Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 45 *1963* *Вып. 3(9)*

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДРЕЙФОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. Галеев, Л. И. Рудаков

Рассматривается слабо турбулентная плазма. Турбулентность возникла из-за того, что неоднородная плазма неустойчива [1]. Рассмотрен эффект самоподавления неустойчивости возникающими колебаниями. Показано, что такая неустойчивость существенна только для столкновительной плазмы. Оценен нелинейный инкремент. С помощью кинетического уравнения для волн [3, 4] вычислен стационарный спектр колебаний. Это позволило оценить турбулентный поток плазмы поперек удерживающего магнитного поля. Вычисленный турбулентный коэффициент диффузии хотя и больше классического, но мал в сравнении с бомовским коэффициентом.

1. В последнее время появилось большое число работ, в которых исследуется устойчивость нерезкой границы плазмы, удерживаемой магнитным полем [1]. Приведем краткую сводку результатов линейной теории устойчивости, полученных в пренебрежении столкновениями.

Слой плазмы, плотность и температура которой зависят только от x, удерживается однородным магнитным полем H_z. Электрическое поле всюду равно нулю. В такой плазме существуют колебания частоты $\omega \sim k_y\,(cT/eH)\,(\nabla n)/n$ (дрейфовые волны). Если давление плазмы удовлетворяет неравенству $1 > \beta > m_e/m_i$, где $\beta = 8\pi nT/H^2$, то наиболее опасными являются возмущения, фазовая скорость которых заключена в интервале $u_i \ll \omega/k_z \lesssim v_A$ ($u_\alpha = \sqrt{T/m_\alpha}$, $v_A = H/\sqrt{4\pi n m_i}$; рассматриваются колебания вида $\varphi(x)\exp\{ik_z z + ik_y y - i\omega t\}$). При этом условии электрическое поле возмущений можно считать потенциальным: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Неустойчивость дрейфовых волн вызывается «резонансными» электронами, движущимися вдоль силовой линии со скоростями, близкими к фазовой скорости волны ω/k_z.

Этот эффект легко учесть, если воспользоваться для описания электронов кинетическим уравнением в дрейфовом приближении

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} - c\frac{[\nabla\varphi\mathbf{H}]}{H^2}\nabla f + \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial v_z} = 0. \tag{1.1}$$

Скорость изменения энергии волны $\dot{W}_\mathbf{k}$ равна работе, которую производят резонансные электроны в поле волны в единицу времени

$$\dot{W}_\mathbf{k} = \tfrac{1}{4}(j_{z\mathbf{k}}E^*_{z\mathbf{k}} + \text{к. с.}) = -\tfrac{1}{4}e\left(E^*_{z\mathbf{k}}\int v_z f_\mathbf{k}\,dv_z + \text{к. с.}\right).$$

Подставляя в это выражение осциллирующую поправку $f_\mathbf{k}$ к фоновой функции f_0, найденную из решения линеаризованного уравнения (1.1), получим

$$\dot{W}_\mathbf{k} = \frac{\pi e^2}{m}\omega_\mathbf{k}\varphi^2_\mathbf{k}\int\left(k_z\frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}}\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)\delta(\omega_\mathbf{k} - k_z v_z)\,dv_z. \tag{1.2}$$

Теперь легко сформулировать условие неустойчивости дрейфовой волны. Энергия волны растет, если функция распределения для резонансных частиц удовлетворяет условию

$$k_z \frac{\partial f}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f}{\partial x} > 0.$$

Для максвелловской функции распределения по скоростям частота колебаний ω при $k_y r_i \ll 1$ (r_i — ларморовский радиус иона) равна $k_y (cT/eH) (\nabla n)/n$. Для $k_y r_i \gg 1$ она достигает значения $u_i (\nabla n)/n$ и перестает расти. Энергия дрейфовой волны для всех $\mathbf{k}$ порядка $e^2\varphi_{\mathbf{k}}^2/T$. Поэтому, как это следует из формулы (1.2), инкремент $\gamma_{\mathbf{k}} = \dot{W}_{\mathbf{k}}/2W_{\mathbf{k}}$ меняется от значения $\gamma_{\mathbf{k}} \sim \omega_{\mathbf{k}} \sqrt{m_e/m_i\beta}$ при $k_y r_i \ll 1$ до значения $\gamma_{\mathbf{k}} \sim \omega_{\mathbf{k}} \sim u_i (\nabla n)/n$ при $k_y r_i \sim \sqrt{m_i\beta/m_e}$ [1)].

