

Stability of non-linear stationary plasma oscillations

To cite this article: V.N. Oraevsky 1964 *Nucl. Fusion* **4** 263

View the [article online](#) for updates and enhancements.

You may also like

- [Bifurcation Behavior in Oscillations during \$H_2O_2\$ Reduction at Pt Electrodes](#)
Hirokazu Kawasaki, Daisuke Hara,
Mitsunobu Kikuchi et al.
- [Multimode theory of plasmon excitation at a metal – photonic crystal interface](#)
T.I. Kuznetsova and N.A. Raspopov
- [Chaotic Oscillations in \$H_2O_2\$ - \$H_2SO_4\$ - Pt Electrochemical System](#)
Daisuke Hara, Hirokazu Kawasaki,
Mitsunobu Kikuchi et al.

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

В. Н. ОРАЕВСКИЙ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР, НОВОСИБИРСК

Настоящая работа носит обзорный характер. В пар. 1 излагается метод исследования устойчивости установившихся колебаний не слишком большой амплитуды (малым параметром служит отношение гидродинамической скорости волны к фазовой скорости) [15]. Неустойчивости возникают из-за наличия положительной обратной связи между малыми синусоидальными колебаниями, распространяющимися на «фоне» волны конечной амплитуды. Неустойчивости напоминают распады квазичастиц: частоты и волновые вектора нарастающих колебаний связаны с частотой и волновым вектором исходной волны соотношениями типа законов сохранения энергии и импульса. Характерной особенностью инкрементов нарастающих колебаний является их пропорциональность величине амплитуды исходной волны.

Рассматривается конкретный пример нахождения инкремента нарастания малых возмущений — исследуется устойчивость синусоидальной альфвеновской волны малой амплитуды (пар. 2А). Неустойчивость такой волны связана со сжимаемостью среды (для несжимаемых сред неустойчивость пропадает).

Для колебаний большой амплитуды нет общего метода исследования устойчивости. Однако и здесь может появляться положительная обратная связь между малыми колебаниями. По этой причине оказывается неустойчивой (в сжимаемой среде!) альфвеновская волна произвольной амплитуды с пилообразным профилем силовых линий магнитного поля [25]. (Выбранный профиль силовых линий магнитного поля позволяет решить задачу точно — пар. 2В).

В заключительной части обзора (пар. 3, 4) приведены результаты исследования устойчивости других видов колебаний, таких как ионно-звуковые колебания неизотермической плазмы, электронные ленгмюровские колебания, магнитозвуковые колебания и т.п.

1 Общие замечания. Постановка задачи

А В последнее время вопросы нелинейной теории колебаний привлекают к себе особое внимание. Это во многом связано с обнаружением в линейной теории большого числа неустойчивостей по отношению к возбуждению различного рода колебаний. (См., например, работы 1—7). Действительно, после обнаружения неустойчивости возникают, в первую очередь, такие вопросы: (1) какова дальнейшая судьба нарастающих колебаний и (2) каково влияние этих колебаний на поведение всей плазмы. Естественно, ответы на эти вопросы может дать лишь нелинейная теория колебаний плазмы.

Одним из первых шагов в создании нелинейной теории колебаний является исследование простейших механизмов нелинейного взаимодействия волн, приводящих к затуханию или ограничению роста амплитуды одних гармоник и нарастанию других. Хорошо известен механизм «рождения» кратных гармоник. На малые колебания при наличии синусоидальной волны конечной амплитуды, образно говоря, действует вынуждающая сила. При этом возбуждается находящаяся в резонансе кратная гармоника. Другим известным механизмом возбуждения новых гармоник является механизм «рассеяния» волны на волне с изменением частот и волновых векторов обеих волн [8]. Указанные механизмы возбуждения новых

гармоник не являются единственными в плазме. В самом деле, малые колебания, распространяющиеся независимо в однородной среде, при наличии волны конечной амплитуды оказываются, вообще говоря, связанными. Эта связь волн через исходную волну конечной амплитуды может оказаться положительной обратной связью, т.е. возможно одновременное возбуждение группы волн. Ясно, что условие наличия положительной обратной связи для фиксированных волн существенно зависит от пространственно-временных характеристик волны конечной амплитуды. Если пространственно-временные характеристики волн конечной амплитуды меняются достаточно быстро, положительная обратная связь фиксированных волн быстро нарушается и возбуждение таких волн прекращается. Поэтому задачу о возбуждении гармоник из-за наличия положительной обратной связи между ними удобно решать в «чистом виде» — когда пространственно-временные характеристики исходной волны остаются постоянными. Иными словами, это означает, что должны отсутствовать возбуждение кратных гармоник и «рассеяние» гармоник исходной волны. Такая ситуация возникает при исследовании устойчивости нелинейных установившихся колебаний.

Как известно [9—13], нелинейные установившиеся колебания существуют в плазме в пренебрежении диссипацией. В обычной газодинамике, при изучении возможности появления установившихся движений, такого пренебрежения, вообще говоря, делать нельзя. Именно диссипативные

* An English translation is available. To obtain a copy, please write to the editor.

эффекты ограничивают рост крутизны переднего фронта первоначально синусоидальной волны. В плазме же картина изменяется. Здесь существует, например, тип волн с поперечной поляризацией, а именно альфвеновские волны, для которого нелинейные члены вида $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, отвечающие за укручение переднего фронта волны, отсутствуют в уравнениях, описывающих эти волны. Поэтому альфвеновская волна произвольной формы и, в частности, синусоидальная волна может распространяться без искажения своей формы (если, конечно, диссипацией можно пренебречь). В тех же случаях, когда существует тенденция к укручению, рост крутизны могут ограничивать дисперсионные эффекты [2]. В самом деле, укручение переднего фронта волны означает «рождение» кратных гармоник. Рождение кратных гармоник (для волн не слишком большой амплитуды) не будет происходить в том случае, если возбуждающая сила (появляющаяся при учете членов второго порядка по амплитуде) не находится в резонансе с собственными колебаниями системы. Такая сила имеет вид: $\alpha f_1^2 \exp i(2\omega t - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где f_1 , ω , \mathbf{k} — соответственно амплитуда, частота и волновой вектор исходной волны. Очевидно, если дисперсионный закон существенно отличается от линейного, резонанса не будет, и в разреженной плазме (где диссипацией можно пренебречь) могут существовать нелинейные установившиеся волны.

Б При исследовании устойчивости установившихся колебаний плазмы удобно перейти в систему координат, движущуюся вместе с волной. В такой системе координат коэффициенты в уравнениях для малых отклонений от установившегося движения (такое движение будем в дальнейшем называть «фоном») не зависят от времени. Следовательно, зависимость от времени всех величин, характеризующих малые отклонения от «фона», может быть выбрана в виде $e^{i\Omega t}$. Тогда систему уравнений, описывающих динамику малых возмущений, можно символически представить в виде

$$(H^{\dagger(0)} + H^{\dagger(1)})\varphi = \Omega\varphi \quad (1)$$

где $H^{\dagger(0)}$ — линейный дифференциальный самосопряженный оператор, описывающий колебания однородной плазмы с собственными функциями φ_{Ω} пропорциональными $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, и собственными значениями $\Omega^{(0)}$, удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\Omega^{(0)} = \Omega^{(0)}(\mathbf{k})$; $H^{\dagger(1)}$ — линейный дифференциальный оператор, зависящий от фона и стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды фона.

Естественно при исследовании устойчивости волн малой амплитуды применить теорию возмущений. В этом случае задача состоит в отыскании поправки $\omega^{(1)}$ к собственной частоте $\Omega^{(0)}$, которая, как известно, в первом порядке теории возмущений пропорциональна матричному элементу $\langle \varphi_{\Omega} | H^{\dagger(1)} | \varphi_{\Omega} \rangle$. Рассмотрим пространственную зависимость оператора $H^{\dagger(1)}$. Для волн малой амплитуды величины, описывающие волну, устойчи-

вость которой мы хотим исследовать, могут быть записаны в виде

$$\Phi = \varphi_0 e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}} + O(\varphi_0^2) \quad (2)$$

При исследовании устойчивости в первом порядке теории возмущений членами $O(\varphi_0^2)$ можно пренебречь. Тогда пространственная зависимость $H^{\dagger(1)}$ характеризуется множителями $\exp(\pm i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r})$. Очевидно, матричный элемент, а вместе с тем и $\omega^{(1)}$, отлично от нуля лишь в том случае, когда одному $\Omega^{(0)}$ соответствуют по меньшей мере два волновых вектора (\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2) и они связаны между собой соотношениями типа [15]

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_2 \quad (3)$$

Это равенство не изменяется и при переходе к лабораторной системе координат. Частоты же ω_1 и ω_2 , соответствующие волновым векторам \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в лабораторной системе координат связаны соотношением

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2 \quad (4)$$

где ω_0 — частота колебаний «фона» в лабораторной системе координат.

Условия 3 и 4 не дают точного критерия неустойчивости нелинейных установившихся волн. Они указывают лишь на возможность существования неустойчивости. Критерий неустойчивости, следуя А. А. Галееву, В. И. Карпману, можно сформулировать, используя определенные свойства симметрии матричного элемента [20]. Оказывается, что если в ур. 4 знаки частот таковы, что выполняется условие

$$|\omega_0| = |\omega_1| + |\omega_2| \quad (5)$$

имеет место неустойчивость. В противном случае установившиеся колебания устойчивы. Условия 3, 5 аналогичны условиям распада квазичастиц. Поэтому в дальнейшем мы будем называть их «распадными» условиями, а саму неустойчивость, связанную с выполнением распадных условий, «распадом» колебания [15].

