

ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Галеев

Рассмотрена задача об устойчивости неоднородной плазмы. Изложен метод построения финитных решений, соответствующих локализованным возмущениям. Показано соответствие с результатами применения грубой квазиклассической теории в той же задаче [1-5]. Учен эффект непараллельности магнитных силовых линий (shear), приводящий к стабилизации «универсальной» неустойчивости неоднородной разреженной плазмы, когда столкновениями частиц можно пренебречь.

1. Введение

Выход за рамки магнитной гидродинамики в теории устойчивости плазмы привел к предсказанию новых неустойчивостей, связанных с раскачкой так называемых «дрейфовых» волн [1-5]. При этом для решения вопроса устойчивости какой-либо конфигурации плазмы использовалась грубая квазиклассическая теория и зависимость возмущенных величин от координат представлялась в виде

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_0 \exp \left\{ i \int^x k_x(x) dx + ik_y y + ik_z z + i\omega t \right\}, \quad (1.1)$$

где ось x совпадает с направлением, в котором плазма неоднородна. В окончательные выражения для инкрементов кинетических неустойчивостей и частот развивающихся колебаний входило полное волновое число $k_{\perp}(x) = \sqrt{k_x^2(x) + k_y^2}$ в определенной точке оси x (см. (1.6)). Точное значение последнего определяется в результате решения уравнений для возмущенных величин, хотя, даже не зная его, можно сделать ряд качественных выводов об устойчивости плазмы [1-5].

Несмотря на то, что для решения вопроса об устойчивости (но не нахождения точных значений инкрементов) явная зависимость возмущенных величин $\psi(x)$ от координаты x была несущественна, всегда требовалась финитность решения ($\psi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$). Само же условие финитности решений необходимо строго получать из соответствующего дифференциального уравнения для $\psi(x)$. (Заметим, что последнее в квазиклассическом приближении (1.1) легко получить из дисперсионных уравнений (см. [2-4]) заменой $k_x \rightarrow -i\partial/\partial x$.)

В общем случае для $\psi(x)$ получается дифференциальное уравнение «бесконечного» порядка¹⁾, однако последнее в двух предельных случаях, а именно 1) в дрейфовом приближении $k_{\perp} r_i \ll 1$ ($r_i = \sqrt{T/m_i m_e c/eH}$ — ионный ларморовский радиус и 2) в приближении $k_{\perp} r_1 \gg 1$ сводится к уравнению второго порядка

$$r_i^2 d^2 \psi / dx^2 - [U(x, \omega, k) + iV(x, \omega, k)] \psi = 0, \quad (1.2)$$

¹⁾ Точнее, интегро-дифференциальное уравнение второго порядка (это связано с тем, что плотность тока частиц в уравнениях Максвелла является функционалом от электрического и магнитного полей).

имеющему вид уравнения Шредингера с комплексной потенциальной энергией $U + iV$ ²⁾. Домножая его на $\psi^*(x)$ и интегрируя в «бесконечных» пределах, получаем для финитного решения интегральные условия

$$r_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) |\psi|^2 dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) |\psi|^2 dx = 0. \quad (1.3)$$

В обычной квантовой механике мы имеем дело лишь с уравнением (1.2) при $V(x) \equiv 0$. В квазиклассическом приближении в этом случае финитные решения всегда существуют для потенциальной энергии $U(x)$ в форме «ямы». Условие финитности решения находится из сшивки спадающих на обеих бесконечностях решений с решением внутри «ямы» в точках поворота x_1, x_2 ($U(x_1) = U(x_2) = 0$) и представляет собой квазиклассическое условие квантования Бора

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{V - U(x, \omega^{(p)}, k)} dx = \pi r_i \left(p + \frac{1}{2} \right). \quad (1.4)$$

Однако в тех задачах устойчивости, в которых для возмущения величин получают уравнения вида (1.2) с действительной потенциальной энергией (см., например, [6]), нет необходимости точно находить спектр частот $\omega^{(p)}$ из (1.4). Достаточно заметить, что в точке поворота $x_1^{(p)}$, соответствующей собственному значению частоты $\omega^{(p)}$, имеет место равенство (см. [8]).

$$U(x^{(p)}, \omega^{(p)}, k) = 0, \quad (1.5)$$

из которого можно определить знак мнимой части частоты и тем самым решить вопросы об устойчивости данной конфигурации плазмы.

Если $V(x) \neq 0$, то точки, в которых действительная и мнимая части потенциальной энергии обращаются в нуль, в общем случае не совпадают, и поэтому мы уже не имеем на действительной оси единичных точек поворота всей комплексной потенциальной энергии $U(x) + iV(x)$. Если же рассматривать $U(z) + iV(z)$ как функцию комплексной переменной $z = x + iy$, то в комплексной плоскости z такие точки могут существовать, и, сшивая квазиклассические решения в этих точках, мы получаем условия существования финитных решений. Последнее представляет собой условие квантования Бора на линии L действительной фазы квазиклассической волновой функции

$$\text{Im} \int_{z_0}^z \sqrt{-(U + iV)} dz = 0, \text{ соединяющей комплексные точки поворота.}$$

Убедившись в существовании финитных решений, можно сделать качественные выводы об устойчивости неоднородной плазмы в этом случае из следующих соображений. Согласно интегральному условию (1.3), для каждого собственного значения частоты $\omega^{(p)}$ имеется такая точка $x^{(p)}$ в области локализации $\psi(x)$, что³⁾

$$V(x^{(p)}, \omega^{(p)}, k) = 0, \quad \text{Re } k_x^2(x^{(p)}) + U(x^{(p)}, \omega^{(p)}, k) = 0, \quad (1.6)$$

²⁾ Сюда включаются также хорошо изученные неустойчивости магнито-гидродинамического типа [6].

³⁾ Условия типа (1.6), выведенные ранее [2-4], без рассмотрения пространственного хода функции $\psi(x)$ остаются формально верными при замене $k_y^2 \rightarrow \text{Re } k_{\perp}^2 = \text{Re } k_x^2 + k_y^2$. Задача же построения финитного решения для получающегося в этом частном случае интегро-дифференциального уравнения может быть решена при помощи приближения (1.1).

где второе условие получено из уравнения (1.2). Отметим, что уравнения (1.6), играющие в задаче устойчивости при $V(x) \neq 0$ ту же роль, что и (1.5), пишутся теперь уже не в точке поворота, а в точке обращения в нуль мнимой части потенциальной энергии. Для нахождения точных границ неустойчивости и инкрементов следует уже решать задачу, исходя из аналитической зависимости $U(z), V(z)$ и условий квантования Бора.

