

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ОБРАЗОВАНИЮ ПАР СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

В. В. Соколов

В дваждылогарифмическом приближении просуммирован ряд теории возмущений для процесса образования пары π -мезонов в электрон-позитронных столкновениях.

Байером и Хейфецем [1] показано, что учет радиационных поправок к сечению рождения пары фермионов при электрон-позитронных столкновениях приводит к характерному изменению поведения сечения вблизи порога реакции. Вычисление радиационных поправок проводилось ими в так называемом дваждылогарифмическом приближении [2, 3]. В настоящей статье аналогичное рассмотрение проводится для случая рождения пары скалярных мезонов. Оказывается, что отмеченное в [1] изменение поведения сечения на пороге имеет место и в этом случае.

Конкретное рассмотрение удобно проводить в формулировке Дэффина — Кеммера, обнаруживающей большое формальное сходство с формализмом обычной спинорной электродинамики. В частности, класс возможных диаграмм скалярной электродинамики в указанной формулировке совпадает с классом диаграмм электродинамики фермионов.

Для иллюстрации применения дваждылогарифмического метода к случаю скалярной электродинамики вычислим требующуюся нам в дальнейшем вершинную функцию $\Gamma_\sigma(p, q; l) = \beta_\sigma + \Lambda_\sigma(p, q; l)$, считая, что

$$p^2 = q^2 = \mu^2, \quad l^2 \approx -2(pq) \gg p^2, q^2.$$

В первом порядке теории возмущений

$$\Lambda_\sigma^{(2)}(p, q; l) = \frac{e^2}{\pi i} \int \beta_\nu G^\pi(p-k) \beta_\sigma G^\pi(q-k) \beta_\nu k^{-2} d^4k,$$

$$G^\pi(q) = \frac{\hat{q} + \mu + (\hat{q}^2 - q^2)/\mu}{q^2 - \mu^2} = \frac{\hat{q}(\hat{q} + \mu)}{\mu(q^2 - \mu^2)} - \frac{1}{\mu}, \quad (1)$$

$$\hat{q} = \beta_\nu q_\nu, \quad \beta_\nu \beta_\sigma \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\sigma \beta_\nu = \beta_\nu g_{\sigma\lambda} + \beta_\lambda g_{\sigma\nu},$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Мы выбрали здесь наиболее удобную при практических расчетах фейнмановскую калибровку.

Как и в случае спинорной электродинамики, $\Lambda_\sigma^{(2)}(p, q; l)$ имеет однологарифмическую ультрафиолетовую расходимость. Очевидно, (1) можно переписать в виде

$$\Lambda_\sigma^{(2)}(p, q; l) = \frac{e^2}{\pi i} \left\{ \int \frac{\beta_\nu \mu^{-1} (\hat{p} - \hat{k}) (\hat{p} - \hat{k} + \mu) \beta_\sigma \mu^{-1} (\hat{q} - \hat{k}) (\hat{q} - \hat{k} + \mu) \beta_\nu}{[(p-k)^2 - \mu^2][(q-k)^2 - \mu^2] k^2} d^4k + \right.$$

$$+ \frac{\beta_\sigma}{\mu^2} \int \frac{d^4k}{k^2} - \frac{1}{\mu} \left[\int \frac{\beta_\nu \mu^{-1} (\hat{p} - \hat{k}) (\hat{p} - \hat{k} + \mu) \beta_\sigma \beta_\nu}{[(p-k)^2 - \mu^2] k^2} d^4k + \right.$$

$$\left. \left. + \int \frac{\beta_\nu \beta_\sigma \mu^{-1} (\hat{q} - \hat{k}) (\hat{q} - \hat{k} + \mu) \beta_\nu}{[(q-k)^2 - \mu^2] k^2} d^4k \right] \right\}. \quad (2)$$

Так как дваждылогарифмическую часть имеет только первый интеграл, остальные в нашем приближении можно опустить. При этом следует отметить, что в силу принятого нами способа разбиения мезонной функции Грина на два слагаемых этот интеграл имеет квадратичную расходимость в области больших виртуальных импульсов. Однако эта расходимость сокращается с квадратично расходящимися частями третьего и четвертого интегралов. Вследствие указанных причин ее можно не принимать во внимание, считая основными дваждылогарифмические члены.

