(\mathbf{p})], \tag{10}$$

из которых следует

$$[p_\alpha p_\beta - p^2\delta_{\alpha\beta} + (\omega_p^2/c^2)\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_p)]\, E_\beta(\mathbf{p}) = 0, \tag{11}$$

$$H_\alpha(\mathbf{k})\, \overset{*}{H}_\alpha(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha\beta}\, \overset{*}{E}_\alpha(\mathbf{k})\, E_\beta(\mathbf{k}). \tag{12}$$

Чтобы окончательно определить смысл $c_{\mathbf{p}}$ в (8), нужно пронормировать векторы $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{k})$. Запишем для этого выражение для электромагнитной энергии среды W (которое имеет смысл лишь для прозрачной среды [4]). Используя разложения (8) и соотношение (12), будем иметь (см. [4])

$$\begin{aligned} W &= (16\pi)^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{d(\omega\varepsilon_{\alpha\beta})}{d\omega} \overset{*}{E}_\alpha(\mathbf{k})\, E_\beta(\mathbf{k}) + \overset{*}{H}_\alpha(\mathbf{k})\, H_\alpha(\mathbf{k})\right] \overset{*}{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} = \\ &= (16\pi)^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{d(\omega\varepsilon_{\alpha\beta})}{d\omega} + \varepsilon_{\alpha\beta}\right] \overset{*}{E}_\alpha(\mathbf{k})\, E_\beta(\mathbf{k})\, \overset{*}{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{13}$$

где суммирование производится по всем гармоникам с положительными частотами. Как и в [1], нормируем $E(\mathbf{k})$ и $H(\mathbf{k})$ таким образом, чтобы W приняло вид

$$W = \sum_{\mathbf{k}} \overset{*}{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}, \tag{14}$$

т. е.

$$(16\pi)^{-1} \left[\frac{d(\omega\varepsilon_{\alpha\beta})}{d\omega} + \varepsilon_{\alpha\beta}\right] \overset{*}{E}_{\alpha}(\mathbf{k}) E_{\beta}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}). \tag{15}$$

При такой нормировке $|c_{\mathbf{k}}|^2 = \overset{*}{c}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}$ имеет размерность действия, а величину $|c_{\mathbf{k}}|^2/\hbar$ можно интерпретировать как число квазичастиц с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$.

4. Учтем теперь нелинейный член $P^{(2)}$ в (2), определяющий взаимодействие между волнами. Предполагая это взаимодействие достаточно слабым (амплитуды $c_{\mathbf{k}}$ малы), будем искать решение системы (1) — (4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} c_{\mathbf{p}}(t)\,[\mathbf{E}(\mathbf{p}) + \mathbf{E}'(\mathbf{p})]\, e^{i(\mathbf{pr}-\omega_{\mathbf{p}}t)}, \\ \mathbf{H} &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} c_{\mathbf{p}}(t)\,[\mathbf{H}(\mathbf{p}) + \mathbf{H}'(\mathbf{p})]\, e^{i(\mathbf{pr}-\omega_{\mathbf{p}}t)}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{k})$ — векторы поляризации нормальных колебаний линейного приближения, определенные соотношениями (10), (15), $c_{\mathbf{p}}(t)$ — медленно меняющиеся (по сравнению с экспонентами в (16)) амплитуды, $\mathbf{E}'(\mathbf{k})$, $\mathbf{H}'(\mathbf{k})$ — малые, медленно меняющиеся добавки к векторам поляризации нормальных колебаний.