В неустойчивой плазме уровень флуктуаций электрического поля может сильно превышать тепловой фон, что должно привести к увеличению потока плазмы поперек удерживающего магнитного поля. Для вычисления потока необходимо учесть в исходных уравнениях нелинейные члены.

Прежде всего рассмотрим обратное влияние возникающих вследствие неустойчивости колебаний на функцию распределения электронов. Для однородной плазмы этот процесс изучался ранее [2]. Применим развитый там метод решения задачи к уравнению (1.1). Разобьем функцию распределения электронов на медленно меняющуюся f_0 и малую, быстро осциллирующую во времени δf, части. Это можно сделать, когда $\gamma_{\mathbf{k}} \ll \omega_{\mathbf{k}}$. Функцию δf определим из линеаризованного уравнения (1.1):

$$\delta f = \sum_{\mathbf{k}} (f_{\mathbf{k}} \exp \{- i\omega_{\mathbf{k}} t + ik_y y + ik_z z\} + \text{к. с.}),$$
$$f_{\mathbf{k}}(x) = \frac{e}{m} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z} \left\{ k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}} \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\}. \quad (1.3)$$

Выражение для δf подставим в уравнение (1.1) и проведем усреднение по быстрым осцилляциям. В результате получим уравнение, описывающее изменение функции f_0 [5, 7]:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{He}} \frac{\partial}{\partial x} \right) D_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{He}} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_0,$$
$$D_{\mathbf{k}}(x, t) = \pi \frac{e^2}{m^2} \varphi_{\mathbf{k}}^2 \omega_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) типа уравнения диффузии в пространстве (x, v_z). Его приближенное решение легко найти, исходя из следующих соображений. Коэффициент $D_{\mathbf{k}}$ зависит от волнового вектора $\mathbf{k}$ и, как можно показать, при некотором значении $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$; $\bar{k}_z \sim \omega/v_A$, $\bar{k}_y r_i \sim \sqrt{m_i\beta/m_e}$ имеет максимум.

Для оценки скорости процесса выравнивания «плато» в пространстве (x, v_z), описываемого уравнением (1.4) (см. работу Веденова, Велихова,

---

1) Как и в предыдущих работах [1], мы пренебрегли диамагнитным дрейфом, т. е. считали

$$\omega_{\mathbf{k}} \gg k_y \frac{cT}{eH} \frac{H'(x)}{H(x)} \sim k_y \frac{cT}{eH} \frac{\nabla n}{n} \beta.$$

Поэтому при $k_y r_i \sim \sqrt{m_i\beta/m_e}$ получаем ограничения на величину отношения давления плазмы к давлению магнитного поля:

$$(m_e/m_i)^{1/3} > \beta > m_e/m_i.$$

Сагдеева [2]), можно в нем заменить $D_{\mathbf{k}}$ на $D_{\bar{\mathbf{k}}}$. Далее удобно в упрощенном уравнении (1.4) перейти от переменных x, v_z к новым переменным

$$\eta = v_z^2/2u, \qquad \xi = v_z^2/2u + \omega_{\bar{\mathbf{k}}}\omega_{He}x/\bar{k}_y u,$$

где u — скорость резонансных электронов $u \sim \omega_{\bar{\mathbf{k}}}/k_z \sim v_A$. Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial f_0(\xi, \eta, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} D_{\bar{\mathbf{k}}}(\xi, \eta, t) = \frac{\partial f_0}{\partial \eta}, \qquad D_{\bar{\mathbf{k}}}(\xi, \eta, t) = \pi (e^2/m^2 v_A^2)\,\omega_{\bar{\mathbf{k}}}\varphi_A^2. \quad (1.4')$$

Это уравнение определяет эффект обратного влияния колебаний на функцию распределения резонансных частиц.