Для выделения последних вводим, как обычно [3], переменные u , v и x , значение которых заключается в том, что они делают главные члены в знаменателе линейными по переменным интегрирования:

$$\begin{aligned} k &= p \frac{a^2 u - av}{a^2 - 1} + q \frac{a^2 v - au}{a^2 - 1} + k_{\perp}, \\ a &= (pq)/\mu^2, \quad -k_{\perp}^2 = x > 0; \\ (p - k)^2 - \mu^2 &\sim -2(pq)v, \quad (q - k)^2 - \mu^2 \sim -2(pq)u. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя по x , следует брать вычет в точке $k^2 = 0$, что дает множитель $(-i\pi)$. Области интегрирования по u и v определяются неравенствами

$$\begin{aligned} \frac{\mu\Delta\mu}{(pq)} \ll u \ll 1, \quad \frac{\mu\Delta\mu}{(pq)} \ll v \ll 1; \\ v/(a + \sqrt{a^2 - 1}) \leq u \leq v(a + \sqrt{a^2 - 1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Параметр $\Delta\mu$, определяемый равенством $p^2 - \mu^2 = 2\mu\Delta\mu$, введен для устранения логарифмической инфракрасной расходимости в (2).

Опуская всюду в числителе малые \hat{k} (их наличие уменьшает степень логарифмичности интеграла), получаем

$$\Lambda_{\sigma}^{(2)}(p, q; l) = \frac{e^2}{\pi i} \int \frac{\beta_{\mu} \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) \beta_{\sigma} \mu^{-1} \hat{q} (\hat{q} + \mu) \beta_{\nu}}{[(p - k)^2 - \mu^2][(q - k)^2 - \mu^2] k^2} d^4 k. \quad (5)$$

Предположим, что импульсы p и q относятся к реальным частицам. Тогда представляет интерес не сама функция $\Lambda_{\sigma}^{(2)}$, а ее матричный элемент $\bar{\varphi}(p) \Lambda_{\sigma}^{(2)} \varphi(q)$, входящий в сечение процесса (рассеяния на несвободном фотоне). Но, как нетрудно убедиться, используя свойства β -матриц

$$\bar{\varphi}(p) \beta_{\mu} \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) = 2p \bar{\varphi}(p), \quad \mu^{-1} \hat{q} (\hat{q} + \mu) \beta_{\nu} \varphi(q) = 2q \varphi(q) \quad (6)$$

($p^2 = q^2 = \mu^2$). Поэтому числитель в (5) можно заменить на $4(pq)\beta_{\sigma}$. Интеграл (5) в рассматриваемой области вычислен Абрикосовым [3] (формула (26a)).

Рассмотрим теперь n -е приближение теории возмущений. Числитель в члене максимальной логарифмичности, соответствующем одной из диаграмм этого порядка, имеет вид

$$\beta_{\nu_1} \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) \beta_{\nu_2} \dots \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) \beta_{\sigma} \mu^{-1} \hat{q} (\hat{q} + \mu) \dots \beta_{\nu_n} \mu^{-1} \hat{q} (\hat{q} + \mu) \beta_{\nu_{n+1}}.$$

Заметим теперь, что

$$\mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) \beta_{\mu} \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu) = 2p \mu^{-1} \hat{p} (\hat{p} + \mu). \quad (7)$$

Считая снова, что импульсы p и q относятся к реальным частицам и исполь-

зую (6) и (7), приходим к заключению, что рассматриваемый числитель можно заменить на $[4(pq)]^n \beta_\sigma$.

Таким образом, как и в случае спинорной электродинамики,

$$\bar{\psi}(p) \Gamma_\sigma(p, q; l) \psi(q) = \bar{\psi}(p) \beta_\sigma \psi(q) \exp\{-e^2 f / 2\pi\}, \quad (8)$$

где

$$f = \int \frac{du dv}{u v} \quad (9)$$

в пределах, указанных в (4).