Рассмотрим теперь случай, когда действительная часть потенциальной энергии имеет форму «горба». Тогда встает нетривиальный вопрос о том,

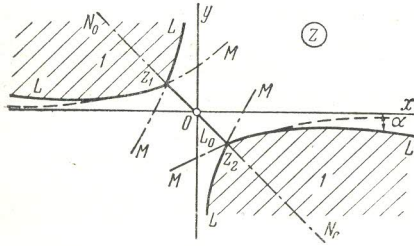


Рис. 1

возможны ли финитные решения при появлении некоторой мнимой части $V(x)$ (из квантовой механики известно, что при отсутствии $V(x)$ таких решений в данном случае нет). Этот вопрос мы рассмотрим на простом примере уравнения «перевёрнутого осциллятора»:

$$d^2\psi/dx^2 + 2\{E + 1/2 \Omega^2 x^2 e^{i\delta}\}\psi = 0. \quad (1.7)$$

Пусть сначала $\delta = 0$. Тогда на линиях $z^2/|z|^4 = -1$ относительный знак

второй производной $d^2\psi/dz^2$ и потенциальной энергии $\Omega^2 z^2/2$ меняется на противоположный и мы получаем на этих линиях «потенциальную яму». Комплексные точки поворота лежат на этих линиях ($\arg z = \pm \pi/4$), а собственные значения энергии, соответствующие финитным на тех же линиях решениям, есть $E = \mp i\Omega(p + 1/2)$. Расположение линий Стокса M и линий L действительной фазы для $E = i\Omega(p + 1/2)$ изображено на рис. 1. Так как асимптотами линий L служат в этом случае полуоси x , то достаточно как угодно малой отрицательной мнимой части $V(x) = -|\delta| \Omega^2 x^2/2$, чтобы линии L повернулись и действительные полуоси x попали в область 1, где имеется только спадающее при $|z| \rightarrow \infty$ решение.

В задаче устойчивости аппроксимация потенциальной энергии $U_1 + iV_1$ «осциллятором»

$$U_1(x) + iV_1(x) = 1/2 \Omega^2 x^2 e^{i\delta} \quad (1.8)$$

возможна лишь в конечной области $|x| < R$, а потенциальная при $|x| \rightarrow \infty$ выходит на постоянную $U_1(\infty) + iV_1(\infty)$. При этом для самых низких уровней точки поворота z_1, z_2 не выходят за область справедливости аппроксимации (1.8) и собственные значения энергии по-прежнему $E = \mp i\Omega(p + 1/2)$ (для $V_1(x) \equiv 0$). Но асимптоты линий действительной фазы L идут теперь под некоторым углом α , поэтому при $V_1(x) \equiv 0$ финитных решений нет и необходима конечная мнимая часть $V_1(x)$ определённого знака, чтобы при развороте линии L действительные полуоси $x \rightarrow \pm \infty$ попали в область существования финитных решений.

Для конкретного определения того, какое из решений финитное при данном знаке $V_1(x)$, воспользуемся квазиклассическими решениями, аналитически продолженными из области 1 на ось x :

$$\psi \approx \frac{\text{const}}{(E - U - iV)^{1/4}} \exp\left\{\pm i \int^x \sqrt{2[E - U_1(x) - iV_1(x)]} dx \rightarrow \right. \\ \left. \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \text{const} \exp\left\{\pm ix \sqrt{2[E - U_1(\infty) - iV_1(\infty)]}\right\}, \right.$$

соответствующими собственным значениям $E = \mp i\Omega(p + 1/2)$ (в отсутствие мнимой части $V_1(x)$ эти решения должны расти вместе с x на действительной оси и, как следует из этого выражения, угол α асимптоты линии L по порядку величины есть $\arctg(|E|/|U_1(\infty)|)$).

Видим, что при $|V_1(\infty)| > |E|$ и отрицательном (положительном), решение, соответствующее $E = -i\Omega(p + 1/2)$ ($E = i\Omega(p + 1/2)$), финитно. По-

скольку в задачах устойчивости $|V| \ll |U|$, то локальные решения могут существовать лишь почти на самом «горбе» (т. е. для не очень больших квантовых чисел ρ).

2. Вывод основных уравнений

Нужные нам уравнения мы могли бы получить с помощью замены $k_x \rightarrow -id/dx$ в полученных ранее дисперсионных уравнениях [2-5], но для полноты изложения выведем их в дрейфовом [1] приближении (длина волны возмущения λ значительно больше ларморовского радиуса ионов). Рассмотрение проведем, как и в [1-6], на примере «плоского слоя» плазмы низкого давления $1 \gg \beta \equiv 8\pi n T/H^2 \gg m_e/m_i$ в поле тяжести g , приложенном вдоль оси x .

Невозмущенные функции распределения ионов и электронов выбираем в виде

$$f_{i,e}^{(0)}(x, v) = n(x) \left(\frac{m_{i,e}}{2\pi T(x)} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_{i,e} (v_{\parallel} - v_{i,e}^{(0)})^2}{2T(x)} - \frac{m_{i,e} (v_{\perp}^2 + v_x^2)}{2T(x)} \right\}. \quad (2.1)$$

Силовые линии магнитного поля лежат в плоскости yz и представляют собой прямые линии, угол наклона $\theta(x)$ (относительно оси z) которых зависит от x . Этот поворот силовых линий обеспечивается током электронов вдоль них, так что угол наклона θ , согласно уравнению Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 4\pi j/c$, связан с $v_e^{(0)}$ соотношением

$$d\theta/dx = -(4\pi n_0/cH_0) v_e^{(0)}(x); \quad v_i^{(0)} \equiv 0.$$

Как обычно, в линейной теории устойчивости наложим на стационарный фон малые возмущения. Предполагая плазму настолько разреженной, что можно не учитывать столкновений частиц, записываем кинетическое уравнение для поправки $f_j^{(1)}$ к функции распределения ионов и электронов в дрейфовом приближении без интеграла столкновений:

$$i(\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}) f_j^{(1)} - \frac{ik_{\perp} g}{\omega_{Hj}} f_j^{(1)} + v_{\parallel} \frac{H_x}{H^{(0)}} \frac{df_j^{(0)}}{dx} + c \frac{E_{\perp}}{H^{(0)}} \frac{df_j^{(0)}}{dx} + \frac{e_j}{m_j} E_{\parallel} \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial v_{\parallel}} = 0; \quad (2.2)$$

$$k_{\parallel} = k_z + k_y \int \frac{d\theta}{dx} dx, \quad \omega_{Hj} = \frac{e_j H^{(0)}}{m_j c}, \quad j = \{i, e\}.$$

Здесь мы воспользовались локальной системой координат $\{x, s_{\perp}, s_{\parallel}\}$ (s_{\parallel} — орт в направлении силовой линии магнитного поля, $s_{\perp}/|s_{\perp}| = [s_{\parallel} x]/|s_{\parallel} x|$).

Рассмотрим самосогласованную задачу, так что кинетические уравнения следует дополнить уравнениями Максвелла для электрических \mathbf{E} и магнитных \mathbf{H} полей возмущения:

$$\frac{dH_{\perp}}{dx} - ik_{\perp} H_x = \frac{4\pi}{c} j_{\parallel}^{(1)}, \quad j_{\parallel}^{(1)} = \sum_j e_j \int v_{\parallel} f_j^{(1)} dv, \quad (2.3)$$

$$ik_{\perp} H_{\perp} + dH_x/dx = 0, \quad (2.4)$$

$$ik_{\perp} E_{\parallel} - ik_{\parallel} E_{\perp} = -i\omega H_x/c, \quad (2.5)$$

$$dE_{\perp}/dx - ik_{\perp} E_x = 0. \quad (2.6)$$

В этих уравнениях мы воспользовались «квазиклассичностью» при переходе от декартовых переменных к локальной тройке координат. Кроме того, пренебрегли возмущением H_{\parallel} , что справедливо при $\beta \ll 1$.