Из дальнейшего будет видно, что если $c_{\mathbf{p}}(t)$ считать малыми первого порядка, то $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ будут малыми также первого порядка, а $dc_{\mathbf{p}}/dt$ — малыми второго порядка; производные $d\mathbf{E}'/dt$, $d\mathbf{H}'/dt$ также можно считать малыми по сравнению с $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$. Подставляя (16) в (3) и ограничиваясь малыми до второго порядка включительно, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\alpha}^{(1)}}{\partial t} &= \frac{V^{-1/2}}{4\pi} \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} e^{i(\mathbf{pr}-\omega_{\mathbf{p}}t)} \times \\ &\times \Big\{ i\omega_{\mathbf{p}}\,[\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_{\mathbf{p}})]\, c_{\mathbf{p}} E'_{\beta}(\mathbf{p}) + E_{\beta}(\mathbf{p}) \int_0^{\infty} \varphi_{\alpha\beta}^{(1)}(\tau)\, e^{i\omega_{\mathbf{p}}\tau} [\dot{c}_{\mathbf{p}}(t-\tau) - \\ &\qquad - i\omega_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}}(t-\tau)]\Big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Разложим $c_{\mathbf{p}}(t)$ во втором члене в интеграл Фурье

$$c_{\mathbf{p}}(t-\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{c}_{\mathbf{p}}(\nu)\, e^{-i\nu(t-\tau)}\, d\nu. \tag{18}$$

Подставляя это в (17) и производя элементарные преобразования во втором члене, представим его в виде

$$- iE_{\beta}(\mathbf{p}) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-i\nu t} (\nu + \omega_{\mathbf{p}})\, [\varepsilon_{\alpha\beta}(\nu + \omega_{\mathbf{p}}) - \delta_{\alpha\beta}]\, \widetilde{c}_{\mathbf{p}}(\nu). \tag{19}$$

Медленность изменения $c_{\mathbf{p}}(t)$ означает, что $\tilde{c}_{\mathbf{p}}(\nu)$ существенно отлично от нуля лишь при $\nu \ll \omega_{\mathbf{p}}$. Поэтому в (19) можно написать

$$(\nu+\omega_{\mathbf{p}})\,[\varepsilon_{\alpha\beta}(\nu+\omega_{\mathbf{p}})-1] \approx \omega_{\mathbf{p}}\,[\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_{\mathbf{p}})-\delta_{\alpha\beta}] + \nu\frac{d}{d\omega}\,[\omega(\varepsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta})]_{\omega=\omega_{\mathbf{p}}}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) и производя обратное суммирование компонент Фурье, получим

$$\frac{\partial P_\alpha^{(1)}}{\partial t} = \frac{V^{-1/2}}{4\pi}\sum_{\mathbf{p}=\mathbf{k},\,\mathbf{k}_-} e^{i(\mathbf{pr}-\omega_{\mathbf{p}}t)}\times$$
$$\times\left\{i\omega_{\mathbf{p}}\,[\delta_{\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_{\mathbf{p}})]\,[E_\beta(\mathbf{p})+E'_\beta(\mathbf{p})]\,c_{\mathbf{p}} + \frac{dc_{\mathbf{p}}}{dt}E_\beta(\mathbf{p})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d}{d\omega}[\omega\,(\varepsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta})]_{\omega=\omega_{\mathbf{p}}}\right\}. \tag{21}$$

Подставляя (16) в (4), вычислим $\partial P_\alpha^{(2)}/\partial t$ (с точностью до членов второго порядка):

$$\frac{\partial P_\alpha^{(2)}}{\partial t} = -\frac{i}{4\pi V}\sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}}\sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}'}c_{\mathbf{p}''}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\mathbf{p}'},\omega_{\mathbf{p}''})\,E_\beta(\mathbf{p}')\,E_\gamma(\mathbf{p}'')\times$$
$$\times\exp\,[i\,(\omega_{\mathbf{p}'}+\omega_{\mathbf{p}''})\,t], \tag{22}$$

где [1])

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega',\omega'') = {}^1/_2\,(\omega'+\omega'')\,[\chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega'+\omega'',\omega')+\chi_{\alpha\gamma\beta}(\omega'+\omega'',\omega'')], \tag{23}$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}(\omega',\omega'') = \int_0^\infty d\tau'\int_0^\infty d\tau''\,\varphi_{\alpha\beta\gamma}(\tau',\tau'')\exp\,[i\,(\omega'\tau'+\omega''\tau'')]. \tag{24}$$