Для резонансных частиц значения переменной η лежат в интервале $0 < |\eta| < v_A$. В этом интервале значений η за время порядка $\tau \sim v_A^2/D_{\bar{\mathbf{k}}}$ на функции распределения $f(\eta)$ образуется «плато» и нарастание колебаний прекратится, что видно из формулы (1.2). В течение этого процесса координаты x и скорость v_z резонансного электрона связаны соотношением $v_z^2/2 + \omega_{\bar{\mathbf{k}}}\ \omega_{He}x/k_y = \text{const}$, изменение его скорости за время τ $\delta v_z \sim v_z \sim v_A$, а смещение δx приближенно равно

$$\delta x = \frac{\delta v_z}{v_z}\,\frac{\bar{k}_y v_z^2}{\omega_{\bar{\mathbf{k}}}\,\omega_{He}} \sim \frac{n}{\nabla n}\,\frac{v_A}{u_e}. \qquad (1.5)$$

Среднее смещение нерезонансных частиц в рассматриваемом приближении равно нулю.

Таким образом, неустойчивость границы плазмы, удерживаемой магнитным полем, быстро самоподавляется, а изменение начальной плотности за время перехода плазмы в устойчивое состояние мало.

Мы показали, что в разреженной плазме, когда можно пренебречь столкновениями между частицами, неустойчивость границы не приводит к заметному уходу плазмы поперек магнитного поля. Однако, если время существования плазмы велико в сравнении с временем свободного пробега электрона τ_e, то с процессом установления «плато» в (x, v_z)-пространстве будет конкурировать процесс релаксации функции распределения электронов к неустойчивому локальному максвелловскому распределению по скоростям f_M.

Рассмотрим при учете столкновений стационарную задачу, когда распределение концентрации $n(x)$ и температуры $T(x)$ задано, и оценим средний по времени поток плазмы $\langle nv_x \rangle$ вследствие неустойчивости такого состояния. Для этого в правую часть уравнения (1.4) или (1.4′) добавим столкновительный член

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_k \left(\underline{\frac{1}{v_z}\frac{\partial}{\partial v_z}} - \frac{k_y}{\omega_k \omega_{He}}\frac{\partial}{\partial x}\right) D_{\mathbf{k}} \left(\underline{\frac{1}{v_z}\frac{\partial}{\partial v_z}} - \frac{k_y}{\omega_k \omega_{He}}\frac{\partial}{\partial x}\right) f_0 + \nu_e u_e^2 \underline{\frac{\partial}{\partial v_z^2}} (f_0 - f_M). \qquad (1.6)$$

Сравнивая подчеркнутые в уравнении (1.6) члены, получаем, что столкновения существенны, когда $\nu_e \gtrsim \nu^*$, где $\nu^* \sim \omega_{\bar{\mathbf{k}}}\,(u_e/v_A)^2 e^2\varphi_{\bar{\mathbf{k}}}^2/T^2$. Если $\nu_e \ll \nu^*$, то, как показано выше, возникающие из-за неустойчивости колебания приводят к быстрому подавлению неустойчивости. Если $\nu_e \gg \nu^*$, то столкновения поддерживают неустойчивое максвелловское распределение. Эту качественную зависимость нелинейного инкремента $\gamma'_{\bar{\mathbf{k}}}$ от ν_e дает интерполяционная формула [2]

$$\gamma'_{\bar{\mathbf{k}}} \sim \gamma_{\bar{\mathbf{k}}}/(1 + \nu^*/\nu_e), \qquad (1.7)$$

где $\gamma_{\bar{k}}$ — инкремент неустойчивости, полученный из линейной теории для максвелловской функции распределения электронов. (Для определения точной зависимости $\gamma'_{\bar{k}}(\nu_e)$ надо решать систему уравнений (1.6) и (1.2).)

После того как показано, что в рассматриваемой задаче вследствие неустойчивости есть стационарный источник колебаний, естественно поставить вопрос, куда деваются эти колебания и до какой амплитуды они нарастают.