Здесь следует, по-видимому, отметить, что в отличие от обычной электродинамики, где масса электрона расходится логарифмически, масса мезона в скалярной электродинамике имеет квадратичную расходимость. Это обстоятельство следует учесть при вычислениях с дваждылогарифмической точностью. Именно, следует сначала произвести перенормировку массы мезона и пользоваться такой перенормированной по массе функцией Грина мезона. Остальные расходящиеся члены функции Грина будут в силу тождества Уорда сокращаться с соответствующими членами вершины, так что мы можем пользоваться для внутренних линий «необросшими» функциями с перенормированной массой.

Рассмотрим теперь рассеяние с излучением реальных квантов. Перечеркнутой мезонной линии в обобщенной диаграмме Абрикосова соответствует, как нетрудно видеть, множитель

$$\frac{\hat{p}(\hat{p} + \mu)}{2\pi} \int_{E>0} \delta(p^2 - \mu^2) d^4p \quad (10)$$

при нормировке $\bar{\psi}\beta_0\psi = 2\mu E$. Отсюда ясно, что рассмотрение рассеяния с излучением реальных квантов в силу равенства (7) ничем не отличается от проведенного Абрикосовым для случая обычной электродинамики.

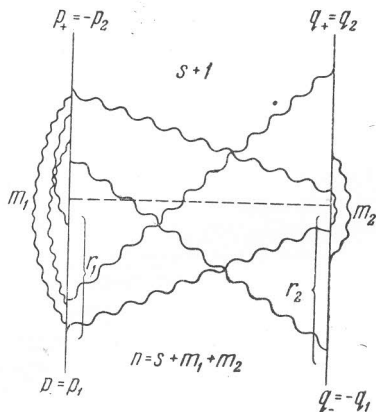
Сказанного достаточно для нашей основной цели: вычисления сечения рождения пары скалярных мезонов при аннигиляции электронно-позитронной пары. Общий вид диаграммы порядка $2(n+1)$, дающей дваждылогарифмический вклад, представлен на рисунке (обозначения совпадают с использованными в [4], пунктирной линией отмечен сильный квант). Этой диаграмме соответствует интеграл

$$\begin{aligned} I = & \int \langle \bar{u} \gamma G^e \left[p_2 - \binom{\kappa}{k} \right] \gamma \dots \gamma G^e \left[p_2 - \sum_{r_1+1}^s k_i - \sum_1^{m_1} \kappa_i \right] \times \\ & \times \gamma_\sigma G^e \left[p_1 + \sum_1^{r_1} k_i - \sum_1^{m_1} \kappa_i \right] \gamma \dots \gamma G^e \left[p_1 \pm \binom{k}{\kappa} \right] \gamma u \rangle \langle \bar{\psi} \beta G^\pi \left[q_2 \mp \binom{\kappa}{k} \right] \beta \dots \\ & \dots \beta G^\pi \left[q_2 + \sum_{r_2+1}^s k_i - \sum_1^{m_2} \kappa_i \right] \beta_\sigma G^\pi \left[q_1 - \sum_1^{r_2} k_i - \sum_1^{m_2} \kappa_i \right] \beta \dots \\ & \dots \beta G^\pi \left[q_1 - \binom{\kappa}{k} \right] \beta \psi \rangle \prod_{i=1}^s \frac{d^4 k_i}{k_i^2} \prod_{i=1}^{m_1} \frac{d^4 \kappa_i}{\kappa_i^2} \prod_{j=1}^{m_2} \frac{d^4 \kappa_j}{\kappa_j^2} \left(l - \sum_1^s k_i \right)^{-2} \quad (11) \end{aligned}$$

(каждая γ -матрица свертывается с одной из матриц β). Здесь k — импульс «лестничного» кванта, κ — импульс «вершинного» кванта, $G^e(p)$ — «необрос-

шая» функция Грина электрона и $G^\pi(q)$ — «необросшая» функция Грина мезона (в указанном выше смысле).