В Разберем более подробно принцип нахождения поправки к частотам ω_1 и ω_2 . Для этого обратимся к исследованию устойчивости альфвеновской волны. Причем, в настоящем параграфе основное внимание уделим схеме нахождения $\omega^{(1)}$. (Подробное вычисление $\omega^{(1)}$ будет проведено в следующем параграфе несколько иным, практически более удобным, способом).

Стационарное состояние в данном случае представляет собой волну Альфвена, для которой магнитное поле $\delta \mathbf{H} \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'$ (где $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$, \mathbf{u} — скорость волны) и гидродинамическая скорость $\delta \mathbf{v} \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}'$ перпендикулярны направлению распространения \mathbf{k}_0 и невозмущенному магнитному полю \mathbf{H}_0 . В системе, движущейся вместе с волной, линеаризованные уравнения для возмущений имеют вид

$$M \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right\} \mathbf{v} - \frac{(\nabla \times \mathbf{h}) \times \mathbf{H}_0}{4\pi n_0} + M \frac{S^2}{n_0} \nabla n$$

$$= M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_0) \delta v \sin \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' - M \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' (\delta v \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

$$+ \frac{1}{4\pi n_0} \left\{ \frac{n}{n_0} \sin \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' [(\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_0] \right.$$

$$\left. + \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' (\nabla \times \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{H}) - \sin \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' [(\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_0] \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} \mathbf{h} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0) = \nabla \times \{ (\delta v \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times \delta \mathbf{H}) \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}' \}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right\} n + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (n \delta v \cos \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}') \quad (6)$$

$$S^2 = \gamma p_0 / n_0 M$$

Здесь \mathbf{v} , \mathbf{h} , n — возмущения скорости, магнитного поля и плотности соответственно.

В соответствии со сказанным ранее, временную зависимость величин, характеризующих малые отклонения от фона, выбираем в виде $e^{-i\omega t}$. Тогда ур. 6 можно для фурье-компонент по пространственным переменным переписать в виде

$$-\omega \mathbf{v}_\omega(k) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}_\omega(k) - \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{h}_\omega(k)] \times \mathbf{H}_0}{4\pi n_0 M}$$

$$+ S^2 \frac{n_\omega(k)}{n_0} \mathbf{k} = \frac{1}{2} \left\{ -[\delta v \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)] \mathbf{v}_\omega(k - k_0) \right.$$

$$- [\mathbf{v}_\omega(k - k_0) \cdot \mathbf{k}_0] \delta v + \frac{1}{4\pi n_0 M} \times \left[[(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \mathbf{h}_\omega] \times \delta \mathbf{H} \right.$$

$$\left. + [\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}] \times \mathbf{h}_\omega(k - k_0) - [\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}] \times \mathbf{H}_0 \frac{n_\omega(k - k_0)}{n_0} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ -[\delta v \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)] \mathbf{v}_\omega(k + k_0) + [\mathbf{v}_\omega(k + k_0) \cdot \mathbf{k}_0] \delta v \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi n_0 M} \left\{ [(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \times \mathbf{h}_\omega(k + k_0)] \times \delta \mathbf{H} \right. \right.$$

$$\left. - (\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{h}_\omega(k + k_0) + (\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_0 \frac{n_\omega(k + k_0)}{n_0} \right\}$$

$$- \omega \mathbf{h}_\omega(k) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{h}_\omega(k) - \mathbf{k} \times [\mathbf{v}_\omega(k) \times \mathbf{H}_0]$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{k} \{ \delta v \times [\mathbf{h}_\omega(k - k_0) + \mathbf{h}_\omega(k + k_0)]$$

$$+ [\mathbf{v}_\omega(k - k_0) + \mathbf{v}_\omega(k + k_0)] \times \delta \mathbf{H} \}$$

$$- \omega n_\omega(k) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) n_\omega(k) + n_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\omega(k)$$

$$= -\frac{1}{2} [n_\omega(k - k_0) + n_\omega(k + k_0)] \mathbf{k} \cdot \delta v \quad (7)$$

Удобно в ур. 7 перейти к переменным φ , $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{A} , ϱ , определяемым следующим образом

$$\mathbf{v}_\omega(k) = i [\mathbf{k} \times \mathbf{\Omega}_\omega(k)] - i \mathbf{k} \varphi_\omega(k) \quad (8)$$

$$\mathbf{h}_\omega(k) / (4\pi n_0 M)^{1/2} = i \mathbf{k} \times \mathbf{A}(k)$$

$$\varrho_\omega(k) = i [h_\omega(k) / h_0] S / k$$

где, очевидно, $\mathbf{\Omega}_\omega(k)$ и $\varphi_\omega(k)$ представляют собой фурье-компоненты векторного и скалярного потенциалов скорости; $\mathbf{A}_\omega(k)$ — фурье-компонента векторного потенциала магнитного поля, измеряемая в единицах потенциала скорости; $\varrho_\omega(k)$ — возмущение плотности, также измеряемое в единицах потенциала скорости. Векторы $\mathbf{A}_\omega(k)$ и $\mathbf{\Omega}_\omega(k)$ подчинены условию поперечности

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\omega(k) = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}_\omega(k) = 0 \quad (9)$$

Подставляя ур. 8 в ур. 7, можно получить следующие уравнения относительно новых переменных $\mathbf{\Omega}_{\omega; x, y}$, φ_ω , $\mathbf{A}_{\omega; x, y}$, ϱ_ω (ось z направляем вдоль постоянного магнитного поля)

$$(H_{\alpha\beta}^{(0)} - \omega \delta_{\alpha\beta}) \psi_\beta(k, \omega) = H_{\alpha\beta}^{(1)}(k_0, k, k - k_0) \psi_\beta(k - k_0, \omega)$$

$$+ H_{\alpha\beta}^{(1)}(k_0, k, k + k_0) \psi_\beta(k + k_0, \omega); \quad (10)$$

где

$$\psi_{1,2}(k, \omega) \equiv \mathbf{\Omega}_{\omega; x, y}(k)$$

$$\psi_{3,4}(k, \omega) \equiv \mathbf{A}_{\omega; x, y}(k)$$

$$\psi_5(k, \omega) \equiv \varphi_\omega(k)$$

$$\psi_6(k, \omega) \equiv \varrho_\omega(k)$$

$$\mathbf{v}_a \equiv \mathbf{H}_0 / (4\pi n_0 M)^{1/2}$$

$$H_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{vmatrix} -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} & 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} & 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a & 0 & 0 \\ -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a & 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} & 0 & k_y v_a & 0 \\ 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a & 0 & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} - k_x v_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y v_a & -k_x v_a - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} & k S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k S & -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Как видно из ур. 7

$$H^{\dagger(1)}(k_0, k \pm k_0) = \delta v_a \mathcal{H}^{\dagger(1)}(k_0, k, k \pm k_0)$$

$$\delta v_a \equiv |\delta \mathbf{H}| / (4\pi n_0 M)^{1/2}$$

а оператор $\mathcal{H}^{\dagger(1)}(k_0, k, k \pm k_0)$ не зависит от амплитуды исходной альфвеновской волны.

Из ур. 11 видно, что $H^{\dagger(0)}$ эрмитов (точнее симметричный) оператор. Собственные значения оператора $H^{\dagger(0)}$ определяются из хорошо известного дисперсионного уравнения

$$[(\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_a)^2] [\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}]^4$$

$$- (\omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2 k^2 (v_a^2 + S^2) + k^2 k_z^2 v_a^2 S^2 = 0 \quad (12)$$

а собственные векторы образуют полную ортогональную систему векторов. Эта система имеет вид (для $H_0^2 / 8\pi \gg p_0$)

$$\psi_{a\pm}^{(0)} = |\psi_{a\pm}^{(0)}| e_{a\pm}^{(0)}; \quad \psi_{m\pm}^{(0)} = |\psi_{m\pm}^{(0)}| e_{m\pm}^{(0)}; \quad \psi_{S\pm}^{(0)} = |\psi_{S\pm}^{(0)}| e_{S\pm}^{(0)}$$

где

$$e_{a\pm}^{(0)} = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{vmatrix} k_x / k_\perp \\ k_y / k_\perp \\ \mp k_x / k_\perp \\ \mp k_y / k_\perp \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad e_{m\pm}^{(0)} = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{vmatrix} k_z k_y / k_\perp k \\ -k_z k_x / k_\perp k \\ \mp k_y / k_\perp \\ \pm k_x / k_\perp \\ -k_\perp / k \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$e_{S\pm}^{(0)} = \frac{1}{2^{1/2}} \begin{pmatrix} k_y/k \\ -k_x/k \\ \mp(S/v_a)k_y/k \\ \pm(S/v_a)k_x/k \\ k_x/k \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (13)$$

где $\psi_a^{(0)}$ — собственные векторы альфвеновских волн (соответствующие собственным значениям $\omega = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \pm k_z v_a$), $\psi_m^{(0)}$ — собственные векторы быстрой, а $\psi_S^{(0)}$ — медленной магнитозвуковых волн.