Из линейной теории следует, что инкремент $\gamma_{\mathbf{k}}$ максимален для колебаний с фазовыми скоростями $\omega/k_z \sim v_A \gg u_i$. Такие колебания поглощаются ионами слабо, так как резонансных ионов, для которых $v_z \sim v_A$, экспоненциально мало. Непосредственно излучаться из плазмы в виде электромагнитных волн они не могут, так как фазовая скорость их мала в сравнении со скоростью света. Поэтому можно ожидать, что энергия колебаний дорастает до такого уровня, что включится механизм взаимодействия между волнами и появится поток их по спектру в сторону малых фазовых скоростей ω/k_z. Рождающиеся в результате такого процесса колебания с фазовыми скоростями $\omega/k_z \leqslant u_i$ будут поглощаться резонансными ионами. Установившийся энергетический спектр колебаний $W_{\mathbf{k}}$ вычислен в разделе 2. Для $r_i k_i \gtrsim 1$

$$W_{\mathbf{k}} \sim e^2\varphi_{\mathbf{k}}^2/T \sim m_i\gamma'_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}/k^2. \tag{1.8}$$

Величину среднего потока частиц $\langle nv_x\rangle$ можно найти, усреднив по времени y-компоненту уравнения движения для электронов и ионов:

$$\langle nv_x\rangle_j = (c/H)\,\langle E_y\delta n_j\rangle. \tag{1.9}$$

В это выражение надо подставить $\delta n_j = \int \delta f_j dv$, найденную из решения линеаризованного кинетического уравнения. Для электронов δn_e определяется формулой (1.3):

$$\langle nv_x\rangle_e = 2\pi\frac{ec}{mH}\sum_{\mathbf{k}} k_y n_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}^2 \int\left(k_z\frac{\partial f_0}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_{He}}\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\delta(\omega_{\mathbf{k}} - k_z v_z)\,dv_z \sim \frac{ec}{TH}\sum_{\mathbf{k}} k_y\varphi_{\mathbf{k}}^2\frac{\gamma'_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}. \tag{1.10}$$

При оценке мы воспользовались уравнением (1.2).

Уравнение (1.10) имеет простой смысл. Резонансные электроны, возбуждая колебания, теряют в единицу времени импульс

$$\sum \dot{p}_{\mathbf{k}y}: \qquad \dot{p}_{\mathbf{k}y} \sim -\gamma'_{\mathbf{k}}\frac{W_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}k_y = -\frac{\gamma'_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}k_y\frac{e^2\varphi_{\mathbf{k}}^2}{T}.$$

Этот поток импульса поглощается ионами. Можно сказать, что между электронами и ионами действует сила трения. Под действием этой силы возникает поток плазмы $\langle nv_x\rangle = -(cn/eH)\,\Sigma\dot{p}_{\mathbf{k}y}$. Из этих рассуждений следует, что $\langle nv_x\rangle$ для обоих сортов частиц равны, так что нейтральность плазмы не нарушается.

«Коэффициент диффузии» $D(x, t)$ определим из соотношения $\langle nv^x\rangle = -D\nabla n$:

$$D \sim -\frac{ecn}{TH\nabla n}\sum_{\mathbf{k}} k_y\frac{\gamma'_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}}\varphi_{\mathbf{k}}^2. \tag{1.11}$$

Далее воспользуемся формулой (1.8) и исключим из (1.11) $\varphi_{\mathbf{k}}^2$. Тогда получим

$$D \sim \frac{n}{\omega_{Hi} \nabla n} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\gamma_{\mathbf{k}}'^2}{k}. \tag{1.12}$$

Нелинейный инкремент $\gamma_{\mathbf{k}}'$ можно выразить из уравнения (1.7):

$$\gamma_{\mathbf{k}}' = \gamma_{\mathbf{k}} \left[1 + \frac{\gamma_{\mathbf{k}}'}{\nu_e} \frac{m_i}{m_e} \beta \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 m_i}{k^2 T} \right]^{-1}. \tag{1.13}$$

Величина $\gamma_{\mathbf{k}}'^2/k$ имеет максимум при $kr_i \sim \sqrt{m_i\beta/m_e}$. Для таких $\mathbf{k}$ $\omega_{\mathbf{k}} \sim \gamma_{\mathbf{k}} \sim u_i (\nabla n)/n$. Поэтому при $\nu_e > \omega_{Hi} (r_i n^{-1} \nabla n)^3$

$$D \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i \beta}} r_i \frac{\nabla n}{n} \frac{cT}{eH}. \tag{1.14}$$