Наконец, при условии квазинейтральности ($\int (f_i^{(1)} - f_e^{(1)}) dv = 0$), полная система уравнений, описывающих плазму в наших приближениях, включает в себя уравнение

$$ik_{\parallel} j_{\parallel}^{(1)} + i \frac{\omega}{\omega_{Hi}} \frac{cn_0}{H^{(0)}} \left(ik_{\perp} E_{\perp} + \frac{dE_x}{dx} \right) - \frac{i\omega}{\omega_{Hi}} \frac{\dot{c}}{H} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_{\perp}^2 \right) p^{(1)} - \frac{ik_{\perp} g e}{\omega_{Hi}} \int f_i^{(1)} dv = 0,$$

$$p^{(1)} = \int \frac{m_i (v_{\perp}^2 + v_x^2)}{2} f_i^{(1)} dv, \quad (2.7)$$

где второе и третье слагаемые произошли от так называемых дрейфов второго порядка (инерционные дрейфы), а четвертое слагаемое представляет собой дрейф под действием силы тяжести.

В предположении, что производные по x от возмущенных величин значительно больше производных от невозмущенных («квазиклассическое» приближение, справедливое при $\lambda_x \ll R$, R — расстояние, на котором существенно меняются $n(x)$, $T(x)$, $\theta(x)$), система уравнений (2.3) — (2.8) сводится к одному уравнению четвертого порядка для частот $\omega \gg k_{\parallel} u_i$:

$$\left(1 - \frac{\omega^2 + k_{\perp} v_n (1 + \eta) \omega}{k_{\parallel}^2 V_A^2} \right) \left[\frac{d^2}{dx^2} - k_{\perp}^2 \left(1 + \frac{gn'/n}{k_{\parallel}^2 V_A^2 - \omega^2 - k_{\perp} v_n (1 + \eta) \omega} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega - k_{\perp} v_n}{\omega} \frac{n}{T} - \left[\frac{\omega + k_{\parallel} v_e^{(0)}}{T} - \frac{k_{\perp} d}{m_i \omega_{Hi} dx} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_e^{(0)} dv_{\parallel}}{\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}} \right\} \psi =$$

$$= \left(1 + \frac{k_{\perp} v_n (1 + \eta)}{\omega} \right) \left[\frac{d^2}{dx^2} - k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{gn'/n}{\omega^2 + k_{\perp} v_n (1 + \eta) \omega} \right) \right] \left(r_i^2 \frac{d^2}{dx^2} - k_{\perp}^2 r_i^2 \right) \psi, \quad (2.8)$$

$$v_n(x) = k_{\perp} c T n' / e H n, \quad n' = dn(x)/dx, \quad \eta \equiv d \ln T / d \ln n,$$

$$V_A^2 = H^2 / 4\pi n m_i, \quad u_{i,e} = \sqrt{T/m_{i,e}}, \quad \psi(x) \equiv E_{\perp}(x).$$

Это уравнение справедливо лишь для длин волн $\lambda_x(x)$, значительно больших ларморовского радиуса ионов. Если же точки поворота $U(x)$ отстоят далеко друг от друга, то в области минимума потенциальной ямы $U(x)$ это условие нарушается. Поэтому ограничимся лишь рассмотрением самых нижних уровней, лежащих почти на дне ямы. Для них в квазиклассическом условии квантования Бора можно во всей области интегрирования аппроксимировать $U(x)$ при помощи двух членов разложения в ряд. То, что условие применимости (2.8), как правило, нарушается в области малых градиентов $n'/n \sim 0$, не сказывается на правильности результатов, так как в этой области решение уже практически затухло.

Кроме того, будем считать, что изменение плотностей и температур с координатой x происходит подобно, т. е. $\eta \equiv d \ln T / d \ln n = \text{const}$, и настолько мало ($\Delta n \ll n$, $\Delta T \ll T$), что все зависящие от них величины можно считать постоянными, если только они не зависят еще и от их градиентов.

3. Неустойчивости неоднородной плазмы

в сильном магнитном поле с параллельными силовыми линиями

В предыдущем разделе для возмущенных величин мы получили дифференциальное уравнение, которое в наиболее интересных частных случаях сводится к уравнению второго порядка (типа уравнения Шредингера). В теории устойчивости нас интересуют лишь финитные решения, затухающие на бесконечности. Поэтому вся задача устойчивости неоднородной плазмы

сводится к исследованию на собственные значения получающихся уравнений.

Уравнение (2.8) включает в себя хорошо изученную магнитогидродинамическую неустойчивость желобкового типа [6]. Однако нас будут интересовать неустойчивости иного типа, не связанные с эффектом силы тяжести, которым мы поэтому будем всюду пренебрегать (за исключением последнего раздела статьи, где учтено влияние слабой силы тяжести на стабилизацию «дрейфовых» неустойчивостей).

В отсутствие поля тяжести ($g = 0$) неустойчивость носит колебательный характер. Везде в дальнейшем при решении задачи на собственные значения мы будем пользоваться лабораторной системой координат, так что частоты в (2.8) следует заменить, согласно соотношению $\omega \rightarrow \omega_* = \omega - (1 + \eta) \times k_{\perp} v_n(x)$ (уравнение (2.8) записано в системе координат, где $E_0 \equiv 0$). Тогда для возмущений в области промежуточных частот ($k_z u_i < \omega_* < k_z u_e$) в сделанных выше предложениях имеем из (2.8)

$$r_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left\{ k_y^2 r_i^2 + \left(1 - \frac{\omega^2 - k_y v_n(x) (1 + \eta) \omega}{k_z^2 V_A^2} \right) \left(1 - \frac{(2 + \eta) k_y v_n(x)}{\omega} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - k_y v_n(x) (1 + \eta)}{|k_z| u_e \omega} [\omega - 2k_y v_n(x) (1 + \eta/4)] \right) \right\} \psi = 0. \quad (3.1)$$

А. Обратимся сначала к случаю потенциальных возмущений ($\text{rot } \mathbf{E} \approx 0$, что справедливо при $\omega_* \ll k_z V_A$). Действительная часть потенциальной энергии $U(x)$ имеет в этом случае форму «ямы»⁴⁾, а мнимая часть $V(x)$ мала, поэтому нужные нам финитные решения всегда существуют. Из-за взаимодействия волны с резонансными электронами ($v_{\parallel} = [\omega - k_y v_n(x) (1 + \eta)] / k_{\parallel}$) амплитуда ее может расти.

Математически это взаимодействие описывается полувычетом в интегралах с электронной функцией распределения. Инкремент неустойчивости можно определить из интегрального условия (1.3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \left\{ k_y v_n(x) (2 + \eta) \frac{\text{Im } \omega}{\text{Re } \omega^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Re } \omega - k_y v_n(x) (1 + \eta)}{|k_z| u_e} \left[1 - \frac{2k_y v_n(x) (1 + \eta/4)}{\text{Re } \omega} \right] \right\} dx = 0, \quad (3.2)$$

которое выражает закон сохранения энергии для системы волна + частицы плазмы. При $X \ll r_i \sqrt{m_i/m_e} |k_z| u_i / \omega_*$ (X — расстояние между нулями функции $U(x)$) применима теория возмущений и в это условие можно подставить решение $\psi_0(x)$ и частоту ω , найденные из уравнения (3.1) в пренебрежении мнимой частью $V(x)$.