Подставляя (21), (22) в (1), (2), приравняем одинаковые $\mathbf{p}$-компоненты Фурье, учтем (10), а затем исключим из получившихся уравнений $\mathbf{H}'(\mathbf{p})$; тогда получится система уравнений для $E_\alpha'(\mathbf{p})$:

$$\frac{c}{\omega_{\mathbf{p}}}c_{\mathbf{p}}\left(p_\alpha p_\beta - p^2\delta_{\alpha\beta}+\frac{\omega_{\mathbf{p}}^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right)E'_\beta = -i\frac{dc_{\mathbf{p}}}{dt}\left[\varepsilon_{\alpha\beta}+\frac{d\,(\omega_{\mathbf{p}}\,\varepsilon_{\alpha\beta})}{d\omega_{\mathbf{p}}}\right]E_\beta -$$
$$-V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}'}c_{\mathbf{p}''}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\mathbf{p}'},\omega_{\mathbf{p}''})\,E_\beta(\mathbf{p}')\,E_\gamma(\mathbf{p}'')\exp\,[i\,(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{p}''})\,t]. \tag{25}$$

Эта система отличается от системы уравнений (11) для $E'_\alpha(\mathbf{p})$ лишь наличием правой части. Следовательно, определитель ее равен нулю. Для совместности уравнений (25) необходимо, чтобы правая часть этой системы была ортогональна решениям транспонированной системы без правой части, т. е. векторам $\tilde{E}_\alpha'(\mathbf{p})$, удовлетворяющим уравнениям

$$[p_\alpha p_\beta - p^2\delta_{\alpha\beta} + (\omega_{\mathbf{p}}^2/c^2)\,\varepsilon_{\beta\alpha}(\omega_{\mathbf{p}})]\,\tilde{E}_\beta = 0. \tag{26}$$

На основании (7) легко получить

$$\tilde{E}_\alpha(\mathbf{p}) = E^*_\alpha(\mathbf{p}). \tag{27}$$

---

[1]) Аналитические свойства тензора $\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega',\omega'')$ рассматривались Коганом [5].

Таким образом, условие совместности (25) принимает вид

$$i\,\frac{dc_{\mathbf{p}}}{dt}\left\{\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_{\mathbf{p}}) + \frac{d}{d\omega_{\mathbf{p}}}\left[\omega_{\mathbf{p}}\,\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega_{\mathbf{p}})\right]\right\} E^*_\alpha(\mathbf{p})\,E_\beta(\mathbf{p}) +$$

$$+V^{-1/2}\sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}''=\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}'}c_{\mathbf{p}''}\sigma(\omega_{\mathbf{p}'},\omega_{\mathbf{p}''})\,E^*_\alpha(\mathbf{p})\,E_\beta(\mathbf{p}')\,E_\gamma(\mathbf{p}'')\times$$

$$\times\exp\left[i(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{p}''})\,t\right] = 0. \qquad (28)$$

Используя условие нормировки (15), мы видим, что выражение в фигурных скобках (28) равно $16\pi\omega_{\mathbf{p}}$, и получаем окончательно

$$i\,\frac{dc_{\mathbf{p}}}{dt} = \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{p}''} V_{\mathbf{p}\,\mathbf{p}'\,\mathbf{p}''}\,c_{\mathbf{p}'}\,c_{\mathbf{p}''}\exp\left[i(\omega_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{p}''})\,t\right], \qquad (29)$$

где

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''} = -V^{-1/2}\,(16\pi\omega_{\mathbf{p}})^{-1}\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega_{\mathbf{p}'},\omega_{\mathbf{p}''})\,E^*_\alpha(\mathbf{p})\,E_\beta(\mathbf{p}')\,E_\gamma(\mathbf{p}'')$$
$$\text{при } \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}''; \qquad (30)$$
$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''} = 0 \qquad \text{при } \mathbf{p} \neq \mathbf{p}' + \mathbf{p}''. \qquad (30а)$$

Таким образом, мы получили уравнение, определяющее изменения во времени амплитуд взаимодействующих волн, совпадающее по форме с динамическим уравнением для волн, полученным ранее [1]. Для вычисления $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''}$ в явном виде необходимо знать функции $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1, \tau_2)$, определяющие нелинейный отклик среды на внешнее электрическое поле.