При $\nu_e < \omega_{Hi} (r_i n^{-1} \nabla n)^3$

$$D \sim \sqrt{m_e/m_i \beta}\, \nu_e (n^{-1}\nabla n)^{-2} \sim \nu_i \beta^{-1/2} (n^{-1}\nabla n)^{-2}. \tag{1.15}$$

Заметим, что этот результат можно получить из (1.11) для любого энергетического спектра [2)] $\varphi_{\mathbf{k}}^2$, если только $\nu_e > \omega_{\mathbf{k}} (m_i/m_e) \beta e^2 \varphi_{\mathbf{k}}^2/T^2$. Вычисленный коэффициент диффузии больше классического коэффициента $D_{\text{кл}} \sim \sim (m_e / m_i)\, r_i^2 \nu_e$ (только при этом условии применимы сделанные оценки), но сравнительно невелик. Так, он мал в сравнении с бомовским коэффициентом $D_B \sim cT / eH$.

2. В этом разделе будет подробно рассмотрен процесс нелинейного взаимодействия волн [3,4]. Попутно будет получен спектр колебаний $\omega(\mathbf{k})$.

Представим потенциал φ в виде суммы потенциалов электрических полей отдельных колебаний с медленно меняющимися во времени и пространстве амплитудами $C_{\mathbf{k}}(t, x)$:

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(t, x)\, \bar{\varphi}_{\mathbf{k}} \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega_{\mathbf{k}} t)\} + \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}_-}(t, x)\, \bar{\varphi}_{\mathbf{k}_-} \exp\{-i(\mathbf{kr} - \omega_{\mathbf{k}} t)\},$$

$$C_{\mathbf{k}_-} = C_{\mathbf{k}}^*, \qquad \bar{\varphi}_{\mathbf{k}_-} = \bar{\varphi}_{\mathbf{k}}^*. \tag{2.1}$$

То же проделаем и для осциллирующей поправки к f_j:

$$\delta f_j = \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}}(t, x)\, \bar{f}_{\mathbf{k}j} \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega_{\mathbf{k}} t)\} + \sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}_-}(t, x)\, \bar{f}_{\mathbf{k}j_-} \exp\{-i(\mathbf{kr} - \omega_{\mathbf{k}} t)\}.$$

Как и в [5], мы будем пользоваться не строгими квазиклассическими собственными функциями линейной задачи устойчивости:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \bar{\varphi}_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} \exp\left\{ i \int_{x_1}^{x} k_x(x, \omega)\, dx + ik_y y + ik_z z - i\omega t \right\},$$

а приближенно заменим их на плоские волны $e^{i\mathbf{kr} - i\omega t}$ и будем считать, что $k_x \sim k_y$.

Нелинейное взаимодействие волн приводит к медленному изменению их амплитуд во времени за счет передачи энергии по спектру. Корректное описание этого процесса удается привести лишь в том случае, когда «связь» между волнами (а также между волнами и частицами) слабая и можно воспользоваться теорией возмущений относительно малого параметра — отно-

[2)] На это обстоятельство обратил наше внимание Р. З. Сагдеев.

шения энергии воздействия волн к их полной энергии [3]. Тогда вследствие «слабой» связи между волнами фазы амплитуд можно считать случайными и произвести по ним усреднение.

Получим сначала динамическое уравнение для изменения амплитуды $C_{\mathbf{k}}(t)$ во времени. Для этого представим компоненту Фурье быстроосциллирующей части функции распределения $\bar{f}_{\mathbf{k}j}$ в виде интеграла по невозмущенным траекториям частиц с учетом нелинейных членов [6]:

$$C_{\mathbf{k}}\bar{f}_{\mathbf{k}j}(r, \mathbf{v}, t) = \frac{e_j}{m_j} i\mathbf{k} \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_k(r, t) \frac{\partial f_{0j}(\mathbf{v}, x)}{\partial \mathbf{v}} dt - \frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{t} \bar{f}_{\mathbf{k}j}(r, \mathbf{v}, t)\, dt -$$
$$- \frac{dC_{\mathbf{k}}}{dx} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{t} v_x(t) \bar{f}_{\mathbf{k}j}(r, \mathbf{v}, t)\, dt - \frac{e_j}{m_j} \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_x} dt \right\} +$$
$$+ \frac{e_j}{m_j} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} i\mathbf{k}' \int\limits_{-\infty}^{t} \varphi_{\mathbf{k}'} \frac{\partial \delta f_{\mathbf{k}''j}}{\partial \mathbf{v}} dt \qquad (2.2)$$