Однако мы воспользуемся, как было оговорено во введении, разложением функции $k_y v_n(x)$ в ряд вблизи точки $x = x_0$ ($[n'(x_0)/n]' = 0$). Тогда наше уравнение сведется к уравнению для гармонического осциллятора с энер-

⁴⁾ Здесь и везде в дальнейшем при рассмотрении дрейфовых волн считаем $k_{\perp} v_n > 0$. Как легко видеть из уравнений (3.1), (3.8), случай $k_{\perp} v_n < 0$ совпадает с предыдущим при формальной замене

$$\text{Re } \omega \rightarrow -\text{Re } \omega, \quad \text{Im } \omega \rightarrow \text{Im } \omega, \quad k_{\perp} v_n \rightarrow -k_{\perp} v_n.$$

гией E и частотой Ω (см. (1.7)):

$$E = \frac{1}{2r_i^2} \left[\frac{\omega_0(2+\eta) - \omega}{\omega} (1 - i\gamma) + i\gamma \frac{\omega_0\eta}{2\omega} \right] - \frac{k_y^2}{2},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\omega - (1+\eta)\omega_0}{|k_z|u_e}} \ll 1,$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{r_i^2 R^2} \left\{ \frac{(2+\eta)\omega_0}{\omega} - i\gamma \left[\frac{(2+\eta)\omega_0}{\omega} + \frac{\omega_0^2(1+\eta)\eta}{2\omega(\omega - \omega_0(1+\eta))} - \frac{\omega_0\eta}{2\omega} \right] \right\},$$

$$k_y v_n(x) = \omega_0 \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{R^2} \right).$$

Финитные решения в этом случае выражаются через полиномы Эрмита $H_p(x)$:

$$\Psi_p(x) = (\Omega/\pi)^{1/4} H_p(x\sqrt{\Omega}) 2^{-p/2} (p!)^{-1/2} \exp\{-\Omega x^2/2\} \quad (3.3)$$

(вдали от точек поворота, где несправедливо разложение в ряд, решение (3.3) следует заменить на

$$\Psi_p(x) = \frac{\text{const}}{|U + iV|^{1/4}} \exp\left\{-\int_{z_2}^x \sqrt{U(z, \omega^{(p)}, k) + iV(z, \omega^{(p)}, k)} dz\right\}$$

и соответствуют собственным значениям частоты

$$\omega^{(p)} = \omega_0(2+\eta) + 1/2 i\gamma\eta\omega_0 - k_y^2 r_i^2 \omega_0(2+\eta)(1+i\gamma) - 2r_i R^{-1}(p+1/2)(2+\eta)\omega_0 \{1 - i\gamma [1 + \eta^2/(4+2\eta)]\}^{1/2} (1+i\gamma). \quad (3.4)$$

Из последнего выражения видим, что неустойчивость имеет место при

$$\eta < 4k_y^2 r_i^2 + 4r_i R^{-1}(p+1/2), \quad (3.5)$$

т. е. носит универсальный характер.

Б. Для возмущений, сильно искривляющих силовые линии магнитного поля ($\omega^2 \gg k_z^2 V_A^2$), действительная часть потенциальной энергии имеет форму «горба» при $\eta > -2$. Пользуясь опять разложением функции $k_y v_n(x)$ в ряд, из уравнения (3.1) и результатов раздела 1 получаем, что решения с собственной частотой

$$\omega^{(p)} = \omega_0(2+\eta) + 1/2 i\gamma\eta\omega_0 + k_y^2 r_i^2 k_z^2 V_A^2 \omega_0^{-1} (1+i\gamma) + i2r_i R^{-1}(p+1/2) \sqrt{2+\eta} \{1 - i\gamma [1 + (2\eta^2 + \eta)/(4+2\eta)]\}^{1/2} (1+i\gamma) |k_z| V_A \quad (3.6)$$

нарастают во времени и финитны при

$$\eta < -2k_y^2 r_i^2 k_z^2 V_A^2 / \omega_0^2 - 8r_i R^{-1} (\beta m_i / \pi m_e)^{1/2} (p+1/2) k_z^2 V_A^2 / \omega_0^2 < 0. \quad (3.7)$$

Если же относительный градиент температуры вдвое превышает относительный градиент плотности и противоположен ему ($\eta < -2$), то действительная часть потенциальной энергии имеет опять форму «ям», финитные решения существуют и неустойчивы, а соответствующие собственные значения частоты получаем из (3.6) заменой $\sqrt{\eta+2} \rightarrow i\sqrt{-\eta-2}$.

В. В случае высокочастотных возмущений ($\omega_* \gg k_z u_e$) уравнение (2.8) для рассматриваемой нами не очень редкой плазмы ($\beta \gg m_e/m_i$)

$$r_i^2 \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \left\{ k_y^2 r_i^2 + \frac{m_i}{m_e} \beta \left[\frac{\omega - 2k_y v_n(x)(1+\eta)}{\omega - k_y v_n(x)(1+\eta)} + \right. \right. \quad (3.8)$$

$$\left. \left. + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*^2}{(|k_z|u_e)^3} \left[\omega - 2k_y v_n \left(1 + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta \omega_*^2}{4k_z^2 u_e^2} \right) \right] \exp\left(-\frac{\omega_*^2}{2k_z^2 u_e^2}\right) \right] \right\} \Psi = 0$$

имеет финитные решения (ситуация здесь полностью аналогична пункту А), неустойчивые в интервале (см. [5])

$$-1 \leq \eta < -2 \frac{m_e}{m_i \beta} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_0} \right)^2 k_y^2 r_i^2 + 2 \frac{r_i}{R} \left(\rho + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{2m_e}{m_i \beta} \left(\frac{k_z u_e}{\omega_0} \right)^2}. \quad (3.9)$$

Г. До сих пор мы рассматривали лишь раскачку «дрейфовых» волн с фазовой скоростью ω/k_z , сильно отличающейся от альфвеновской V_A , так что границы «потенциальной ямы» определялись точками обращения в нуль функции $\omega - (2 + \eta) k_y v_n(x)$ при примерно постоянном значении множителя $(k_{\parallel}^2 V_A^2 - \omega^2 + k_y v_n(1 + \eta)\omega)$. В общем случае ($\omega \sim k_z V_A$) можно для качественного исследования устойчивости воспользоваться уравнениями (1.6), которые дают

$$(\omega - \omega_1(x)) (\omega - \omega_2(x)) (\omega - \omega_{др}(x)) = \text{Re } k_{\perp}^2 r_i^2 k_z^2 V_A^2 \omega, \quad (3.10)$$

$$- \text{Im } \omega \equiv \nu = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega - k_y v_n(1 + \eta)) (\omega - \omega_{др}(x) + \frac{1}{2} k_y v_n \eta)}{|k_z| u_e} \times \\ \times \left(1 + \frac{(\omega - \omega_{др}(x)) (\omega^2 + k_z^2 V_A^2)}{\omega (\omega - \omega_1(x)) (\omega - \omega_2(x))} \right)^{-1},$$

$$\omega_{1,2}(x) = \frac{1 + \eta}{2} k_y v_n(x) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4k_z^2 V_A^2}{k_y^2 v_n^2 (1 + \eta)^2}} \right\}, \quad \omega_{др}(x) \equiv k_y v_n(x) (2 + \eta).$$

Как мы уже отметили, качественное отличие от предыдущих пунктов возникает лишь, если частота может стать равной частотам $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ в какой-то точке x и, следовательно, множитель $(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)$ меняет в этой точке знак.