Согласно [3] справедливы следующие выражения для этих функций:

$$\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(t_1, t_2) = (i/\hbar)^2\langle\,[\,[\,Q_\alpha(t_1+t_2),\ Q_\beta(t_2)]_-,\ Q_\gamma]_-\rangle_0. \qquad (31)$$

Однако для ряда конкретных случаев, когда квантовые свойства среды несущественны, в частности, для классической плазмы, величины $\varphi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma}(\tau_1, \tau_2)$ проще вычислять непосредственно при помощи кинетических или гидродинамических уравнений, выражая вектор поляризации среды через напряженность поля с точностью до второго порядка. Поступая таким образом в случае «холодной» плазмы в сильном магнитном поле ($H^2/8\pi \gg nT$), мы придем к выражениям для $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''}$, найденным для этого случая несколько иным методом в [1].

«Матричные элементы» $V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''}$ удовлетворяют некоторым общим соотношениям симметрии. Два из них легко получить сразу:

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''} = V_{\mathbf{p}\mathbf{p}''\mathbf{p}'}, \qquad (32)$$

$$V_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{p}''} = -V^*_{\mathbf{p}_-\mathbf{p}'_-\mathbf{p}''_-}. \qquad (33)$$

Первое следует из (30), (23), а второе получается, если взять комплексное сопряжение от (30) и учесть, что $c^*_{\mathbf{p}} = c_{\mathbf{p}_-}$ (см. (9)).

В отличие от (33) два других общих соотношения выполняются лишь при

$$\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}'} + \omega_{\mathbf{p}''}, \qquad \mathbf{p} = \mathbf{k},\ \mathbf{k}_- \qquad (34)$$

и имеют вид

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = V^*_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'_-\mathbf{k}}, \qquad (35а)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''_-} = -V^*_{\mathbf{k}''_-\mathbf{k}'_-\mathbf{k}}. \qquad (35б)$$

Соотношения (35) были получены в [1] для рассмотренного там частного случая на основе конкретного вида матричных элементов $V_{\mathbf{kk'k''}}$. В общем виде мы доказывать их здесь не будем, поскольку это доказательство довольно громоздко и в этой работе соотношения (35) нам не понадобятся. Заметим только, что (35а) можно получить, исходя из соответствия между квантовой и классической теориями взаимодействия электромагнитных волн в среде [2)]. Тогда (35а) следует из перекрестной симметрии матричного элемента S-матрицы (см., например, [6]), описывающего распад распространяющегося в прозрачной среде фотона с энергией $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ и импульсом $\hbar\mathbf{k}$ на два: $(\omega_{\mathbf{k}_1}, k_1)$, $(\omega_{\mathbf{k}_2}, k_2)$, таких, что выполняется (34) и $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Что касается (35б), то оно просто получается из (35а) и (33).

При помощи динамического уравнения (29) и соотношения (35) можно исследовать для произвольной прозрачной среды распадные неустойчивости волн, рассматривавшиеся ранее Ораевским и Сагдеевым [7], а также получить кинетическое уравнение, описывающее взаимодействие большого количества волн с хаотически распределенными фазами. Все это было сделано в [1] для плазмы, однако поскольку при этом не использовался конкретный вид матричных элементов, то все эти результаты справедливы и в произвольной прозрачной среде [3)].

5. В качестве примера применения динамического уравнения (29) рассмотрим эффект удвоения частоты в прозрачной среде. Сообщение о наблюдении этого эффекта в кристаллическом кварце имеется в [2].