Легко видеть (см. ур. 10), что поправка $\omega^{(1)}$ к частоте ω отлична от нуля (в первом порядке теории возмущений по амплитуде исходной волны), лишь когда в нулевом приближении одному ω соответствует два различных волновых вектора (\mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2), связанных между собой соотношениями типа ур. 3. В этом случае, в первом приближении по величине δv (вернее по параметру $\alpha = \delta v/u$) имеем следующую систему зацепляющихся уравнений для величин, относящихся к первой и второй волне

$$(H^{\dagger(0)} - \omega) \psi(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) = H^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{k}) \psi(\omega, \mathbf{k}) \quad (14)$$

$$(H^{\dagger(0)} - \omega) \psi(\omega, \mathbf{k}) = H^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \psi(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \quad (15)$$

Как обычно, при нахождении поправки к собственному значению ω , умножая ур. 14 и 15 на орты соответствующих собственных векторов, получаем

$$\begin{aligned} -\omega^{(1)} |\psi(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)| &= \langle e^{(0)}(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) | \\ &\times |H^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{k})| e^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \rangle |\psi(\omega, \mathbf{k})| \\ -\omega^{(1)} |\psi(\omega, \mathbf{k})| &= \langle e^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) | \\ &\times |H^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)| e^{(0)}(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \rangle |\psi(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)| \end{aligned} \quad (16)$$

($e^{(0)}$ — соответствующий орт, $|\psi|$ — модуль вектора ψ). Из разрешимости ур. 16 записываем выражение для квадрата $\omega^{(1)}$

$$\omega^{(1)2} = \delta v_a^2 \langle e^{(0)}(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) | \mathcal{H}^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{k}) | e^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) \rangle \times \langle e^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) | \mathcal{H}^{\dagger(1)}(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) | e^{(0)}(\omega, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \rangle \quad (17)$$

Г Можно ожидать, что разобранный выше механизм неустойчивости, связанный с появлением положительной обратной связи между определенными видами колебаний при наличии волны малой (но конечной) амплитуды, работает в случае, если амплитуда исходной волны не мала. Естественно, большие математические трудности не позволяют исследовать устойчивость периодических волн большой амплитуды при произвольной форме волны. (Для тех видов волн, для которых дисперсия останавливает рост крутизны переднего фронта волны, форма установившейся волны и макси-

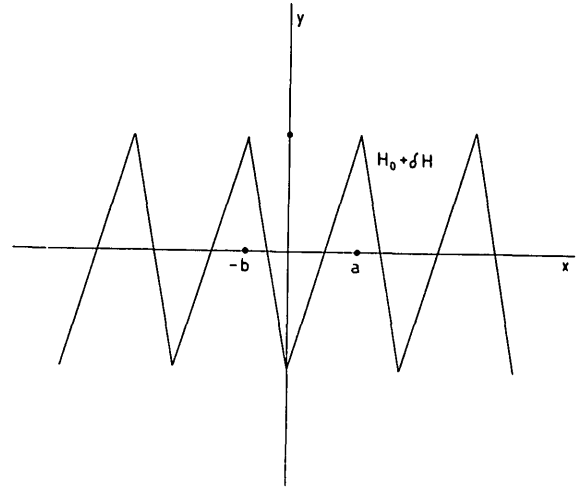


Рис. 1 пилообразный профиль силовых линий магнитного поля.

мальное значение ее амплитуды определяются дисперсией — а не могут быть заданы произвольно). Удалось точно исследовать [25] один частичный случай — альфвеновскую волну с пилообразным профилем силовых линий магнитного поля (рис. 1). Задача сводится к решению уравнений с периодически разрывными коэффициентами, постоянными внутри периода. Сшивка решений в точках разрывов позволяет определить ω . Ниже в пар. 2 пункт Б будет показано, что альфвеновская волна с пилообразным профилем силовых линий магнитного поля неустойчива, причем механизм неустойчивости аналогичен механизму неустойчивости волн малой амплитуды.

2 Неустойчивость периодической структуры альфвеновских колебаний

2А СИНУСОИДАЛЬНАЯ АЛЬФВЕНОВСКАЯ ВОЛНА МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ [17]

Практически, при вычислении поправки $\omega^{(1)}$ к собственным частотам ω_1 и ω_2 , удобнее использовать систему уравнений 7, не переходя к потенциалам.

Используя ур. 3, 4, 7, можно получить следующую систему алгебраических уравнений для амплитуд волн

$$\begin{aligned} -\omega_{1,2} \mathbf{v}_{1,2} - \frac{(\mathbf{k}_{1,2} \times \mathbf{h}_{1,2}) \times \mathbf{H}_0}{4\pi n_0 M} + \frac{S^2 n_{1,2}}{n_0} \mathbf{k}_{1,2} = \\ -\frac{1}{2} (\delta v k_{2,1}) \mathbf{v}_{2,1} \mp \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{2,1}, \mathbf{k}_0) \delta v + \frac{(\mathbf{k}_{2,1} \times \mathbf{h}_{2,1}) \times \delta \mathbf{H}}{8\pi n_0 M} \\ \pm (\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{h}_{2,1} \mp \frac{(\mathbf{k}_0 \times \delta \mathbf{H}) \times \mathbf{H}_0 n_{2,1}}{n_0} \\ -\omega_{1,2} \mathbf{h}_{1,2} - \mathbf{k}_{1,2} \times (\mathbf{v}_{1,2} \times \mathbf{H}_0) \\ = \frac{1}{2} \mathbf{k}_{1,2} \times (\delta v \times \mathbf{h}_{2,1} + \mathbf{v}_{2,1} \times \delta \mathbf{H}) \\ -\omega_{1,2} n_{1,2} + n_0 \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{v}_{1,2} = -n_{2,1} \mathbf{k}_{1,2} \cdot \delta v / 2 \end{aligned} \quad (18)$$

где $h_{1,2}, v_{1,2}, n_{1,2}$ — амплитуды волн с частотами $\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \omega^{(1)}$, $\omega_2 = \omega_2^{(0)} + \omega^{(1)}$ и волновыми векторами k_1 и k_2 , связанными соотношениями 3, 4. Используя систему уравнений 1 (и выражая величины $h_{1,2}, v_{1,2}$, например, через $n_{1,2}$), можно исследовать устойчивость альфвеновской волны по отношению к различным видам возмущений.

Пусть возмущение является совокупностью альфвеновской и магнитозвуковой волн, которые ниже отмечаются индексами 1, 2. Тогда из условия разрешимости системы 18 находим

$$\omega^{(1)2} = \frac{k_{2y}^2 \delta V^2}{16 \{1 + [k_{2x} k_{2y} / (\omega_2^2 - k_{2x}^2 S^2)]^2\}} \times \left\{ \frac{\omega_2^2 \cos \delta}{\omega_2^2 - k_{2x}^2 S^2} - 4 \sin \gamma \sin(\gamma + \delta) \right\}^2 \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (19)$$

где δ — угол между плоскостями k_0, H_0 и k_1, H_0 , а γ — между k_1, H_0 и k_2, H_0 , ось x выбрана вдоль H_0 , ось y перпендикулярно H_0 в плоскости k_2, H_0 (рис. 2).

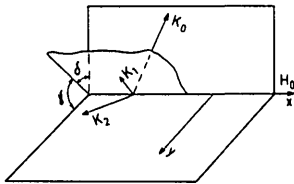


Рис. 2 Геометрия возмущения совокупностью альфвеновской и магнитозвуковой волн.

Из ур. 19 видно, что возмущения, у которых ω_1 и ω_2 имеют разные знаки (а, следовательно, удовлетворяют ур. 5), нарастают со временем.

Используя ур. 3, 5, 19, можно показать, что исходная альфвеновская волна неустойчива при любом угле распространения по отношению к постоянному магнитному полю.

Для случая сильного магнитного поля

$$H_0^2 / 8\pi \gg p_0 \quad (20)$$

инкремент $\nu = -i\omega^{(1)}$ нарастания малых возмущений в виде альфвеновской и медленной магнитозвуковой волн по порядку величины равен

$$\nu \approx \delta V \omega_0 / (10 u S)^{1/2} \quad (21)$$

Как и всегда при «распадных» неустойчивостях инкремент пропорционален амплитуде исходной волны.

Если в возмущение вместо альфвеновской волны входит быстрая магнитозвуковая волна, то можно показать, что инкремент нарастания возмущений того же порядка, что и ν . Возмущения других видов, для которых выполняются распадные условия, имеют инкременты, много меньшие ν .

Заметим, что существенную роль для возникновения неустойчивости играет сжимаемость среды. Можно показать, что в пренебрежении сжимаемостью альфвеновские волны устойчивы.

2Б АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ С ПИЛООБРАЗНЫМ ПРОФИЛЕМ МАГНИТНЫХ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ [25]

В системе координат, связанной с волной в областях, где магнитное поле постоянно, решение ищется в виде суперпозиции собственных колебаний среды (альфвеновская, магнитозвуковая и энтропийная волны). (Напомним, что альфвеновские волны произвольной амплитуды и формы являются точными решениями уравнений идеальной магнитной гидродинамики.) Кроме того необходимо учитывать малое смещение границы между областями с постоянным магнитным полем. Условия непрерывности потоков массы, энергии, импульса, нормальной к разрыву составляющей магнитного поля и тангенциальной составляющей электрического поля [26] позволяют найти ω и, следовательно, решить задачу устойчивости исходной волны.