и воспользуемся условием квазинейтральности

$$\sum_j e_j \int \bar{f}_{\mathbf{k}j}(r, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{v} = 0. \qquad (2.3)$$

В этом разделе будем считать, что столкновения успевают восстанавливать локальное максвелловское распределение по скоростям электронов и ионов. Из (2.2) в линейном приближении получаем формулу, связывающую функцию распределения $\bar{f}_{\mathbf{k}j}$ с потенциалом $\bar{\varphi}_{\mathbf{k}}$:

$$\bar{f}_{\mathbf{k}j} = \xi_{\mathbf{k}j}(\mathbf{v})\, \bar{\varphi}_{\mathbf{k}} = -\frac{e_j}{T_j}\Big[1 - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{\mathbf{k}} + k_y c T_j n_0'/e_j H n_0}{-\omega_{\mathbf{k}} - l\omega_{Hj} + k_z v_z} \times$$
$$\times J_l\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hj}}\right) \exp\left\{il(\theta - \omega_{Hj}t + \varphi) - il\frac{\pi}{2}\right\} \exp\left\{-i\frac{[\mathbf{kv}(t)]_z}{\omega_{Hj}}\right\}, \qquad (2.4)$$
$$f_{0j} = n_0 \left[\frac{m_j}{2\pi T_j}\right]^{3/2} \left(1 + \frac{v_y}{\omega_{Hj}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}\right) \exp\left\{-\frac{m_j v^2}{2T_j}\right\},$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\mathbf{v} = \{v_\perp, \varphi, v_z\}$.

Оставляя в (2.4) лишь член с $l = 0$, из (2.3) получаем выражение для инкремента:

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \operatorname{Im} \sum_j e_j \int \xi_{\mathbf{k}j}\, dv \Big/ \sum_j e_j \int \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}j}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} dv = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{|k_z| u_l} \left(\omega_{\mathbf{k}} + k_y \frac{cT}{eH} \frac{\nabla n}{n}\right) \qquad (2.5)$$

и частоты колебаний:

$$\omega_{\mathbf{k}} = -k_y \frac{cT}{eH} \frac{\nabla n}{n} F(k_\perp^2)/[2 - F(k_\perp^2)], \quad F(k_\perp^2) = e^{-k_\perp^2 r_i^2} I_0(k_\perp^2 r_i^2), \qquad (2.6)$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Подробности вычислений линейного приближения можно найти в [1].

Далее подставим в правую часть (2.2) первое приближение для $\bar{f}_{\mathbf{k}j}$. Удерживая лишь основные слагаемые в нелинейном члене, получаем уравнение для поправки к функции распределения с учетом взаимодействия между волнами:

$$C_{\mathbf{k}}\bar{f}_{\mathbf{k}j} = \left(\xi_{\mathbf{k}j}C_{\mathbf{k}} - \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}j}}{\partial i\omega_{\mathbf{k}}}\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \xi_{\mathbf{k}j}}{\partial i k_x}\left(\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial x} + \frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial k_x}\frac{dk_x}{dx}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \xi_k}{\partial i\omega_k}\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} V^j_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\mathbf{v}, t)\, C_{\mathbf{k}'}C_{\mathbf{k}''}\right)\bar{\varphi}_{\mathbf{k}}, \tag{2.7}$$