Пусть в среде распространяется волна $(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))$. Тогда на основании динамического уравнения (29) появится волна с удвоенным волновым вектором $\mathbf{k}_1 = 2\mathbf{k}$; амплитуда ее удовлетворяет уравнению

$$i\frac{dc_{\mathbf{k}_1}}{dt} = V_{\mathbf{k}_1\mathbf{kk}}\, c_{\mathbf{k}}^2 e^{i(\omega_1 - 2\omega)t}, \qquad (36)$$
$$\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1) = \omega(2\mathbf{k}), \qquad \omega = \omega(\mathbf{k}).$$

Отсюда получаем (пренебрегая зависимостью исходной амплитуды от времени, что можно сделать, когда $c_{\mathbf{k}}$ велико по сравнению с $c_{\mathbf{k}_1}$)

$$c_{\mathbf{k}_1}(t) = (2\omega - \omega_1)^{-1} V_{\mathbf{k}_1\mathbf{kk}} c_{\mathbf{k}}^2 e^{i(\omega_1 - 2\omega)t}. \qquad (37)$$

Уравнение волны с волновым вектором $\mathbf{k}_1 = 2\mathbf{k}$ на основании разложения (8) есть

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = V^{-1/2}\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)\, c_{\mathbf{k}_1} e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega_1 t)} = V^{-1/2}\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)(2\omega - \omega_1)^{-1} V_{\mathbf{k}_1\mathbf{kk}} c_{\mathbf{k}}^2 e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - 2\omega t)}. \qquad (38)$$

Таким образом, получается, что вторичная гармоника имеет удвоенную частоту по сравнению с исходной [4)].

Выражение (38) справедливо при

$$|V_{\mathbf{k}_1\mathbf{kk}} c_{\mathbf{k}} / (2\omega - \omega_1)| \ll 1, \quad |2\omega - \omega_1| \ll \omega_1. \qquad (39)$$

[2)] Заметим, что эффекты взаимодействия волн проявляются при столь больших интенсивностях (числа фотонов $n_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}^* c_{\mathbf{k}}/\hbar \gg 1$), что квантовые поправки, как правило, несущественны. Кроме того, квантовое рассмотрение, полезное для получения общих соотношений типа (35), не приводит достаточно просто к явным выражениям (30) для матричных элементов. Поэтому мы его здесь не рассматриваем.

[3)] В [8,9] сообщается об экспериментальном наблюдении в кристаллах явления, обратного распаду волны, а именно, при наложении двух волн $(\omega_1, \mathbf{k}_1)$, $(\omega_2, \mathbf{k}_2)$ появляется гармоника $(\omega_1 + \omega_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. Отметим также, что один из случаев распада обсуждался ранее Ахмановым и Хохловым [10] в качестве возможного механизма усиления волн.

[4)] Поскольку $2\omega \neq \omega_1 = \omega(2\mathbf{k})$ вследствие нелинейности закона дисперсии, то такое колебание следует рассматривать как «вынужденное».

Первое из неравенств (39) есть условие малости $c_{\mathbf{k}_1}$ по сравнению с $c_{\mathbf{k}}$, а второе — условие медленности изменения $c_{\mathbf{k}_1}(t)$. Обоим условиям можно одновременно удовлетворить при

$$|V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}}/\omega_1| \ll |(2\omega-\omega_1)/\omega_1| \ll 1. \tag{40}$$

Если в среде распространяется несколько различных волн с одной исходной частотой ω, то они также могут приводить к появлению волн с удвоенной частотой (такой случай нам встретится ниже). Амплитуды последних будут определяться формулой, аналогичной (37):

$$c_{\mathbf{k}_1} = (2\omega-\omega_1)^{-1} \sum_{\mathbf{k}_1=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'\mathbf{k}''}\, c_{\mathbf{k}'}c_{\mathbf{k}''}e^{i(\omega_1-2\omega)t}, \tag{41}$$

где $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ — волновые векторы исходных волн.