Используя периодичность (по координатам) коэффициентов уравнений магнитной гидродинамики, можно представить возмущения скорости v , магнитного поля h и плотности ρ_1 в виде (напомним, что исследование устойчивости проводится в системе координат, связанной с исходной альфвеновской волной).

$$\psi = u(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \quad (22)$$

где ψ — любая из величин v, h, ρ_1 ; $u(\mathbf{r})$ — периодическое (с периодом исходной альфвеновской волны) решение уравнений; ω — частота возмущений.

Линеаризуем относительно малых возмущений условия непрерывности. Тогда выбрав ось x вдоль невозмущенного магнитного поля H_0 , а ось y вдоль направления колебаний гидродинамической скорости альфвеновской волны δv , распространяющейся вдоль x , можно записать

$$\begin{aligned} \{\rho_1\} &= 0 \\ \{v_{x,z} + h_{x,z} / (4\pi \rho_0)^{1/2}\} &= 0 \\ \left\{ v_y + \frac{h_y}{(4\pi \rho_0)^{1/2}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0} \delta V_y \right\} &= 0 \\ \{h_y \delta H_y + h_x H_0\} &= 0 \\ \left\{ v_y + k_y \frac{\delta V_y}{\omega} \delta \mathcal{D} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

(Условия 23 выписаны нами для адиабатических возмущений, которые и рассматриваются в дальнейшем. Кроме того, при получении ур. 23 была использована связь возмущения скорости границы с ее смещением:

$$\xi(y, z) \approx \exp(i k_y y + i k_z z); \delta \mathcal{D} = -i \omega \xi(y, z).$$

где $\delta H = -(4\pi \rho_0)^{1/2} \delta V$ — магнитное поле альфвеновской волны; $\delta \mathcal{D}$ — возмущение скорости границы между областями с постоянным магнитным полем. Посредством фигурных скобок здесь

мы обозначили разность значений возмущенных величин с обеих сторон поверхности разрыва.

Для простоты рассмотрим случай, когда скорость и магнитное поле возмущений лежат в плоскости x, y (рис. 1). Тогда решения в областях с постоянным магнитным полем можно представить в виде суперпозиции медленных и быстрых магнитозвуковых волн. (Связь величин ρ_1, v, h в волнах находится из магнитогидродинамических уравнений.)

Пусть в интервале $-b < x < 0$ решение есть

$$\psi = \{C_1 \exp i k_1^- x + C_2 \exp K_1^- x + C^3 \exp i k_2^- x + C^4 \exp i K_2^- x\} \exp(-i \omega t + i k_y y) \quad (24)$$

где $k_{1,2}$ — составляющие волновых векторов по оси x соответственно для медленной и быстрой магнитозвуковых волн, k и K — соответствуют двум линейно независимым решениям с данной частотой ω .

Аналогично в интервале $0 < x < a$ имеем

$$\psi = \{C_5 \exp i k_1^+ x + C_6 \exp i K_1^+ x + C_7 \exp i k_2^+ x + C_8 \exp i K_2^+ x\} \exp(-i \omega t + i k_y y) \quad (25)$$

Решение в области $a < x < a+b$ получаем из условия периодичности ур. 22

$$\psi = \{C_1 \exp i k_1^-(x-a-b) + C_2 \exp i K_1^-(x-a-b) + C_3 \exp i k_2^-(x-a-b) + C_4 \exp i K_2^-(x-a-b)\} \times \exp[-i \omega t + i k_y y + i p(a+b)] \quad (26)$$

Граничные условия ур. 23 представляют собой систему восьми линейных уравнений для восьми коэффициентов C_1, \dots, C_8 . Из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное соотношение $\omega = \omega(p, k_y)$. В общем случае оно имеет довольно громоздкий вид. Поэтому мы приведем его для наиболее интересного случая волны большой амплитуды ($\delta V \gg v_a$), распространяющейся в среде малого давления ($S \ll v_a \ll \delta V$, S — скорость звука)

где

$$k_2^\pm = (\omega/\delta V) (1 \pm 2 k_y \delta V/\omega)^{1/2} \\ \delta = p(a+b)$$

В пренебрежении правой частью ур. 27 имеет действительные корни. Корни, соответствующие первым двум сомножителям, относятся к медленной магнитозвуковой волне и имеют вид, напоминающий условия для волновым чисел в резонаторе ($\omega S/v_a \delta V = n\pi/a$, $n=0, \pm 1, \pm 2$). Третий сомножитель относится к быстрой волне и по форме совпадает с уравнением для энергии электрона в периодическом поле. Учет правой части дает поправку к частотам нулевого приближения. Если в нулевом приближении два корня (соответствующие медленной и быстрой волнам) совпадают, то квадрат поправки к частоте оказывается отрицательным. В этом случае инкремент раскочки малых возмущений, наложенных на исходную альфвеновскую волну, по порядку величины равен:

$$\nu \approx v_a/a \quad (28)$$

Рассмотренная неустойчивость напоминает неустойчивость альфвеновской волны малой амплитуды по отношению к одновременному возбуждению медленной и быстрой магнитозвуковых волн [17].

3 Результаты исследования устойчивости различных видов нелинейных установившихся колебаний [15—24]

А Наличие или отсутствие «распадной» неустойчивости можно предсказать, зная форму спектра. Пусть имеется лишь одна ветвь колебаний. На рис. 3 изображены простейшие возможные формы спектров. Как легко показать, «распадные» условия могут быть выполнены лишь для спектров 1,4. Колебания, имеющие спектры, аналогичные спектрам 2 и 3, устойчивы по отношению к распадам. Однако при наличии нескольких ветвей в спектре колебаний, колебания, характеризуемые спектрами типа 2 или 3, могут

$$\left(\sin \frac{\omega S a}{v_a \delta V}\right) \left(\sin \frac{\omega S b}{v_a \delta V}\right) \left[\cos \delta - (\cos k_2^- b) (\cos k_2^+ a) + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2^+}{k_2^-} + \frac{k_2^-}{k_2^+} \right) \right. \\ \times (\sin k_2^- b) (\sin k_2^+ a) = -6 \frac{S v_a}{\omega \delta V} \left(\sin \frac{\omega S b}{v_a \delta V} \right) \left\{ [k_2^- (\cos k_2^+ a) \sin k_2^- b \right. \\ \left. + k_2^+ (\sin k_2^+ a) \cos k_2^- b] \left(\cos \frac{\omega S a}{v_a \delta V} \right) - k_2^+ (\sin k_2^- a) \cos \left(\frac{\omega + k_y \delta V}{v_a} a - \delta \right) \right. \\ \left. - k_2^- (\sin k_2^- b) \cos \frac{\omega + k_y \delta V}{v_a} \right\} - 6 \frac{S v_a}{\omega \delta V} \left(\sin \frac{\omega S a}{v_a \delta V} \right) \\ \times \left\{ [k_2^- (\cos k_2^+ a) \sin k_2^- b + k_2^+ (\sin k_2^+ a) \cos k_2^- b] \cos \frac{\omega S b}{v_a \delta V} \right. \\ \left. - k_2^- (\sin k_2^- b) \cos \left(\frac{\omega - k_y \delta V}{v_a} b - \delta \right) - k_2^+ (\sin k_2^+ a) \cos \left(\frac{\omega - k_y \delta V}{v_a} b \right) \right\} \quad (27)$$

Б ПЛАЗМА БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

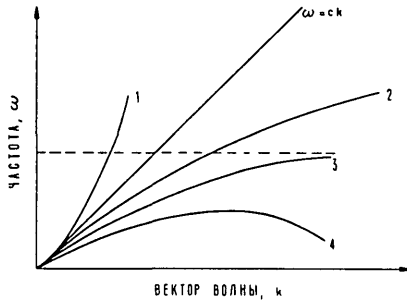


Рис. 3 Простейшие возможные формы спектра.

быть неустойчивыми по отношению к распаду на колебания, из которых хотя бы одно не принадлежит данной ветви. Более точно — распады возможны тогда, когда через три точки, соответствующие колебаниям $\omega_0, k_0; \omega_1, k_1; \omega_2, k_2$ (эти три точки, вообще говоря, могут лежать на разных ветвях) можно провести кривую, подобную либо кривой 1, либо кривой 4. (Для различных ветвей колебаний могут, однако, возникнуть «запреты», связанные с поляризацией волн, т.е. матричный элемент может обратиться в нуль.)

Рассмотренный в предыдущем параграфе распад альфвеновской волны является характерным примером распада колебания, принадлежащего одной ветви, на колебания, принадлежащие другим ветвям. Как видно из дальнейшего, а также из приведенных на таблице 1 схем распадов колебаний, для плазмы характерными являются неустойчивости, связанные с возбуждением колебаний другого вида.

Хорошо известно, что в плазме без магнитного поля существуют два вида нелинейных установившихся колебаний [11] электронные ленгмюровские и ионные продольные колебания неизотермической плазмы ($p_i \ll p_e$, где p_i и p_e соответственно ионное и электронное давления). Ионные продольные колебания устойчивы, т.к. ни для каких видов возмущений не могут быть выполнены распадные условия. Электронные ленгмюровские колебания неустойчивы лишь в неизотермической плазме. Однако такая неустойчивость приводит фактически к сдвигу частоты исходной электронной ленгмюровской волны. Действительно, при распаде электронной ленгмюровской волны возбуждаются ионно-звуковая и электронная ленгмюровская волна (с частотой меньшей чем частота исходной волны). Можно показать [15], что при этом доля энергии, «перекачиваемая» в ионные колебания, в $(M/m)^{1/2}$ раз меньшая, чем в электронные. Таким образом основная энергия остается в электронных колебаниях.

В ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Увеличение числа ветвей колебаний, по сравнению с числом ветвей колебаний плазмы без магнитного поля, дает дополнительные возможности для распадов. Ионные продольные колебания, например, рассмотренные выше, могут распадаться при определенных соотношениях между параметрами плазмы и внешним магнитным полем: ($n_0 T_e > H^2/4\pi$, где n_0 — плотность плазмы, T_e — электронная температура) [16]. Выражение для

ТАБЛИЦА 1. Схемы „распадов“ установившихся колебаний плазмы*

Тип колебания	Ионные продольные колебания неизотермической плазмы ($p_i \ll p_e$)	Электронные ленгмюровские колебания	Магнитозвуковые колебания	Альфвеновские волны
Плазма без магнитного поля	Устойчивы	Неустойчивы при $p_i \ll p_e$ $\frac{k_1 (T_e/M)^{1/2}}{(\omega_0^2 + k_0^2 v_e^2)^{1/2}}$ $\frac{(\omega_0^2 + k_2^2 v_e^2)^{1/2}}{(\omega_0^2 + k_0^2 v_e^2)^{1/2}}$		
Плазма в магнитном поле	Неустойчивы при $n_0 T_e > H^2/4\pi$ $\frac{k_0 (T_e/M)^{1/2}}{k_1 v_a (k_1 z v_a)}$ $\frac{k_2 v_a (k_2 z v_a)}{k_0 (T_e/M)^{1/2}}$	Неустойчивы при $\omega_0 \approx 2\omega_H$ $\frac{\omega_H}{\omega_0}$ $\frac{\omega_0}{\omega_H}$	$\frac{k_1 z v_a (k_1 v_a)}{k_0 v_a}$ $\frac{(H_0^2/8\pi \gg p_i)}{k_2 z S}$	$\frac{k_1 v_a (k_1 z v_a)}{k_0 z v_a}$ $\frac{(H_0^2/8\pi \gg p_0)}{k_2 z S}$

* Приведены схемы „распадов“ с максимальными инкрементами нарастания возмущений.

максимального инкремента нарастания возмущений в виде суммы двух магнитогидродинамических волн имеет простой вид

$$\nu \approx (\delta v_i/u) (\omega_0/4) [1 - (v_a/u)^2]^{1/2} \quad (29)$$

где δv_i — амплитуда гидродинамической скорости ионной продольной волны, u — ее фазовая скорость, ω_0 — частота; v_a — альфвеновская скорость.

Устойчивость магнитозвуковой волны, распространяющейся поперек магнитного поля, исследовалась в работ 20, 21. Там показано, что такая волна неустойчива по отношению к распаду на магнитозвуковые волны. В указанных работах результаты исследования устойчивости также прилагаются к исследованию устойчивости осцилляторной структуры бесстолкновительной ударной волны. Наличие неустойчивости приводит к установлению турбулентной структуры такой волны.

Если в отсутствие магнитного поля распад электронной ленгмюровской волны приводит фактически лишь к сдвигу ее частоты, то при наличии магнитного поля возможен распад, приводящий к «перекачке» энергии ленгмюровской волны в энергию другого вида колебаний [18, 22, 24]. При $\omega_0 \approx 2\omega_H$ (где ω_H — электронная циклотронная частота) происходит распад электронной ленгмюровской волны на две электромагнитные. Можно показать, что возбуждаемые электромагнитные волны имеют разные поляризации (волны с одинаковым поляризациями не нарастают). Максимальный инкремент нарастания указанных волн ν по порядку величины равен:

$$\nu \approx \delta\nu \omega_H/10u \quad (30)$$

Отметим, что описанный распад, повидимому, наблюдался в работе 14. Роль ленгмюровских колебаний играл первоначально модулированный пучок. Неустойчивость по отношению к возбуждению поперечных волн возникла при условии

$$p \omega_M \approx 2 \omega_H \quad (31)$$

где ω_M — «частота» модулированного пучка (скорость пучка умноженная на $2\pi/L$, где L — пространственный период модуляции), $p=1, 2, 3, \dots$. При $p=1$ (ур. 31) есть условие распада основной гармоники. При $p=2, 3 \dots$ — это условие распада кратных гармоник.

4 Заключительные замечания

До сих пор мы рассматривали неустойчивость установившихся волн в безграничной среде. Можно распространить метод исследования устойчивости волн малой амплитуды на случай ограниченной среды. В частности в работе 23 был исследован распад электромагнитной волны в плазменном цилиндрическом волноводе. В работе показано, что в цилиндрическом волноводе без магнитного поля распад электромагнитной волны невозможен. Это видно из вида дисперсионной кривой (см. предыдущий параграф). В плазменном же волноводе, помещенном в магнитное поле, такой

распад возможен. Возможность такого распада связана с появлением дополнительных ветвей дисперсионных кривых. Характерный инкремент рассмотренной в [23] неустойчивости по порядку величины равен

$$\nu \approx \epsilon \omega_0/10 \lambda_p$$

где ω_0 — частота исходной волны, λ_p — корень первой функции Бесселя ($J_1(\lambda_p)=0$), $\epsilon = E_0/mu\omega_0$ где E_0 — амплитуда электрического поля исходной волны, u — ее фазовая скорость, m — масса электрона.

Очевидной особенностью ограниченных сред является наличие предельной длины волны. Может оказаться, что волны, распадающиеся в неограниченной среде, будут устойчивы в среде ограниченной. Так при учете малой сжимаемости альфвеновская волна неустойчива в неограниченной среде. Однако в ограниченной среде распадные условия для сред с малой сжимаемостью могут не выполняться. (Для сред с большой сжимаемостью — малой величиной скорости звука по сравнению с альфвеновской скоростью — такого ограничения на «распад» альфвеновской волны практически нет).

Во всех упомянутых в настоящем обзоре работах использован гидродинамический метод описания плазмы (используется одножидкостная модель магнитной гидродинамики или двухжидкостное описание, основанное на гидродинамических уравнениях для ионов и электронов). (Для разреженной плазмы такой подход оправдан, если фазовые скорости рассматриваемых волн много больше тепловых.) Тем не менее изложенный нами метод исследования устойчивости волн малой амплитуды с небольшим видоизменением может быть применен и в случае кинетического описания плазмы.

Существенным обстоятельством является то, что рассмотрение устойчивости проводилось в первом порядке теории возмущений. Может оказаться, что колебания устойчивые, по отношению к распаду на два других, будут неустойчивы в следующем порядке теории возмущений (т.е. будут неустойчивы, например, по отношению к распаду на три колебания).

Распадные неустойчивости могут служить дополнительным механизмом бесстолкновительной «диссипации». При этом, однако, энергия переходит не непосредственно в тепловое движение частиц, а в энергию шумов. Как указано в предыдущем параграфе, возможна передача энергии одного вида колебаний в другой (например, продольных колебаний в поперечные).

Автор благодарен Р. З. Сагдееву за постоянный интерес к вопросам, затронутым в настоящем обзоре, и А. А. Галееву за дискуссии.

Литература

1. А. И. АХИЕЗЕР, Я. Б. ФАЙНБЕРГ, *Ж. эксп. теор. Физ.* 21 (1951) 1261.
2. D. Воhm, E. Gross, *Phys. Rev.* 75 (1951) 1851, 1864.

3. L. LONGMIRE, M. ROSENBLUTH, *Ann. Phys. (New York)* 1 (1957) 120.
4. А. А. ВЕДЕНОВ, Е. П. ВЕЛИХОВ, Р. З. САГДЕЕВ, *Усп. физ. Наук* 73 (1961) 701.
5. Б. Б. КАДОМЦЕВ, в *Вопросы Теории Плазмы*, Атомиздат, Москва, 2 (1963) 132.
6. В. Д. ШАФРАНОВ, в *Вопросы Теории Плазмы*, Атомиздат, Москва, 2 (1963) 92.
7. Я. Б. ФАЙНБЕРГ, *Атом. Энергия* 11 (1961) 313.
8. P. A. STURROCK, *Proc. Roy. Soc. (London)* 242 (1957) 1230, 277.
9. H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics* Oxford (Clarendon Press) London, New York (1950).
10. I. BERNSTEIN, J. GREENE, M. KRUSKAL, *Phys. Rev.* 108 (1957) 546.
11. А. А. ВЕДЕНОВ, Е. П. ВЕЛИХОВ, Р. З. САГДЕЕВ, *Ядерный Синтез* 1 (1961) 82.
12. Р. З. САГДЕЕВ, в сбор. *Физика Плазмы и Проблема Управляемых Термоядерных Реакций*, Академия Наук СССР, Москва 4 (1958) 384.
13. J. ADLAM, J. ALLEN, *Phil. Mag.* 3 (1958) 448.
14. И. Я. ХАРЧЕНКО, Я. Б. ФАЙНБЕРГ, и др. *Ж. техн. Физ.* 31 (1961) 761.
15. В. Н. ОРАЕВСКИЙ, Р. З. САГДЕЕВ, *Ж. техн. Физ.* 32 (1962) 1291.
16. В. Н. ОРАЕВСКИЙ, *Ж. прикл. мех. техн. Физ.* 5 (1962) 39.
17. А. А. ГАЛЕЕВ, В. Н. ОРАЕВСКИЙ, *Докл. Акад. Наук СССР* 147 (1962) 71.
18. В. Н. ОРАЕВСКИЙ, Диссертация (1963 г.)
19. В. Н. ОРАЕВСКИЙ, *Ж. техн. Физ.* 33 (1963) 251.
20. А. А. ГАЛЕЕВ, В. И. КАРПМАН, *Ж. эксп. теор. Физ.* 44 (1963) 592.
21. В. И. КАРПМАН, Р. З. САГДЕЕВ, *Ж. техн. Физ.* 33 (1963) 805.
22. Л. А. ОСТРОВСКИЙ, Н. С. СТЕПАНОВ, *Ж. эксп. теор. Физ.* 45 (1963) 1475.
23. А. Н. КОНДРАТЕНКО, *Ж. техн. Физ.* 33 (1963) 1937.
24. В. Н. ОРАЕВСКИЙ, *Атом. Энергия* 16 (1964) 441.
25. А. А. ГАЛЕЕВ, В. Н. ОРАЕВСКИЙ, *Докл. Акад. Наук* 154 (1964) 1069.
26. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ, *Электродинамика Сплошных Сред*, Физматиздат, Москва (1957).