1. Пусть $\omega = \omega_1(x)$ в некоторой точке. Тогда «потенциальная яма» возникает, как легко видеть из уравнения (3.1), в области, где $\omega < \omega_{др}(x)$, $\omega < \omega_1(x)$, $\omega(\omega - \omega_2(x)) > 0$. При отсутствии градиента температуры из (3.10) получаем, что неустойчивость заведомо имеет место при $\omega > k_y v_n(x_0)$ (это неравенство выполняется, например, для близко расположенных нулей функции $\omega - \omega_1(x)$).

Предельный случай, когда частота близка к $\omega_{др}(x_0)$, соответствует обычной «дрейфовой волне», и поэтому инкременты с точностью до коэффициентов порядка единицы совпадают с инкрементами пункта А.

Здесь мы рассмотрим лишь раскачку волны с частотой $\omega \approx \omega_1(x_0)$. Тогда, воспользовавшись разложением функции $n'(x)/n$ в ряд, получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left\{ -k_y^2 - \frac{2}{k_z^2 V_A^2 r_i^2} \left[\omega - \omega_1(x_0) + (1 + \eta) \omega_0 \frac{2 + \alpha^2 + 2 \sqrt{1 + \alpha^2} x^2}{4 \sqrt{1 + \alpha^2} R^2} \right] \times \right. \\ \times \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}} (\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0)) \times \\ \left. \times \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1(x_0) - \omega_0(1 + \eta)}{|k_z| u_e} \left(1 - \frac{\omega_0 \eta}{2(\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0))} \right) \right] \right\} \psi = 0, \quad (3.11)$$

$$\alpha = 2k_z V_A / (1 + \eta) k_y v_n(x_0).$$

Если $\eta > -1$, то финитные решения удается построить лишь при $|k_z| V_A < \sqrt{2 + \eta} \omega_0$ (тогда действительная часть потенциальной энергии $U(x)$ имеет форму ямы).

Из выражения для собственной частоты, отвечающей финитному решению⁵⁾,

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1(x_0) - k_y^2 r_i^2 \frac{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2 \sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{k_z^2 V_A^2}{\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0)} (1 + i\gamma_1) - \\ &- \frac{r_i}{2R} \sqrt{2(1 + \eta)} \frac{\sqrt{2 + \alpha^2 + 2\sqrt{1 + \alpha^2}}}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \frac{|k_z| V_A \sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha^2}}}{\sqrt{\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0)}} \left(1 + \frac{i\gamma_1}{3}\right), \quad (3.12) \\ \gamma_1 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_1(x_0) - \omega_0(1 + \eta)}{|k_z| u_e} \left[1 - \frac{\eta \omega_0}{2(\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0))}\right], \end{aligned}$$

получаем границы неустойчивости:

$$-1 < \eta < 2 [\omega_{др}(x_0) - \omega_1(x_0)] / \omega_0.$$

Заметим, что теперь малость $k^2 r_i^2$ не входит в выражение для границы неустойчивости. Это происходит из-за того, что новые «точки поворота» (нули функции $\omega - \omega_1(x)$) ограничивают область локализации волны лишь областью сильной раскачки ее электронами. Максимальное значение температурного градиента, при котором есть неустойчивость, достигается при $|k_z| V_A \ll \omega_0$ и равно $\eta = 2$ (инкременты неустойчивости при этом падают, как $(|k_z| V_A \omega_0^{-1})^3$).

В случаях, когда $|k_z| V_A > \sqrt{2 + \eta} \omega_0$ или $\eta < -1$, потенциальная энергия $U(x)$ имеет форму «горба» и финитные решения затухают во времени (для нарастающих решений для обеспечения их финитности нужен противоположный знак мнимой части V , см. Введение).

2. Рассмотрим далее случай $\omega = \omega_2(x)$. При $\eta > -1$ потенциальная яма теперь имеется в области, где $\omega < \omega_2(x)$, $\omega < 0$ и, как следует из (3.10), такая волна затухает со временем. Если $-2 < \eta < -1$, то $\omega > 0$ и «яма» возникает в области между корнями уравнений

$$\omega - \omega_2(x_1) = 0, \quad \omega - \omega_{др}(x_2) = 0.$$

Аппроксимировать эту «яму» осциллятором сложно, и мы рассмотрим наиболее простой случай совпадающих частот $\omega_2(x)$, $\omega_{др}(x)$ ($k_z V_A^* = \sqrt{2 + \eta} k_y v_n$).

Из уравнения (3.10) получаем собственные частоты

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{др}(x) \pm \operatorname{Re} k_{\perp} r_i \sqrt{\frac{2 + \eta}{3 + \eta}} |k_z| V_A + \\ &+ i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{k_y v_n^2}{|k_z| u_e} \left(\frac{\eta}{2} \pm \operatorname{Re} k_{\perp} r_i \frac{|k_z| V_A}{k_y v_n} \right), \quad (3.13) \end{aligned}$$

из которых видно, что в этой области η плазма неустойчива. Если $\eta < -2$, то область локализации волны ограничена корнями уравнения $\omega = \omega_2(x)$

⁵⁾ Несколько больший, чем в (3.4), (3.12) инкремент

$$(v = \sqrt{\pi/12} k_y v_n k_{\perp} r_i V_A / u_e)$$

получается из (3.10) при совпадении частот $\omega_1(x) = \omega_{др}(x)$ и $T(x) \equiv \text{const}$ [4].

и, как видно из (3.10), неустойчивость имеет место при

$$-1 - \sqrt{9 - 4k_z^2 V_A^2 / k_y^2 v_n^2} < \eta < -2.$$

Дальше всего в область $\eta < 0$ граница неустойчивости отодвигается при $k_z V_A \ll k_y v_n$ ($\eta_{\text{гр}} = -4$). Решение уравнения ($\omega \approx \omega_2(x_0)$)

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left\{ -k_y^2 + \frac{2}{(k_z V_A)^4} \left[\omega + \frac{k_z^2 V_A^2}{\omega_0 (1 + \eta)} \left(1 + \frac{x^2}{R^2} \right) \right] \omega_0^4 (1 + \eta)^2 \left(1 + \frac{\eta}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0}{|k_z| u_e} \frac{(1 + \eta)(4 + \eta)}{2(2 + \eta)} \right] \right\} \psi = 0, \quad (3.14)$$

справедливого в этом случае, подтверждает этот вывод. Общая область неустойчивости по параметру η для последнего случая ($\omega_* \sim k_z V_A$) дается выражением $-4 < \eta < 2^6$.

Итак, в случае, когда силовые линии магнитного поля параллельны $|d\theta/dx \equiv 0|$, плазма действительно оказывается «универсально» неустойчивой. При этом раскачиваются возмущения с длинами волн порядка $\lambda_x \gg r_i$ и фазовыми скоростями $u_i < \omega_*/k_z \ll V_A$. Инкременты неустойчивости даются выражениями (3.5), (3.12). Возмущения с фазовыми скоростями $\omega_*/k_z > V_A$ также могут раскачиваться в неоднородной плазме, но уже при наличии градиента температуры (т. е. неустойчивость относительно этих возмущений не носит «универсального» характера).