где $\xi_{\mathbf{k}} = \int \sum_j \xi_{\mathbf{k}j}\frac{e_j}{|e|}d\mathbf{v}$;

$$\frac{\partial \xi_{\mathbf{k}}}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} V^j_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = 2\frac{e_j^2}{m_j T_j}\frac{[\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'']_z}{\omega_{Hj}}\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} - k_y''(cT_j/e_jHn)\nabla n}{\omega_{\mathbf{k}''} - k_z''v_z} - \frac{\omega_{\mathbf{k}'} - k_y'(cT_j/e_jHn)\nabla n}{\omega_{\mathbf{k}'} - k_z'v_z}\right)\times$$
$$\times \frac{J_0(kv_\perp/\omega_{Hj})\, J_0(k'v_\perp/\omega_{Hj})\, J_0(k''v_\perp/\omega_{Hj})}{w_{k'} + \omega_{k''} + (k_z' + k_z'')v_z}\,\frac{\varphi_{\mathbf{k}'}\varphi_{\mathbf{k}''}}{\varphi_{\mathbf{k}}}\exp\{-i(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}})t\}.$$

Динамическое уравнение для амплитуд $C_{\mathbf{k}}(t)$ имеет вид

$$\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \gamma_{\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}} - \frac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk_x}\frac{\partial C_{\mathbf{k}}}{\partial x} + \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(t)\, C_{\mathbf{k}'}C_{\mathbf{k}''},$$
$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(t) = \sum_j \int V^j_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\mathbf{v}, t)\frac{e_j}{|e|}d\mathbf{v}. \tag{2.8}$$

Если нормировать вектор состояния $\bar{\varphi}_k$, согласно соотношению

$$\widetilde{W}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial(\omega_{\mathbf{k}}\varepsilon(\omega_{\mathbf{k}},\mathbf{k}))}{\partial\omega_{\mathbf{k}}}\frac{k^2\bar{\varphi}^2_{\mathbf{k}}}{8\pi} \equiv \frac{e^2\bar{\varphi}^2_{\mathbf{k}}}{2T}n_0(2 - F_{\mathbf{k}}) = \omega_{\mathbf{k}}, \tag{2.9}$$

где

$$\varepsilon = \sum_j \int \frac{4\pi e_j \xi_{\mathbf{k}j}}{k^2}dv$$

— диэлектрическая проницаемость плазмы, то квадрат модуля амплитуды волны можно трактовать как число волн $n_{\mathbf{k}} = |C_{\mathbf{k}}(t)|^2$ с энергией $\omega_{\mathbf{k}}$. При такой нормировке матричный элемент $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}$, характеризующий величину взаимодействия, обладает необходимыми свойствами симметрии (см. [4]), а изменение числа волн во времени описывается кинетическим уравнением

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{d\omega_{\mathbf{k}}}{dk_x}\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial x} = 2\gamma'_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \mathrm{St}^{(0)}\{n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}\}; \tag{2.10}$$

$$\mathrm{St}^{(0)}\{n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''}\} = 2\pi\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\{|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}|^2(n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}'} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}''})\,\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}'}) +$$
$$+ 2|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'_{-}\mathbf{k}''}|^2(n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''} + n_{\mathbf{k}''}n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}'})\,\delta(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}})\}.$$

Столкновительный член в этом уравнении учитывает только нелинейную передачу энергии по спектру «собственных» колебаний, т. е. процесс перехода двух волн в одну и, наоборот, в результате их неупругого столкновения. Однако при интерференции имеющихся волн возникают и вынужденные колебания. Их амплитуда равна

$$C^{(1)}_{\mathbf{k}''} = e^{\gamma_{\mathbf{k}''}t}\int_0^t V_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'_{-}\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}'}C_{\mathbf{k}}\exp\{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})t - \gamma_{\mathbf{k}''}t\}\,dt =$$
$$= V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'_{-}\mathbf{k}}C_{\mathbf{k}'_{-}}C_{\mathbf{k}}\frac{\exp\{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})t\} - \exp(\gamma_{\mathbf{k}''}t)}{-i(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) + \gamma_{\mathbf{k}''}}.$$

Поглощение этих вынужденных колебаний дает нам дополнительный канал для оттока энергии из данного масштаба пульсаций. Поэтому в полном столкновительном члене следует учесть вклад таких процессов:

$$\mathrm{St}\{n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}\} = \mathrm{St}^{(0)}\{n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}\} + 2V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} V_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'_{-}\mathbf{k}} \times$$
$$\times \frac{|\gamma_{\mathbf{k}''}|\, n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}}{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}'})^2 + \gamma^2_{\mathbf{k}''}} + 2V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'_{-}\mathbf{k}''} V_{\mathbf{k}''\mathbf{k}'\mathbf{k}} \frac{|\gamma_{\mathbf{k}''}|\, n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}}{(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}})^2 + \gamma^2_{\mathbf{k}''}}. \qquad (2.11)$$