(Рукопись получена 22 июня 1964 г.)

NUCLEAR FUSION

IAEA, Kärntner Ring 11, Vienna 1, Austria

ENGLISH TRANSLATION of the article in NUCLEAR FUSION 4 (1964) no 4

(The following English version is provided in text only, with blanks where symbols and equations appear in the original. Thus it is to be used beside the original from which the reader can get the missing elements.)

THE STABILITY OF NON-LINEAR STEADY-STATE PLASMA
OSCILLATIONS

V.N. Oraevsky

Abstract

This study is of a review nature. In section 1 is described the method of investigation of the stability of stationary oscillations of not too large amplitude (the ratio of the hydrodynamic wave velocity to phase velocity serves as a small parameter) [15]. Instabilities arise because of the presence of a positive feedback between small sinusoidal oscillations propagating in the "background" of the finite-amplitude wave. Instabilities recall quasi-particle decays: frequencies and wave vectors of developing oscillations are related to the frequency and wave vector of the initial wave by relations typical of the laws of energy and momentum conservation. A characteristic peculiarity of growth rates of developing oscillations is their proportionality to the value of the initial-wave amplitude.

A concrete example of finding the growth rate of small perturbations is discussed; the stability of a sinusoidal Alfvén wave of small amplitude (section 2 A) is investigated. Instability of such a wave is related to compressibility of the medium (for incompressible media instability disappears).

For large-amplitude oscillations there is no general method for stability investigation. However even here a positive feedback

(cont'd)

between small oscillations can appear. For this reason an Alfvén wave is unstable (in a compressible medium!) if it has an arbitrary amplitude with a sawtooth profile for the magnetic field lines [25] (the chosen profile of the magnetic field lines enables one to solve the problem precisely (section 2 B)).

In the concluding portion of the review (sections 3,4) the results of investigation of the stability of other oscillation modes are given, such as ion-acoustic oscillations of a non-isothermal plasma, electron Langmuir oscillations, magneto-acoustic oscillations, etc.

1 General remarks. Formulation of the problem

1. Questions of non-linear theory of oscillations have attracted particular attention recently. This is largely connected with the discovery in linear theory of a large number of instabilities relating to the excitation of various types of oscillations (see, for example, refs. 1-7). Following the discovery of instability, questions such as the following arise: (1) What happens subsequently to growing oscillations? (2) What is the effect of these oscillations on the behaviour of the total plasma? Naturally, only the non-linear theory of plasma oscillations can provide answers to these questions.

One of the first steps in creating a non-linear theory of oscillations is the investigation of the simplest mechanisms of non-linear wave interaction inducing damping or limitation of the amplitude of some harmonics and the increase of others. The "birth" mechanism of multiple harmonics is well known. A compelling force, figuratively speaking, acts upon the small oscillations in the presence of a sinusoidal wave of finite amplitude, and the multiple harmonic in the resonance is thereby excited. Another well known mechanism for exciting new harmonics is the "scattering" mechanism of one wave on another with a change in the frequencies and wave vectors of both waves [8]. These mechanisms for exciting new harmonics are not the only ones in plasma.

(cont'd)

Small oscillations propagated independently in a homogeneous medium are, generally speaking, related where a wave of finite amplitude is present. This relationship of waves through the initial wave of finite amplitude can be a positive feedback; that is, it is possible to excite simultaneously a group of waves. It is clear that the condition of positive feedback for fixed waves depends essentially on the space-time characteristics of the wave of finite amplitude. If the space-time characteristics of the waves of finite amplitude change sufficiently rapidly the positive feedback of the fixed waves is rapidly broken and the excitation of such waves curtailed. It is therefore convenient to solve the problem of the excitation of harmonics through the presence of a positive feedback between them in its "pure form" - when the space-time characteristics of the initial wave remain constant. In other words, the excitation of multiple harmonics and the "scattering" of the harmonics of the initial wave must be absent. Such a situation arises in the investigation of the stability of non-linear steady-state oscillations.

We are aware [9-13] that non-linear steady-state oscillations exist in plasma if dissipation is neglected. In conventional gas dynamics it is generally speaking impossible to disregard dissipation when studying the possibility of steady-state motion, for the dissipation effects limit the increase in slope of the leading edge of the originally sinusoidal wave. In plasma the picture changes. Here, for example, there exists a type of wave with transverse polarization, namely Alfvén waves for which non-linear terms of the form ..., responsible for torsion of the leading edge of the wave, are absent in equations describing these waves. Therefore the Alfvén wave of arbitrary form and, in particular, the sinusoidal wave can propagate without distortion (that is of course if one can disregard the dissipation). In the same cases, when there is a tendency to torsion, the dispersion effects can limit the increase in slope [2]. Indeed, the torsion of the leading edge of the wave denotes the "birth" of multiple harmonics. The birth of multiple harmonics (for waves of not-too-great amplitude) will

(cont'd)

not occur if the exciting force (which appears when the terms of the second order in amplitude are taken into consideration) is not in resonance with the system's own oscillations. Such a force has the form:, where are the amplitude, frequency and wave vector of the initial wave, respectively. Evidently if the dispersion law differs substantially from the linear, there will be no resonance, and non-linear steady-state waves can exist in the rarefield plasma (where one can ignore the dissipation).

B. In examining the stability of steady-state plasma oscillations it is convenient to turn to the system of coordinates moving with the wave. In such a system of coordinates the coefficients in the equations for small deviations from the established motion (we shall henceforth call this motion "background") are not dependent on time. Consequently the time dependence of all values characterizing small deviations from the "background" may be expressed in the form Then the system of equations describing the dynamics of small perturbations can be expressed in the form:

$$(1)$$

where ... is the linear differential self-adjoint operator describing oscillations of a homogeneous plasma with eigenfunctions ... proportional to ... and eigenvalues ... satisfying the dispersion equation ...; ... is the linear differential-operator dependent on the background and approaching zero as the background amplitude approaches zero.

In investigating the stability of small-amplitude waves it is natural to use perturbation theory. In this case the problem is one of finding the correction ... to the natural frequency ... which, in first-order perturbation theory, we know to be proportional to the matrix element We shall examine the spatial dependence of the operator For low-amplitude waves the values describing the wave whose stability we wish to examine may be written in the form:

$$(2)$$

(cont'd)

In examining stability with first-order perturbation theory one can neglect the terms Then the spatial dependence of ... is characterized by factors Evidently the matrix element, as well as ..., are non-vanishing only when at least two wave vectors (... and ...) correspond to one ... and they are coupled by a relationship of type [15] :

(3)

This equality does not change even when transferred to a laboratory system of coordinates. The frequencies ... and corresponding to wave vectors ... and ... are coupled in the laboratory system of coordinates by the relationship:

(4)

where ... is the frequency of the "background" oscillations in the laboratory system of coordinates.

Conditions 3 and 4 do not give an exact criterion for the instability of non-linear steady-state waves. They simply indicate the possibility that instability exists. According to A.A. Galeev and V.I. Karpman one can formulate the criterion for instability using certain symmetry properties of the matrix element [20]. It appears that, if in eq 4 the signs of the frequencies are such that the condition

(5)

is fulfilled, instability occurs. Otherwise the steady-state oscillations are stable. Conditions 3 and 5 are analogous to the conditions of decay of quasi-particles; therefore we shall henceforth call these conditions "decay" conditions and the instability itself, which is associated with the fulfillment of the decay conditions we shall call oscillation "decay" [15].

C We shall examine in greater detail the principle for finding the correction to frequencies ... and For this we shall examine the stability of the Alfvén wave, directing our attention in this section mainly to the method for finding (A detailed calculation

(cont'd)

will be given in the following section in a somewhat different and, in practice, more convenient form).

In the present case the stationary state is an Alfvén wave for which the magnetic field ... (where ..., is the wave velocity) and the hydrodynamic velocity ... are perpendicular to the direction of propagation ... and to the unperturbed magnetic field In a system moving with the wave linearized equations for perturbations have the form:

(6)

Here ..., ..., ... are perturbations of the velocity, the magnetic field, density and pressure, respectively.