Рассмотрим теперь подробнее вид матричного элемента $V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'\mathbf{k}''}$. Из (30) следует, что его можно записать следующим образом:

$$V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = -V^{-1/2}(\omega/8\pi\omega_1)\,\mathbf{E}^*(\mathbf{k}_1)\,\mathbf{u}(\mathbf{k}',\mathbf{k}''), \tag{42}$$

где вектор $\mathbf{u}(\mathbf{k}',\mathbf{k}'')$ определяется формулой

$$u_\alpha(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') = (2\omega)^{-1}\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega,\omega)\,E_\beta(\mathbf{k}')\,E_\gamma(\mathbf{k}''). \tag{43}$$

Применим теперь эти соотношения к кристаллическому кварцу, исследовавшемуся в [2]. Последний представляет собой одноосный кристалл с симметрией класса D_3, содержащей ось симметрии третьего порядка (ось z) и три оси симметрии второго порядка в плоскости xy; одну из этих осей будем считать направленной вдоль x. Отсюда вытекает, что тензор $\sigma_{\alpha\beta\gamma}(\omega)$ будет иметь вид (см. [4], стр. 106)

$$\begin{gathered}\sigma_{x,xx} = -\sigma_{x,yy} = -\sigma_{y,xy} = 2\omega a,\\ \sigma_{x,yz} = -\sigma_{y,xz} = 2\omega b,\end{gathered} \tag{44}$$

где a и b — некоторые функции частоты ω.

Подставляя (44) в (43), получим вектор $\mathbf{u}$ в виде

$$\begin{gathered}u_x = a\,[E_x(\mathbf{k}')\,E_x(\mathbf{k}'') - E_y(\mathbf{k}')\,E_y(\mathbf{k}'')] + b\,[E_y(\mathbf{k}')\,E_z(\mathbf{k}'') + E_y(\mathbf{k}'')\,E_z(\mathbf{k}')],\\ u_y = -b\,[E_x(\mathbf{k}')\,E_z(\mathbf{k}'') + E_x(\mathbf{k}'')\,E_z(\mathbf{k}')] - a\,[E_x(\mathbf{k}')\,E_y(\mathbf{k}'') + E_x(\mathbf{k}'')\,E_y(\mathbf{k}')],\\ u_z = 0.\end{gathered} \tag{45}$$

Тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$ в принятой системе координат является диагональным, причем

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon, \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon'. \tag{46}$$

Из отсутствия поглощения следует, что ε, ε' и поляризационные векторы $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ вещественны.

Рассмотрим теперь отдельно три случая.

А. Падающий луч направлен вдоль оси x (т. е. вдоль одной из осей второго порядка). При произвольной поляризации он дает обыкновенную и необыкновенную волны, имеющие одинаковые частоты и направления распространения, но разные величины волновых векторов и разные поляризации; обыкновенная волна поляризована вдоль оси y, а необыкновенная — вдоль оси z. Следовательно, $E_x(\mathbf{k}') = E_x(\mathbf{k}'')$, и вектор $\mathbf{u}$ имеет лишь x-компоненту. Поскольку вторичная волна распространяется также вдоль оси x, то $E_x(\mathbf{k}_1) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)\,\mathbf{u}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') = 0$. Поэтому $V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = 0$. Значит, волна с удвоенной частотой в этом случае возникнуть не может.

Б. Падающий луч направлен вдоль оси y. При произвольной поляризации он опять дает обыкновенную и необыкновенную волны. Первая поляризована вдоль оси x, а вторая — вдоль z. У обеих волн $E_y(\mathbf{k}) = 0$. У вторичной волны также $E_y(\mathbf{k}_1) = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)\,\mathbf{u}(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') = E_x(\mathbf{k}_1)\,u_x(\mathbf{k}',\mathbf{k}'').$$

Из (45) следует, что $u_x(\mathbf{k}',\mathbf{k}'') \neq 0$ только в том случае, если $\mathbf{k}' = \mathbf{k}''$ и отвечают обыкновенной волне. $E_x(\mathbf{k}_1) \neq 0$ также только для обыкновенной волны. Следовательно, в этом случае лишь обыкновенная волна порождает гармонику с удвоенной частотой, причем последняя поляризована также вдоль x.

Интенсивность волны с удвоенной частотой определяется потоком энергии

$$\mathbf{S} = (c/4\pi)\,[\mathbf{EH}] = (c/4\pi)\,\mathbf{n}E^2$$

(последнее написано с учетом поперечности; напряженности поля здесь предполагаются вещественными). Вектор $\mathbf{n}$ по величине равен показателю преломления волны (здесь — обыкновенной) и направлен вдоль волнового вектора.