Это уравнение вместе с «квазилинейным» уравнением (1.4) составляет полную систему, определяющую кинетику турбулентной плазмы для случая «слабой связи» между волнами ($\gamma_{\mathbf{k}}$, $C_{\mathbf{k}}^{-1}\partial C_{\mathbf{k}}/\partial t \ll \omega_{\mathbf{k}}$). Однако наибольший вклад в коэффициент диффузии дают относительно коротковолновые колебания $kr_i \sim \sqrt{m_i\beta/m_e}$, для которых $\gamma_{\mathbf{k}} \sim \omega_{\mathbf{k}}$. Уравнение (1.4) в этом случае применимо, так как условие слабости связи волны с электронами $\gamma_{\mathbf{k}}/k_z u_e \ll 1$ выполняется, а уравнение (2.10) справедливо лишь качественно, но мы воспользуемся им для порядковой оценки энергии волн. (Эта оценка будет получена как предельный случай оценки для колебаний с $kr_i \ll \sqrt{m_i\beta/m_e}$.)

В условиях квазистационарного равновесия, когда приход энергии в турбулентные пульсации из-за неустойчивости компенсируется уходом ее из-за нелинейной передачи по спектру и поглощения,

$$2\gamma'_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} \sim \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}}.$$

Для $kr_i \gtrsim 1$ оценка матричного элемента дает

$$|V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''}|^2 \sim k^2\omega_{\mathbf{k}}/nm_i.$$

Поэтому

$$W_{\mathbf{k}} \sim n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}} \sim e^2 n n_{\mathbf{k}} |\overline{\varphi}_{\mathbf{k}}|^2/T \sim nm_i\gamma'_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}/k^2. \qquad (2.12)$$

В принципе уравнение (2.10) позволяет оценить энергию волн не только буквенно, но и численно. Мы получили для $W_{\mathbf{k}}$ следующую величину:

$$W_{\mathbf{k}} \sim \frac{1}{200} nm_i\gamma'_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}/k^2.$$

Если воспользоваться этой численной оценкой, то вместо буквенного выражения (1.14) для D, получим, что в случае

$$\nu_e > \frac{1}{10}\,\omega_{Hi}\,(r_i n^{-1}\nabla n)^3, \quad D \sim \frac{1}{100}\sqrt{m_e/m_i}\beta\,(r_i n^{-1}\nabla n)\, cT/eH.$$

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность Р. З. Сагдееву за плодотворные дискуссии и замечания.

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 28 февраля 1963 г.

Литература

[1] Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР, **138**, 581, 1961. Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев. ДАН СССР, **146**, 581, 1962. А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков. ЖЭТФ, **44**, 912, 1963. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. ЖЭТФ, **44**, 903, 1963.

[2] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, **1**, 82, 1961.

[3] M. Camac, A. Kantrowitz, M. Litvak, R. Patrick, H. Petsheck. Nucl. Fusion Suppl., 2, 423, 1962.
[4] А. А. Галеев, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 44, 592, 1963.
[5] А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. Препринт, ИЯФ, г. Новосибирск, 1963.
[6] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker. Nucl. Fusion, part 1, 75, 1962.
[7] В. Н. Ораевский. Диссертация, Новосибирск, 1962.

NONLINEAR THEORY OF DRIFT INSTABILITY OF AN INHOMOGENEOUS PLASMA IN A MAGNETIC FIELD

A. A. Galeyev, L. I. Rudakov

A weakly turbulent plasma is considered, the turbulency being due to instability of the inhomogeneous plasma [1]. The effect of selfinhibition of the instability by the oscillations due to it is considered. It is shown that this type of instability is important only for a collision plasma. The nonlinear increment is estimated. The stationary oscillation spectrum is calculated with aid of the kinetic equation for waves [3, 4]. In this way turbulent flow of the plasma across the confining magnetic field could be estimated. Although the turbulent diffusion coefficient thus computed is greater than the classical value, it is nevertheless small compared with the Bohm coefficient.