В числителе (11) снова можно вычеркнуть все \hat{k} и \hat{x} , уменьшающие степень логарифмичности. После этого преобразование числителя не представляет труда. Пользуясь равенствами (6) и (7) и аналогичными им равенствами



$$(\hat{p} + m) \gamma_\nu u = 2p_\nu u, \quad \bar{u} \gamma_\nu (\hat{p} + m) = 2p_\nu \bar{u},$$

$$(\hat{p} + m) \gamma_\nu (\hat{p} + m) = 2p_\nu (\hat{p} + m), \quad (12)$$

получим для него значение $[4(pq)]^n \times \langle \bar{u} \gamma_\nu u \rangle \langle \bar{\psi} \beta_\nu \psi \rangle$, причем, как и в [4], все скаляры задачи считают одинаковыми.

Преобразование знаменателя не отличается от проведенного в [5]. Для каждого виртуального кванта вводятся переменные u_i, v_i, x_i (для лестничных квантов) или φ_i, ψ_i, y_i (для вершинных). Важно установить знак матричного элемента с фиксированными s, r_1, r_2, m_1, m_2 . Для этого заметим, что в $s - r_1 - m_1$ функциях распространения скалярные произведения $p_2 k_i$ и $p_2 x_i$ входят со знаком минус. Аналогично, знак минус имеется в $r_2 + m_2$ функциях распространения с произведениями $q_1 k_i$ и $q_1 x_i$. Кроме того, следует сделать замену $\varphi_i, \psi_i \rightarrow -\varphi_i, -\psi_i$ в $m_1 + m_2$ случаях (столько раз, сколько встречается функций Грина с плюсом при $p_1 k_i$ и минусом при $p_1 x_i$ или с плюсом при $q_2 k_i$ и минусом при $q_2 x_i$). В результате матричный элемент приобретает множитель $(-1)^{s+r_1+r_2}$. Для дальнейших преобразований удобно пользоваться следующим правилом: будем вводить переменные u и v (лестница) и φ и ψ (вершина) так, чтобы выходу линии отвечали переменные u или φ , а входу — переменные v или ψ . Начало и конец линии можно, разумеется, выбирать произвольным образом. В результате этих преобразований и последующего интегрирования получим

$$I = j_0 \left(-\frac{2\pi i}{(pq)} \right)^n (-1)^{s+r_1+r_2} A^s A_e^{m_1} A_\pi^{m_2} \frac{f_e^s f_e^{m_1} f_\pi^{m_2}}{(r_1 + m_1)! (s - r_1 + m_1)! (r_2 + m_2)! (s - r_2 + m_2)!} \quad (13)$$

где A_i — якобианы соответствующих преобразований:

$$A = (m\mu/4\pi) ab (ab - 1)^{-1/2}, \quad A_e = (m^2/4\pi) a^2 (a^2 - 1)^{-1/2},$$

$$A_\pi = (\mu^2/4\pi) b^2 (b^2 - 1)^{-1/2},$$

$$j_0 = l^{-2} \langle \bar{u} \gamma_\nu u \rangle \langle \bar{\psi} \beta_\nu \psi \rangle, \quad (14)$$

а f_i — интегралы типа (9) в соответствующих пределах.

Важно отметить, что перенесение конца одного из лестничных квантов через сильный квант (изменение на единицу одного из r) изменяет только знак матричного элемента. Так как, с другой стороны, в произвольном порядке теории возмущений для каждой данной диаграммы найдется диаграмма, аналогичная данной во всем, кроме того, что один из концов некоторого слабого лестничного кванта перенесен через сильный квант, то ясно, что при суммировании по r вклады таких диаграмм взаимно компенсируются и существенным является лишь вклад вершинных квантов в диаграмме, указанной на рисунке с $r_1 = r_2 = s = 0$.

Могут иметь место два случая:

1. $a \gg 1$ и $b \gg 1$. В этом случае $A = A_e = A_\pi = (pq)/4\pi$ и (13) принимает вид

$$I = j_0 (-i/2)^n f_e^{m_1} f_\pi^{m_2} / (m_1!)^2 (m_2!)^2. \quad (15)$$

Здесь, в соответствии с изложенным выше, мы положили $r_1 = r_2 = s = 0$.