Среднее значение величины потока энергии, выраженное через комплексный вектор напряженности $\mathscr{E}$, имеет вид

$$S_1 = (cn_1/8\pi)\,\overset{*}{\mathscr{E}}_1\mathscr{E}_1, \tag{47}$$

где индекс 1 указывает, что величины относятся к вторичный волне. Подставим сюда $\mathscr{E}_1$ из (38) и выражение для матричного элемента из (42), (45):

$$|V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}}|^2 = V^{-1}\,(\omega^2/(8\pi)^2\omega_1^2)\,a^2E_x^2(\mathbf{k}_1)\,E_x^4(\mathbf{k}). \tag{48}$$

Стоящие здесь величины поляризационных векторов определяются условием нормировки (15), из которого следует

$$\begin{gathered} E^2(\mathbf{k}) = 16\,\pi\omega\,(\omega d\varepsilon/d\omega + 2\varepsilon)^{-1} \approx 8\pi\omega/n^2, \\ E^2(\mathbf{k}_1) \approx 8\pi\omega_1/n_1^2, \end{gathered} \tag{49}$$

где n и n_1 — показатели преломления обыкновенной волны, отвечающие первичной и вторичной гармоникам.

Подставляя (49), (48) и (38) в (47), получим окончательно

$$S_1 = \frac{2\pi}{c}\,\frac{a^2}{n_1n^2\,(n_1 - n)^2}\,S_0^2 = \frac{2\pi}{c}\,\frac{a^2}{n_1n^2\,(n_1 - n)^2}\,S^2\cos^4\varphi, \tag{50}$$

где n и n_1 — показатели преломления обыкновенного луча, отвечающие длинам волн λ (исходной) и $\lambda/2$; S_0 — поток энергии исходной обыкновенной волны, а S — полный поток энергии исходного луча в кристалле, φ — угол между направлением поляризации падающего луча (до попадания в кристалл) и осью x. Таким образом, интенсивность вторичной гармоники здесь существенно зависит от поляризации падающего луча.

В. Падающий луч направлен вдоль оси z, т. е. главной оси кристалла; $E_z(\mathbf{k}) = 0$.

В этом случае различие между обыкновенной и необыкновенной волнами исчезает; первичная волна может иметь произвольную поляризацию в плоскости xy, т. е. наступает вырождение. В связи с этим необходимо сделать несколько замечаний относительно исходного уравнения (36). Оно было получено из (25), исходя из того, что правая часть (25) должна быть ортогональна решениям транспонированной системы без правой части. Но, благодаря вырождению, однородной системе удовлетворяет теперь не один вектор, как это раньше предполагалось, а все вектора, лежащие в плоскости xy. Поэтому правая часть (25) должна быть ортогональна к любому вектору, лежащему в плоскости xy, и, следовательно, у нее должны исчезать x- и y-компоненты.

Подставляя в (25) $\mathbf{p} = \mathbf{k}_1$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'' = \mathbf{k}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ из (46), получим правую часть (25) в виде

$$\frac{dc_{\mathbf{k}_1}}{dt}\left(\varepsilon + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\right)\mathbf{E}(\mathbf{k}_1) - 2\omega V^{-1/2} c_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{u}(\mathbf{k},\ \mathbf{k}) \exp\left[i(\omega_{\mathbf{k}_1} - 2\omega_{\mathbf{k}})t\right] = 0. \qquad (51)$$

Здесь мы ввели вектор $\mathbf{u}$, согласно (43), и учли, что $E_z(\mathbf{k}_1) = 0$ ($\mathbf{k}_1 \parallel Oz$) и $u_z(\mathbf{k},\ \mathbf{k}) = 0$ (на основании (45)).