Поскольку в этом разделе изучалась устойчивость относительно сильно вытянутых вдоль силовых линий возмущений ($k_{\parallel} \ll k_{\perp}$), то разумно в дальнейшем рассмотреть влияние малой непараллельности силовых линий магнитного поля, которая вызывает нарушение этого необходимого для существования неустойчивости условия ⁷⁾.

4. Устойчивость неоднородной разреженной плазмы в магнитном поле с непараллельными силовыми линиями

Влияние непараллельности (Shear) силовых линий магнитного поля (ниже пишем для краткости НСЛ) можно представить в виде действия двух стабилизирующих неустойчивость эффектов.

1. При наличии НСЛ еще существуют финитные решения, отвечающие локализованным возмущениям, но уже не удастся выполнить условие малости взаимодействия волновых возмущений с ионами:

$$\frac{\omega_*}{k_{\parallel}(x)} > u_i, \quad k_{\parallel}(x) = k_z + k_y \int \frac{d\theta}{dx} dx$$

во всей области локализации возмущения. Это приводит к тому, что неустойчивость относительно раскачки «дрейфовых» волн с фазовыми скоростями $u_i < \omega_*/k_{\parallel} < V_A$ теряет свою «универсальность» и уже не существует в отсутствие градиента температуры при условии ⁸⁾:

$$\int \frac{d\theta}{dx} dx > \frac{\omega_*}{k_y u_i} \sim \frac{r_i}{R}. \quad (4.1)$$

Здесь интегрирование идет по области локализации возмущений.

⁶⁾ В работе Михайловского и Рудакова [4] границы этой области приведены неверно: $0 < \eta < 2$.

⁷⁾ Это условие также нарушается в коротких системах длиной $L < (10 \div 15)R$, где неустойчивость отсутствует.

⁸⁾ Стабилизация «дрейфовой» неустойчивости поворотом силовых линий была предложена Розенблютом [7].

2. Область локализации возмущений при появлении НСЛ меняется так, что в ней всегда можно пренебречь взаимодействием с ионами. Стабилизация таких возмущений заключается в том, что из-за НСЛ потенциальная «яма» $U(x)$ сужается и при условии

$$\lambda_x \gg \Delta X, \tag{4.2}$$

где λ_x — длина волны возмущений, ΔX — ширина ямы, становится невозможным существование локализованных в ней возмущений (математически это означает невозможность построения финитных решений).

При рассмотрении влияния НСЛ на раскачку «дрейфовых» волн следует иметь в виду, что область непотенциальности возмущений ($\omega_* > k_{\parallel} V_A$) занимает узкий интервал Δx_n всей области локализации ($\Delta x_n \sim (\omega_* / k_{\parallel} V_A) dx/d\theta$) уже при условии $Rd\theta/dx > \sqrt{\bar{\nu}} r_i / R$.

Вне этого интервала возмущения можно считать потенциальными, так что «яма» $U(x)$, в основном, определяется уравнением (3.1). Раскачка «дрейфовых» волн с частотами в интервале $k_{\parallel} u_i < \omega_* < k_{\parallel} u_e$ возможна лишь, если в области локализации имеют место неравенства

$$k_{\perp} v_n (1 + \eta) < \omega < k_{\perp} v_n (2 + \eta/2)$$

(см. (3.10)) и в ней можно пренебречь взаимодействием волны с ионами.

Влияние ионов на раскачку волны можно учесть при помощи интегрального условия (1.3) и уравнения (2.8) для интервала частот $k_{\parallel} u_i < \omega_* < k_{\parallel} u_e$ с учетом поправок в интегралах

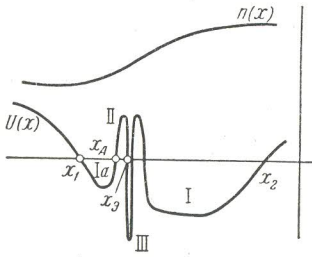


Рис. 2

$$\int \frac{\tilde{f}_i^{(0)}}{\omega_* + k_{\parallel} v_{\parallel}} dv_{\parallel}$$

с ионной функцией распределения, которые описывают взаимодействие резонансных ионов ($v_{\parallel} = -\omega_*/k_{\parallel}$) с дрейфовой волной:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{(2 + \eta) k_{\perp} v_n}{\text{Re } \omega} \text{Im } \omega - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Re} \frac{\omega - (1 + \eta) k_{\perp} v_n}{|k_{\parallel} u_e|} \left[\omega - \left(2 + \frac{\eta}{2} \right) k_{\perp} v_n + k_{\parallel} v_e^{(0)} + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\omega - \frac{k_{\perp} v_n \eta}{2} \left(3 - \frac{\omega_*^2}{k_{\parallel}^2 u_i^2} \right) \right) \exp \left(-\frac{\omega_*^2}{2k_{\parallel}^2 u_i^2} \right) \right] \right\} |\psi|^2 dx = 0. \tag{4.3}$$

Последнее выражает тот факт, что баланс энергии волны определяется работой электрического поля волны во всей области ее локализации. Из этого выражения видно, что в отсутствие градиентов температуры взаимодействие с ионами приводит к затуханию волны, если на длине порядка размеров локализации фазовая скорость ω/k_z сравнивается с u_i . Если же фазовая скорость еще достаточно велика ($\omega_*/k_{\parallel} > \sqrt{3}u_i$) и, следовательно, в фазе с волной находятся ионы только на хвосте максвелловского распределения, то такое взаимодействие раскачивает волну при достаточно больших градиентах температуры, направленных противоположно градиенту плотности. Из критерия стабилизации (4.1) следует, что труднее всего стабилизируются возмущения с малой областью локализации Δx . Это имеет место, когда интервал непотенциальности ($k_{\parallel}(x) < \omega_*/V_A$), ограничивающий область локализации с одной из сторон (см. рис. 2), подходит близко к точке поворота x_1 (или x_2).

С учетом членов разложения порядка $k_{\parallel}^2 u_i^2 / \omega_*^2$ «яма» $U(x)$ имеет вид (ср. 3.1)

$$U(x) \approx k_{\perp}^2 r_i^2 + \left[\left(1 - \frac{k_{\parallel}^2 u_i^2}{\omega_*^2} \right) - \frac{(2 + \eta) k_{\perp} v_n}{\omega} \right] \left[1 + \frac{k_{\parallel}^2 u_i^2}{\omega_*^2} \left(1 + \frac{\eta k_{\perp} v_n}{\omega} \right) \right]^{-1}$$

и расширяется до размеров $\Delta x \sim R$ при НСЛ:

$$R d\theta/dx > 1/2 r_i R^{-1} \sqrt{R/\Delta x_1}, \quad (4.4)$$

$$\Delta x_1/R = [(2 + \eta) k_{\perp} v_n(x_A) - \omega (1 + k_{\perp}^2 r_i^2)]/\omega$$

(это происходит за счет быстрого роста $k_{\parallel}(x)$). При этом, согласно (4.1), происходит стабилизация неустойчивости.

Подставляя сюда из условия (4.2) отсутствия финитных решений $\Delta x_1 > \lambda_x = r_i/\sqrt{U}$ минимальное Δx_1 , равное $\Delta x_1 \sim r_i^{2/3} R^{1/3}$, получим критическую величину НСЛ:

$$R d\theta/dx > (r_i/R)^{2/3} \quad (4.5)$$

(если НСЛ порядка (4.5), то в «яме» $U(x)$ с $\Delta x_1 < r_i^{2/3} R^{1/3}$ не укладывается ни одна длина волны, и финитных решений не существует).