In accordance with what was said before we express the time dependence of the values characterizing small deviations from the "background" in the form Then eq 6 can be rewritten for Fourier components in spatial variables in the form

(7)

In eq.7 it is convenient to turn to the variables ... which are determined as follows

(8)

where ... and ... evidently represent the Fourier components of the vector and scalar velocity potential; ... is the Fourier component of the vector potential of the magnetic field measured in units of velocity potential; ... is the density perturbation, also measured in units of velocity potential. The vectors ... and ... are subject to the condition of transverseness.

(9)

Substituting eq. 8 in eq. 7 one can obtain the following equations relating to the new variables

(we direct the z axis along the constant magnetic field).

(10)

where

(11)

(cont'd)

As can be seen from eq. 7

and the operator does not depend on the amplitude of the initial Alfvén wave.

It can be seen from eq. 11 that ... is a Hermitian (or, to be more precise, symmetrical) operator. The eigenvalues of the operator ... are determined by the well known dispersion equation

(12)

and the eigenvectors form a complete orthogonal system of vectors. This system has the form (for ...)

where

(13)

where are the eugenvectors of the Alfvén waves (corresponding to the eigenvalues ...), ... are the eigenvectors of the fast magneto-acoustic wave and ... are the eigenvectors of the slow magneto-acoustic wave.

It can easily be seen (see eq.10) that the correction ... to frequency ... is non-vanishing(in perturbation theory that is first-order in the amplitude of the initial wave) only when two distinct wave vectors (... and ...), coupled by relationships of the type of eq.3 correspond in the zero approximation to a single In this case, in the first approximation in the quantity ... (to be more precise, in the parameter ...) we have the following system of interlocking equations for manitudes relating to the first and second waves

(14)

(15)

As is normal in finding the correction to the eigenvalue ..., by multiplying eqs. 14 and 14 by the unit vectors of the corresponding eigenvectors we obtain

(16)

(... is the corresponding unit vector, ... is the modulus of vector ...).

(cont'd)

From the solution of eq. 16 we write the expression for the square of ...

(17)

D One may expect that the instability mechanism examined above and associated with the appearance of a positive feedback between certain types of oscillations where a wave of low (but finite) amplitude is present, functions if the amplitude of the initial wave is not small. Naturally, major mathematical difficulties do not permit the examination of the instability of large-amplitude periodic waves where the wave has an arbitrary form. For these types of waves, for which dispersion stops the increase in the slope of the leading edge of the wave, the form of the steady-state wave and the maximum value of its amplitude are determined by dispersion and cannot be defined arbitrarily. It was possible to examine closely [25] one particular case - an Alfvén wave with a saw-tooth profile for the force lines of the magnetic field (fig.1). The problem can be reduced to the solution of equations with periodically discontinuous coefficients which are constant within a period. Matching solutions at points of discontinuity permits the determination of In par.2, section B we shall show that an Alfvén wave with a saw-tooth profile for the magnetic-field lines is unstable, while the instability mechanism is analogous to the instability mechanism of small-amplitude waves.

2 The instability of the periodic structure of Alfvén oscillations

2A Low-amplitude sinusoidal Alfvén wave [17]

In practice, when calculating the correction ..., to the eigenvalues ... and ... it is more convenient to use the system of equations 7 without turning to the potentials.

Using eqs. 3, 4 and 7, the following system of algebraic equations for the amplitudes of the waves can be derived

(18)

(cont'd)

where are the wave amplitudes with frequencies,
 and wave vectors ... and ... related by eqs. 3 and 4.
 If we use the system of equations 1 (and express the values ...,
 ... for example through ...) the stability of the Alfvén wave can
 be examined with regard to various types of perturbation.

Let the perturbation be a combination of an Alfvén wave and a
 magneto-acoustic wave, which are denoted below by the indices 1,2.
 Then, from the condition of solvability of system 18 we find

$$(19)$$

where ... is the angle between the ... and ... planes, and ...
 is that between ... and ..., the x axis is chosen along ..., the
 y axis perpendicularly to ... in the plane (fig. 2).

From eq. 19 it can be seen that perturbations in which ... and
 ... have different signs (and consequently satisfy eq. 5) grow with
 time.

With eqs. 3, 5 and 19 it can be shown that the initial Alfvén
 wave is unstable at any angle of propagation in respect of the stable
 magnetic field.

For the case of a strong magnetic field

$$(20)$$

the growth rate of small perturbations in the form of an Alfvén
 wave and a slow magneto-acoustic wave is equal in order of magnitude
 to

$$(21)$$

As always in the case of "decay" instabilities the rate is proportion-
 al to the amplitude of the initial wave.

If, instead of an Alfvén wave, a fast magneto-acoustic wave
 enters the perturbation it can be shown that the growth rates of the
 perturbations are of the same order, as is also Other types
 of perturbations, for which the decay conditions are fulfilled, have
 rates which are less than

(cont'd)

It should be noted that the compressibility of the medium plays an important part in the onset of oscillations. It can be shown that if the compressibility is disregarded the Alfvén waves are stable.

2 Alfvén waves of arbitrary amplitude with sawtooth magnetic force line profile [25]

In a system of coordinates associated with a wave in regions where the magnetic field is stable, a solution is sought as a superposition of the oscillations of the medium itself (Alfvén, magnetoacoustic and entropy waves). (It should be remembered that Alfvén waves of arbitrary amplitude and form are exact solutions of equations of ideal magnetic hydrodynamics.) In addition, the small shift of boundary between regions with a stable magnetic field must be taken into consideration. The continuity conditions of the flows of mass, energy, momentum of the component of the magnetic field perpendicular to the boundary and the tangential component of the electric field [26] enable ... to be found and, consequently, the problem of the stability of the initial wave to be solved.

Using the periodicity (along the co-ordinates it should be remembered that the examination of stability is conducted in a system of co-ordinates associated with the initial Alfvén wave) of velocity ..., magnetic field ... and density ... in the forms

(22)

where ... is any of the quantities ..., ..., ..., ... is the periodic (with the period of the initial Alfvén wave) solution of the equations; ... is the frequency of the perturbations.

Linearising the continuity conditions with respect to the small perturbations and then choosing the x axis ... along the unperturbed magnetic field ..., and the y axis ... along the direction of the hydrodynamic velocity oscillations of the Alfvén wave ... propagating along ..., we can write

(23)

(cont'd)

(Conditions 23 have been written for adiabatic perturbations which will be examined later. In addition, in deriving eqs. 23, use was made of the boundary velocity perturbation with its shift:

.)

where is the magnetic field of the Alfvén wave; is the perturbation of the velocity of the boundary between regions with a constant magnetic field. By means of curly brackets here we have indicated the difference in values of the perturbed quantities on the two sides of the discontinuity surface.

For the sake of simplicity we shall examine the case where the velocity and magnetic field perturbations lie in the x, y plane (fig.1). Then the solutions in regions with constant magnetic field can be represented as superpositions of slow and fast magneto-acoustic waves. (The relations among the quantities , , in the waves is found from the magneto-hydrodynamic equations.)

In the interval let the solutions be

(24)

where are the components of the wave vectors along x axis for the slow and fast magneto-acoustic waves respectively, ... and ... correspond to two linearly independent solutions with the given frequency

Analogously, in the range ... we have

(25)

We obtain the solution in the region from the periodicity condition of eq. 22

(26)

The boundary conditions of eq. 23 are a system of eight linear equations for eight co-efficients From the solvability condition of this system we obtain the dispersion relationship Generally this has a fairly cumbersome form. Therefore we state it for the most interesting case of a large-amplitude wave (.....) propagating in a low-pressure medium (..... , is the speed of sound)

(27)

where

(cont'd)

Ignoring the right-hand part, equation 27 has real roots. The roots corresponding to the first two factors refer to a slow magneto-acoustic wave and have a form that calls to mind the conditions for wave numbers in a resonator (.....,). The third factor relates to a fast wave and coincides in form with the equation for electron energy in a periodic field. Taking into account the right-hand part, we obtain the correction to the zero-approximation frequencies. If two roots (corresponding to the slow and fast waves) correspond in the zero approximation, the square of the correction to the frequency is negative. In this case, the build-up rate of small perturbations superposed on the initial Alfvén wave is equal in order of magnitude to

(28)

The instability examined above calls to mind the instability of a small-amplitude Alfvén wave with respect to simultaneous excitation of the slow and fast magneto-acoustic waves [17].

3 Results obtained in examining the instability of various types of non-linear steady-state oscillations [15-24]

A. The presence or absence of "decay" instability can be predicted if the form of the spectrum is known. Let it be assumed that there is only one oscillation branch. The simplest possible spectrum forms are depicted in fig. 3. As can be readily demonstrated, the "decay" conditions can be fulfilled only for spectra 1 and 4. The oscillations with spectra analogous to spectra 2 and 3 are stable with respect to decay. However, if there are several branches in the oscillation spectrum, the oscillations characterized by spectra of type 2 or 3 may be unstable with respect to decay into oscillations of which at least one does not belong to the given branch. To be more precise, decay may occur when it is possible to draw a curve similar to either curve 1 or curve 4 through three points corresponding to oscillations (.....), (.....), (.....), (generally speaking these three points may lie on different branches,)

(However, for different branches there may arise "exclusions" con-

(cont'd)

ected with the polarization of the waves; that is, the matrix element may become zero.)