Из (51) следует, во-первых, прежнее уравнение (36), а во-вторых, что $\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{k},\ \mathbf{k})$ параллельны. Таким образом, поляризация волны с удвоенной частотой совпадает с поляризацией вектора $\mathbf{u}$ с компонентами

$$u_x = a\left[E_x^2(\mathbf{k}) - E_y^2(\mathbf{k})\right],\ u_y = -2aE_x(\mathbf{k})\,E_y(\mathbf{k}),\ u_z = 0, \qquad (52)$$

где $E_x(\mathbf{k})$, $E_y(\mathbf{k})$ — компоненты поляризационного вектора исходной волны. Отсюда следует, что если $\mathbf{E}(\mathbf{k})$ составляет угол φ с осью x, а электрическое поле вторичной волны — угол φ_1, то

$$\varphi_1 = 2(\pi - \varphi). \qquad (53)$$

Вычислим интенсивность вторичной гармоники в этом случае. Учитывая, что в матричном элементе (42) $\mathbf{E}(\mathbf{k}_1)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{k},\ \mathbf{k})$ параллельны друг другу, получим

$$|V_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'\mathbf{k}''}|^2 = V^{-1}(\omega/8\pi\omega_1)^2 E^2(\mathbf{k}_1)\,u^2(\mathbf{k},\ \mathbf{k}) = V^{-1}(a\omega/8\pi\omega_1)^2 E^2(\mathbf{k}_1)\,E^4(\mathbf{k}). \qquad (54)$$

Подставляя (54), (49) и (38) в (47), получим

$$S_1 = \frac{2\pi}{c}\,\frac{a^2}{n_1 n^2 (n_1 - n)^2}\,S^2, \qquad (55)$$

где S_1 и S — потоки энергии вторичной и исходной волн, а n_1 и n — соответствующие показатели преломления. В этом случае интенсивность волны с удвоенной частотой не зависит от поляризации падающего луча.

Заметим, что ряд отмеченных выше качественных особенностей зависимости интенсивности вторичной волны от поляризации падающей волны совпадает с результатами анализа, проведенного в [2] другим методом, и подтверждается наблюдениями. Приведенная же в [2] формула для интенсивности ошибочна.

Из (55) можно сделать численную оценку рассматриваемого эффекта. В самом деле, величина a^{-1} имеет размерность напряженности поля и по порядку должна равняться величине атомного поля. Подставляя в (55) $S \sim (c/4\pi)E^2$, где E — напряженность поля в среде, и $n_1 - n \sim 10^{-2}$, получим

$$S_1/S \sim 10^4\,(aE)^2.$$

При $a \sim 10^{-9}$ *см*/V, $E \sim 10^5$ V/*см* (практически достижимая величина) получим $S_1/S \sim 0{,}01\%$.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. А. Галееву, Р. З. Сагдееву и Б. В. Чирикову за плодотворные обсуждения рассмотренных вопросов.

Новосибирский
государственный университет

Поступила в редакцию
3 ноября 1962 г.

Литература

[1] А. А. Галеев, В. И. Карпман. ЖЭТФ, **44**, 592, 1963.
[2] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich. Phys. Rev. Lett., **7**, 118, 1961; **8**, 18, 1962.
[3] W. Bernard, H. B. Callen. Rev. Mod. Phys., **31**, 1017, 1959.
[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.
[5] Ш. М. Коган. ЖЭТФ, **43**, 304, 1962.
[6] П. Мэтьюс. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИИЛ, 1959, стр. 38.
[7] Р. З. Сагдеев, В. Н. Ораевский. ЖТФ, **32**, 1291, 1962.
[8] J. Giordamine. Phys. Rev. Lett., **8**, 19, 1962.
[9] P. D. Maker, R. Terhune, M. Nisenoff, C. Savage. Phys. Rev. Lett., **8**, 21, 1962.
[10] С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов. ЖЭТФ, **43**, 351, 1962.

NONLINEAR EFFECTS IN THE ELECTRODYNAMICS OF A TRANSPARENT MEDIUM

V. I. Karpman

Equations are deduced which describe nonlinear interactions of electromagnetic waves in a transparent medium. The results are applied for investigating the double frequency secondary harmonics which arise when the waves propagate in the medium. The intensities and polarizations of the harmonics in quartz are determined.