При малых β для стабилизации этих возмущений достаточно более мягкое условие, чем (4.5). Это связано с тем, что потенциальный барьер II (рис. 2) сужается и становится «прозрачным». Тогда область локализации возмущений уже не ограничена узкой ямой Ia вблизи точки поворота x_1 , а охватывает также яму I, где велико стабилизирующее ионное затухание. Таким образом, условие стабилизации по-существу совпадает с условием прозрачности барьера II.

Из условия прозрачности (см. рис. 2)

$$\frac{2}{r_i} \int_{x_3}^{x_A} \sqrt{U(x)} dx < 1$$

получим, принимая во внимание, что

$$U(x) = \frac{\omega - (2 + \eta) k_{\perp} v_n}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2 - k_{\perp} v_n (1 + \eta) \omega}{k_{\parallel}^2(x) V_A^2} \right),$$

где $x_{A,3}$ есть границы барьера и по порядку величины равны

$$x_A \sim (r_i \sqrt{\beta}/R) dx/d\theta, \quad x_3 \sim \sqrt{m_e/m_i \beta} x_A,$$

что для стабилизации достаточно, чтобы

$$R d\theta/dx \gtrsim \sqrt{\Delta x_1/R} \sqrt{3\beta} (\ln(2x_A/x_3) - 1). \quad (4.6)$$

Максимально возможная ширина «ямы» Ia Δx_1 для данной НСЛ, при которой еще в ней самой мало «ионное затухание», определяется условием, обратным (4.4), т. е. для $\sqrt{\Delta x_1/R} < r_i R^{-2} dx/d\theta$ и $(r_i/R)^2 < \beta < (r_i/R)^{2/3}$ раньше происходит стабилизация из-за прозрачности барьера при

$$R d\theta/dx > (r_i/R)^{1/2} (3\beta)^{1/4} \ln 2 \sqrt{m_i \beta/m_e} - 1^{1/2}. \quad (4.7)$$

При больших $\beta \sim 1$, наоборот, стенка II не очень отвесная и яма Ia мельче, поэтому при большей ширине ямы $\Delta x < r_i/\sqrt{U} \sim r_i R/\Delta x$ исчезают

финитные решения и критерий стабилизации по порядку величины есть

$$Rd\theta/dx > (r_i/R)^{3/4}. \quad (4.8)$$

Таким образом, величина НСЛ, стабилизирующей потенциальные возмущения, существенно зависит от $\beta = 8\pi n_0 T/H_0^2$. Эта зависимость представлена на рис. 3.

Поскольку при наличии НСЛ фазовая скорость пробегает практически весь интервал от u_i до ∞ , то возникают дополнительные потенциальные «ямы» при $\omega_*/u_e < k_{\parallel}(x) < \omega_*/V_A$ и $k_{\parallel}(x) < \omega_*/u_e$. Если интервал непотенциальности ($k_{\parallel} < \omega_*/V_A$) находится в области $\omega > (2 + \eta) k_{\perp} v_n$, то яма $U(x)$ возникает при $\omega_*/u_e < k_{\parallel} < \omega_*/V_A$ и описывается в общем случае интегро-дифференциальным уравнением, которое в случае $kr_i \ll 1$ переходит в дифференциальное уравнение второго порядка (3.1), а при $kr_i \gg 1$ в уравнение

$$r_i^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left\{ k_{\perp}^2 r_i^2 - \frac{[\omega - k_{\perp} v_n (1 + \eta)]^2 - k_{\perp}^2 v_n^2}{2k_{\perp}^2 V_A^2 (d\theta/dx)^2 x^2} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{(\omega - \eta k_{\perp} v_n)^2 [\omega - (2 + \eta/2) k_{\perp} v_n]}{\omega_*^2 - k_{\perp}^2 v_n^2} \frac{1}{|k_{\parallel}| u_e} \right] \right\} \psi = 0, \quad (4.9)$$

где мы предположили линейную зависимость $k_{\parallel} = x k_{\perp} d\theta/dx$.

Из интегрального условия (1.3) получаем инкремент ν в виде (3.10) для (3.1) и

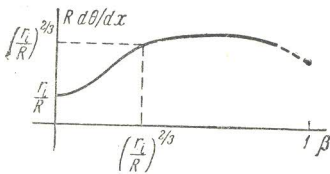


Рис. 3

$$\nu = \sqrt{\frac{\pi}{32}} \frac{(\omega - \eta k_{\perp} v_n)^2}{|k_{\parallel}| u_e} \frac{\omega - (2 + \eta/2) k_{\perp} v_n}{\omega - (1 + \eta) k_{\perp} v_n}$$

для (4.9). В обоих этих случаях граница неустойчивости дается выражением

$$\eta < -2 [\omega - k_{\perp} v_n (2 + \eta) + k_{\parallel} v_e^{(0)}] / k_{\perp} v_n < 0, \quad (4.10)$$

так как точка $x^{(p)}$ в (1.6) лежит в области локализации $\psi(x)$, где $\omega > (2 + \eta) k_{\perp} v_n$ (см. (4.9); напомним, что, согласно примечанию 4), $k_{\perp} v_n > 0$).

В области локализации возмущений всегда можно пренебречь ионным затуханием Ландау, и поэтому стабилизация неустойчивости происходит лишь за счет «выдавливания» уровней при сильном сужении ямы. Уравнения (3.1) и (4.9) принадлежат к виду

$$d^2\psi/dx^2 + (-k_y^2 + \kappa^2/x^2) \psi = 0, \quad (4.11)$$

где

$$\kappa^2 = (\omega_*^2 - k_{\perp}^2 v_n^2) / 2k_{\perp}^2 r_i^2 V_A^2 (d\theta/dx)^2$$

можно считать постоянной для рассматриваемой нами большой НСЛ.

Уравнение (4.11) имеет формальное решение:

$$\psi = \psi^{(0)} \sqrt{x} K_{i\nu}(k_{\perp} x), \quad \nu = \sqrt{\kappa^2 - 1/4},$$

где $K_{i\nu}(k_{\perp} x)$ — функция Макдональда с мнимым индексом. При $\nu^2 > 0$ число нулей этого решения вблизи $x = 0$ бесконечно и решение, затухающее на бесконечности, можно свить с любым решением вблизи $x = 0$. При $\nu^2 < 0$ этого сделать не удастся. Это условие отсутствия финитных решений ($\kappa^2 < 1/4$) и условие неустойчивости (4.10) дают нам величину НСЛ, стабили-

вирующей неустойчивость при заданном градиенте температуры η :

$$Rd\theta/dx > \sqrt{\beta |\eta|}, \quad \eta < -(2r_i/R)^{2/3}, \quad (4.12)$$

где граница имевшейся неустойчивости определяется по минимальной величине разности $(\omega - (2 + \eta) k_{\perp} v_n)/\omega$ в области «ямы», которая достигается тогда, когда точка x_2 обращения в нуль этой разности является точкой поворота (при этом точка x_2 попадает на рис. 4 в область II).