The decay of the Alfvén wave examined in the foregoing section is a typical example of the decay of an oscillation belonging to one branch into oscillations belonging to other branches. As will be seen from the following, as well as from the oscillation decay diagrams in table.I, the instabilities which characterize plasma are connected with the excitation of oscillations of another type.

B Plasma without magnetic field

Two types of non-linear steady-state oscillations are known to exist in plasma without a magnetic field [11]. They are the electron Langmuir and longitudinal ion oscillations of non-isothermal plasma (...., where ... and ... are ion and electron pressures, respectively). The longitudinal ion oscillations are stable since the decay conditions cannot be fulfilled for any types of perturbation. The electron Langmuir oscillations are unstable in non-isothermal plasma. However, such instability induces a virtual shift in the frequency of the initial electron Langmuir wave. Upon the decay of the electron Langmuir wave an ion-acoustic and an electron Langmuir wave (with frequency less than the frequency of the initial wave) are excited. It can be demonstrated [15] that in this process the fraction of energy "channelled" into the ion oscillations is ... times smaller than that "channelled" into the electron oscillations. In this way the major part of the energy remains in the electron oscillations.

C Plasma in a magnetic field

The increase in the number of oscillation branches by comparison with the number of oscillation branches in plasma without a magnetic field provides additional possibilities of "decay". For example, the longitudinal ion oscillations examined above may "decay" for certain relations between the plasma parameters and the external magnetic field. (....., where ... is the density of the plasma, ... is the electron temperature) [16]. The expression for the

maximum growth rate of perturbations in the form of the sum of two magnetic hydrodynamic waves has the simple form

(29)

where ... is the amplitude of the hydrodynamic velocity of the longitudinal ion wave, ... is its phase velocity, ... is the frequency; ... is the Alfvén velocity.

The stability of the magneto-acoustic wave propagating across the magnetic field was examined in refs. 20 and 21. There it was shown that such a wave is unstable with respect to decay into magneto-acoustic waves. In these works the results obtained from examining such stability are applied to an examination of the stability of the oscillator structure of a collisionless shock wave. The presence of instability produces a turbulent structure in such a wave.

If, in the absence of a magnetic field, the decay of the electron Langmuir wave does induce only a shift in its frequency, then, where a magnetic field is present, there may occur decay which induces "channelling" of the energy of the Langmuir wave into the energy of other types of oscillation [18, 22, 24]. For (where ... is the electron cyclotron frequency) decay of the electron Langmuir wave into two electro magnetic waves occurs. It can be shown that the excited electro magnetic waves have various polarizations (waves with identical polarizations do not grow). The maximum growth rate of these waves ... is equal in order of magnitude to

(30)

It should be noted that the decay described above is apparently observed in ref. 14. Initially a modulated beam played the part of the Langmuir oscillations. Instability with respect to the excited transverse waves arose under the condition

(31)

where ... is the "frequency" of the modulated beam (the velocity of the beam multiplied by ..., where ... is the spatial period of the modulation), ... = 1,2,3. For ... = 1 (eq. 31) is the condition for the decay of the basic harmonic. For ... = 2,3 etc., this is the condition for the decay of multiple harmonics.

(cont'd)

4 Concluding Remarks

We have so far examined the instability of steady-state waves in an unbounded medium. The method for examining the stability of small amplitude waves may be extended to the case of a bounded medium. In ref. 23 especially, the decay of an electromagnetic wave in a plasma-type cylindrical waveguide was examined. It was shown that in a cylindrical waveguide without magnetic field decay of the electromagnetic wave is impossible. This can be seen from the form of the dispersion curve (see preceding). In a plasma-type waveguide placed in a magnetic field such decay is possible. The possibility of such decay is connected with the appearance of additional branches of the dispersion curves. The typical rate for the instability examined in ref. 23 is equal in order of magnitude to

where ω is the frequency of the initial wave, α is the root of the first Bessel function ($J_0(\alpha) = 0$), A_0 where A_0 is the amplitude of the electric field of the initial wave, v is its phase velocity, m is the mass of the electron.

An obvious feature of bounded media is that the wavelength is limited. It can happen that waves decaying in an unbounded medium are stable in a bounded medium. Thus, when its lowcompressibility is taken into account the Alfvén wave is unstable in an unbounded medium. However, in a bounded medium the decay conditions for low-compressibility media may not be fulfilled.

In all work mentioned in this review the hydrodynamic method (using a single-liquid magnetohydrodynamic model or a two-liquid description based on hydrodynamic equations for ions and electrons) was used for describing a plasma. (for dilute plasma such an approach is justified if the phase velocities of the waves under examination are much greater than thermal velocities.) Nevertheless the method we have expounded for examining the stability of low-amplitude waves may also be applied with small adjustments in the case of the kinetic description of plasma.

(cont'd)

An important point is that the examination of stability was carried out in first-order perturbation theory. It is possible that oscillations are stable with respect to decay into two other oscillations but are unstable in the next order of perturbation theory (that is, they are unstable, for example, with respect to decay into three oscillations).

Decay instabilities can serve as an additional mechanism of collisionless "dissipation". Here, however, the energy is converted not directly into the thermal motion of particles but into noise energy. As was shown in the foregoing section, the conversion of energy of one type of oscillation into another is possible (for example, longitudinal oscillations into transverse).

The author is grateful to R.Z. Sagdeev, for his continuing interest in the questions dealt with in this review, and to A.A. Galeev for assistance given in the course of discussions.

(cont'd)

REFERENCES

1. A.I. Akhiezer, Ya. B. Fainberg, Zh. eksp. teor. Fiz. 21 (1951) 1261.
2. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75 (1951) 1851, 1864.
3. L. Longmire, M. Rosenbluth, Ann. Phys. (New York) 1 (1957) 120.
4. A.A. Vedenov, E.P. Velikhov, R.Z. Sagdeev, Usp. fiz. Nauk 73 (1961) 701.
5. B.B. Kadomtsev, Voprosy teorii plazmy (Questions of plasma theory) Atomizdat, Moscow, 2 (1963) 132.
6. V.D. Shafranov, Voprosy teorii plazmy (Questions of plasma theory), Atomizdat, Moscow, 2 (1963) 92.
7. Ya. B. Fainberg, Atom. Energiya 11 (1961) 313.
8. P.A. Sturrock, Proc. Roy. Soc. (London) 242 (1957) 277, 1230.
9. H. Alfvén, Cosmical Electrodynamics, Oxford (Clarendon Press) London. New York (1950).
10. I. Bernstein, J. Greene, M. Kruskal, Phys. Rev. 108 (1957) 546.
11. A.A. Vedenov, E.P. Velikhov, R.Z. Sagdeev, Nuclear Fusion 2 (1961) 82.
12. R.Z. Sagdeev, v sbor. Fizika plazmy i problema upravlyaemykh termoyadernykh reaktsii (collected papers, Plasma physics and the problem of controlled thermonuclear reactions), Akad. Nauk SSSR, Moscow, 4 (1958) 384.
13. J. Adlam, J. Allen, Phil. Mag. 3 (1958) 448.
14. I.Ya. Kharchenko, Ya. B. Fainberg et al, Zh. tekhn. Fiz. 31 (1961) 761.
15. V.N. Oraevsky, R.Z. Sagdeev, Zh. tekhn. Fiz. 32 (1962) 1291.
16. V.N. Oraevsky, Zh. prikl. Mekhan. i tekhn. Fiz. 5 (1962) 39.
17. A.A. Galeev, V.N. Oraevsky, Dokl. Akad. Nauk SSSR 147 (1962) 71.
18. V.N. Oraevsky, Dissertation (1963).
19. V.N. Oraevsky, Zh. tekhn. Fiz. 33 (1963) 251.
20. A.A. Galeev, V.I. Karpman, Zh. eksp. teor. Fiz 44 (1963) 592.
21. V.I. Karpman, R.Z. Sagdeev, Zh. tekhn. Fiz. 33 (1963) 805.
22. L.A. Ostrovsky, N.S. Stepanov, Zh. eksp. teor. Fiz. 45 (1963) 1475.
23. A.N. Kondratenko, Zh. tekhn. Fiz. 33 (1963) 1937.
24. V.N. Oraevsky, Atom. Energiya 16 (1964) 441.
25. A.A. Galeev, V.N. Oraevsky, Dokl. Akad. Nauk 154 (1964) 1069.
26. L.D. Landau, E.M. Lifshits, Elektrodinamika sploshnykh sred (Electrodynamics of Continua) Fismatizdat, Moscow (1957).

(Manuscript received 22 June 1964).

(cont'd)

Figure Captions

- Fig. 1. Sawtooth profile of the magnetic field lines.
- Fig. 2. Geometry of the perturbation by the aggregate of the Alfvén wave and the Magneto-acoustic wave.
- Fig. 3. The simplest possible shapes of a spectrum.

Table 1: "Decay" diagrams of steady-state plasma oscillations*

Type of oscillation	Longitudinal ion oscillations of non-isothermal plasma	Electron Langmuir oscillations	Magneto-acoustic oscillations	Alfvén waves
Plasma without magnetic field	Stable	Unstable when ...		
Plasma with magnetic field	Unstable when ...	Unstable when ...		

* with maximum rate of perturbation growth