2. $a \gg 1$ и $b \sim 1$. В этом случае $A = A_e = (pq)/4\pi$. Что же касается A_π , то при $b \rightarrow 1$ имеем $A_\pi \rightarrow \infty$, что является следствием неприменимости в точке $b = 1$ преобразования (3). Однако, в силу условия

$$\psi^\pi / (b + \sqrt{b^2 - 1}) \leq \varphi^\pi \leq \psi^\pi (b + \sqrt{b^2 - 1}),$$

величина $A_\pi f_\pi$ при $b \rightarrow 1$ стремится к конечному и притом однологарифмическому пределу: $(\mu^2/2\pi) \ln(\mu/\Delta\mu)$. Поэтому в нашем приближении члены с $m_2 \neq 0$ следует опустить:

$$I = j_0 (-i/2)^n (m!)^{-2} f_e^m. \quad (16)$$

В этой формуле m — число квантов электронной вершины.

Умножая (15) и (16) на число различных диаграмм с данными m_1 и m_2 , равное, очевидно, $m_1!m_2!$, а также учитывая, что каждой фотонной линии на диаграмме Фейнмана соответствует множитель $1/\pi i$ и каждой вершине — множитель e , после суммирования по m_1 , m_2 и n при условии $m_1 + m_2 = n$ получим

$$d\sigma = d\sigma_0 \exp \left\{ -\frac{e^2}{\pi} (f_e + f_\pi) \right\} \quad (17)$$

— в первом случае и аналогичную формулу, в которой опущено f_π — во втором. Здесь $d\sigma_0$ — сечение процесса в низшем порядке теории возмущений.

Таким образом, для получения искомого сечения достаточно воспользоваться простейшей диаграммой теории возмущений, рассматривая ее как скелетную, причем фотонную функцию Грина следует считать «необросшей», а в качестве вершин взять найденную Абрикосовым для фермионов и полученную в первой части этой статьи — для мезонов.

Сечение (17) зависит от произвольных параметров Δm и $\Delta\mu$ и стремится к нулю при $\Delta m \rightarrow 0$, $\Delta\mu \rightarrow 0$. Чтобы исключить эту зависимость, необходимо учесть возможность излучения реальных квантов, так как физический интерес представляет только суммарное сечение упругого и неупругого процессов.

Использование обобщенных диаграмм Абрикосова для вычисления такого сечения в случае спиновой электродинамики продемонстрировано Байером [5] и Хейфецем (дипломная работа). В нашем случае, как было показано выше на примере вершины, ситуация вполне аналогична [5]. Поэтому мы сразу можем написать окончательные выражения для искомого сечения:

$$d\sigma = d\sigma_0 \exp \left\{ -\frac{4\alpha^2}{\pi} \left(\ln \frac{E}{\Delta E_e} \ln \frac{E}{m} + \ln \frac{E}{\Delta E_\pi} \ln \frac{E}{\mu} \right) \right\}. \quad (18)$$

В этой формуле ΔE_e есть энергия, излучаемая фермионами, а ΔE_π — мезонами.

На пороге вместо (18) получаем

$$d\sigma = d\sigma_0 \exp \left\{ -\frac{4\alpha^2}{\pi} \ln \frac{E}{\Delta E_e} \ln \frac{E}{m} \right\}. \quad (19)$$

Формула (19) показывает, что указанный в [1] пороговый эффект имеет место и в рассматриваемом случае. Последняя формула справедлива также, если

регистрируются все вылетающие мезоны, независимо от их энергии ($\Delta E_\pi \sim E$).

В заключение автор выражает свою признательность за постановку задачи В. Н. Байеру, а также С. А. Хейфецу и И. Б. Хрипловичу — за обсуждение.

Институт ядерной физики
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 января 1963 г.

Литература

- [1] В. Н. Байер, С. А. Хейфец. ЖЭТФ, 40, 715, 1961.
- [2] В. В. Судаков. ЖЭТФ, 30, 87, 1956.
- [3] А. А. Абрикосов. ЖЭТФ, 30, 96, 1956.
- [4] В. Н. Байер, С. А. Хейфец. ЖЭТФ, 40, 613, 1961.
- [5] В. Н. Байер. Диссертация, 1960.

RADIATIVE CORRECTIONS TO SCALAR MESON PAIR PRODUCTION IN ELECTRON-POSITRON COLLISIONS

V. V. Sokolov

The perturbation theory series for π -meson pair production in electron-positron collisions is evaluated in the double-logarithmic approximation.