Наконец, вкратце остановимся на высокочастотных возмущениях в яме III рис. 2, возникающей вблизи точки $x_0 [k_{\parallel}(x_0) = 0]$ при $2k_{\perp} v_n(x_0)(1 + \eta) > \omega$. Эти возмущения как при $kr_i \ll 1$, так и при $kr_i \gg 1$ (для $\beta \gg m_e/m_i$) описываются уравнением (3.8). Из последнего при помощи (1.3) получаем инкремент неустойчивости

$$\nu = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*^4}{|k_{\parallel}|^3 u_e^3} \frac{\omega - 2(1 + \eta) k_{\perp} v_n - 1/2 \eta k_{\perp} v_n (3 - \omega_*^2/k_{\parallel}^2 u_e^2)}{k_{\perp} v_n (1 + \eta)} \exp \left\{ -\frac{\omega_*^2}{2k_{\parallel}^2 u_e^2} \right\}.$$

Используя вытекающее отсюда условие неустойчивости и условие отсутствия финитных решений ($\Delta x < \lambda_x$), совершенно аналогично предыдущему случаю получаем величину стабилизирующей НСЛ:

$$Rd\theta/dx > \sqrt{\beta |\eta|}, \quad (4.13)$$

$$-1 < \eta < -(m_e/\beta m_i)^{1/3} (r_i/R)^{2/3}.$$

В заключение этого раздела следует рассмотреть влияние силы тяжести на стабилизацию неустойчивости (роль такой эффективной силы тяжести в магнитных ловушках, как известно, играет центробежная сила инерции, возникающая при движении частиц вдоль искривленной силовой линии магнитного поля, т. е. $g_{\text{эфф}} = v_{\perp}^2/r$ (r — радиус кривизны силовых линий)). При этом ограничимся наиболее интересным случаем, когда дрейф частиц за счет неоднородности плотности и температуры значительно больше дрейфа в поле тяжести ($g_{\text{эфф}} \ll u_e^2/R$).

На непотенциальные возмущения ($\omega_* \gg k_{\perp} V_A$) поле тяжести не влияет, так как для них уравнение (2.8) расщепляется на уравнения для «желобковой» и «дрейфовой» неустойчивостей. Для потенциальных же возмущений с частотой ω порядка $k_{\perp} v_n$ можно пренебречь членом

$$(k_{\perp}^2 r_i^2 g/k_{\parallel}^2 V_A^2) n'/n$$

по сравнению с

$$(\bar{d}^2/dx^2 - k_{\perp}^2) r_i^2 \psi,$$

и уравнение для возмущений в области частот $k_{\parallel} u_i < \omega_* < k_{\parallel} V_A^{\text{я}}$ примет вид

$$r_i^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \left\{ k_{\perp}^2 r_i^2 \left(1 - \frac{gn'/n}{\omega^2 - k_{\perp} v_n (1 + \eta) \omega} \right) + 1 - \frac{(2 + \eta) k_{\perp} v_n}{\omega} - \right.$$

$$\left. - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_*}{|k_{\parallel}| u_e} \left[1 - \frac{(2 + \eta/2) k_{\perp} v_n}{\omega} \right] \right\} \psi = 0.$$

В этом уравнении появился только один малый член $\sim k_{\perp}^2 r_i^2 gn'/\omega^2 n \ll 1$ по сравнению с (3.2). Для качественного учета его влияния достаточно воспользоваться разложением $n'(x)/n$ в ряд. Тогда задача становится полностью аналогичной рассмотренной в разделе 3, А, и, в частности, при

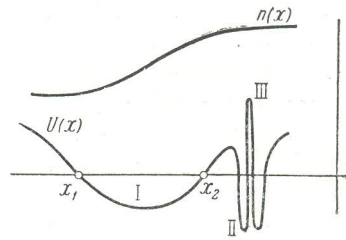


Рис. 4

$d\theta/dx \equiv 0$ спектр частот возбуждаемых колебаний имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^{(p)} = & (2 + \eta) \omega_0 + \frac{i\gamma\eta\omega_0}{2} - (2 + \eta) \omega_0 k_{\perp}^2 r_i^2 (1 + i\gamma) + \\ & + \frac{k_{\perp}^2 r_i^2 g n'(x_0)/n}{\omega - \omega_0 (1 + \eta)} (1 + i\gamma) - \frac{2r_i}{R} \left(p + \frac{1}{2}\right) \left[(2 + \eta) \times \right. \\ & \left. \times \omega_0 \left\{ 1 + \frac{k_{\perp}^2 r_i^2 g n'(x_0)/n}{[\omega - \omega_0 (1 + \eta)]^2} - i\gamma \left[1 + \frac{\eta^2}{4 + 2\eta} \right] \right\}^{1/2} (1 + i\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда легко видеть, что слабое поле тяжести может расширить границы неустойчивости:

$$\eta < 4k_y^2 r_i^2 + 4r_i R^{-1} (p + 1/2) - \omega_0^{-2} k_{\perp}^2 r_i^2 g n'(x_0)/n,$$

если $g n'/n < 0$, однако это влияние на устойчивость поле тяжести осуществляет через изменение собственных частот колебаний плазмы, тогда как характер нарастания по-прежнему определяется взаимодействием волны с электронами и ионами. Отсюда ясно, что увеличение ионного затухания по мере уменьшения фазовой скорости волны вдоль силовых линий магнитного поля ω/k_{\parallel} опять приведет к стабилизации этой неустойчивости при условии (4.5), т. е. учет слабой силы тяжести не влияет на стабилизацию неустойчивости от непараллельности силовых линий.

Итак «универсальная» неустойчивость относительно потенциальных возмущений $k_z u_i < \omega_* < k_z V_A$ заведомо стабилизируется при условии $R d\theta/dx > (r_i/R)^{3/2}$, а неустойчивость относительно непотенциальных возмущений, имеющаяся только при наличии градиента температуры ($d \ln T / d \ln n < 0$), стабилизируется при условии $R d\theta/dx > \sqrt{\beta}$.

В заключение автор благодарит академика М. А. Леонтовича за интерес к работе и обсуждение на семинаре, стимулировавшие написание статьи, Р. З. Сагдеева за постоянный интерес к работе и ценные дискуссии.

Новосибирский
Государственный университет

Поступила в редакцию
26 ноября 1962 г.

Литература

- [1] Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР, **138**, 581, 1961; Ядерный синтез, Приложение, ч. 2, 481, 1961.
- [2] Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев. ДАН СССР, **135**, 581, 1962.
- [3] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. Препринт ИЯФ, Новосибирск, 1962.
- [4] А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков. Препринт ИАЭ, Москва, 1962.
- [5] В. Г. Давидовский. Атомн. энерг. (в печати).
- [6] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker. Nuclear Fusion, Supl. **1**, 75, 1962.
- [7] M. Rosenbluth, R. Sagdeev. Conf. of Plasma Stability, Harwell, 17—22 Sept. 1962.
- [8] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, **1**, 82, 1962.

THEORY OF STABILITY OF AN INHOMOGENEOUS RAREFIED PLASMA IN A STRONG MAGNETIC FIELD.

A. A. Galeev

The stability of an inhomogeneous plasma is considered. A method for constructing finite solutions corresponding to localized perturbations is presented. It is shown that there is a correspondence to the results of application of the rough quasiclassical theory to the same problem [1-5]. The shearing effect of magnetic lines of force is taken into account; this effect leads to stabilization of a «universal» instability of an inhomogeneous rarefied plasma when particle collisions can be neglected.