

О неустойчивости электронных ленгмюровских колебаний плазмы при наличии магнитного поля

В. Н. Ораевский

В работе [1] показано, что электронные продольные колебания в плазме без магнитного поля неустойчивы лишь по отношению к «распаду» на ионную продольную и электронную ленгмюровскую (с меньшей частотой) волны. Однако такая неустойчивость ленгмюровской волны приводит фактически только к сдвигу ее частоты. Между возбуждаемыми колебаниями энергия распределяется так, что в ионные колебания «перекачивается» энергия, приблизительно в $\sqrt{M/m}$ раз меньшая, чем в электронные (M, m — масса иона и электрона). Ниже будет показано, что в плазме, находящейся в магнитном поле (при определенных соотношениях между параметрами плазмы), возникает добавочная неустойчивость установившихся электронных ленгмюровских волн — распад на электромагнитные волны. (Здесь заметная доля энергии ленгмюровских колебаний перекачивается в энергию другого вида колебаний.) Как и в работе [1], исследуем устойчивость волн не слишком большой амплитуды (малый параметр $\alpha \equiv \frac{\delta n}{n_0}$, где δn — амплитуда электронной плотности ленгмюровской волны; n_0 — статическая плотность электронов). Тогда все величины, характеризующие электронную ленгмюровскую волну, можно представить в виде

$$A_e = A_{e0} + 2\delta A_e \cos k_0 r' + O(\delta A_e^2), \quad (1)$$

где k_0 — волновой вектор волны; $r' = r - ut$ (здесь u — фазовая скорость). Слагаемыми $O(\delta A_e^2)$ в первом порядке теории возмущений по α можно пренебречь. Иными словами, будем рассматривать устойчивость основной гармоники электронной ленгмюровской волны. Линеаризованные относительно малых отклонений от установившегося движения уравнения имеют вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m} E - [v \omega_H] + 2\alpha \cos(k_0 r') (u \nabla) v - 2\alpha \sin(k_0 r') u (k_0 v) + 2\alpha \frac{e}{mc} [u \cos(k_0 r') H]; \quad (2)$$

$$\text{div } E = -4\pi en; \quad (3)$$

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\text{rot } H = -\frac{4\pi en_0}{c} \left[v + 2\alpha \left(v - \frac{n}{n_0} u \right) \cos(k_0 r') \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad (6)$$

где v, E, H, n — соответственно гидродинамическая скорость, электрическое и магнитное поля и электронная плотность, описывающие малые отклонения от установившегося движения.

В работе [1] показано, что неустойчивость может возникнуть лишь в случае возмущений, для которых пространственно-временная зависимость всех величин имеет вид

$$e^{i\omega' t} (a_1 e^{ik_1 r'} + a_2 e^{ik_2 r'}), \quad (7)$$

где k_1 и k_2 связаны соотношением

$$k_1 = k_0 + k_2. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\omega_1 = \omega_0 + \omega_2. \quad (9)$$

Используя определенные свойства симметрии уравнений, описывающих динамику малых отклонений от установившегося движения (см. [2]), можно показать, что необходимым и достаточным условием существования неустойчивости волны к распаду на две (если не возникают поляризационные запреты) является такое соотношение знаков частот в (9), что

$$|\omega_0| = |\omega_1| + |\omega_2|. \quad (10)$$

Для рассматриваемого нами случая это означает, что неустойчивость может возникнуть при

$$\omega_0 \approx 2\omega_H. \quad (11)$$

Кроме того, из (9) и (10) видно, что возбуждаемые волны должны иметь различную поляризацию. Используя теорию возмущений для вырожденных состояний, из (2) — (6), учитывая (8) — (10), можно найти инкремент нарастания возмущений (поправку к ω' , т. е. к частотам ω_1 и ω_2). Не приводя промежуточных выкладок (они аналогичны выкладкам, проделанным

в работе [1]), запишем выражение для инкремента нарастания возмущений v : (14)

$$v^2 = -\frac{\alpha^2}{\omega_1 \omega_2 a_1^2 a_2^2} \left\{ \frac{\omega_0^2 (\beta_1 k_{1z} + k_{1y})}{k_1^2} \left[(\beta_2 k_{1z} + k_{1y}) + \frac{(k_1 u) (\beta_2 k_{2z} + k_{2y})}{\omega_2} \right] + \left[(1 + \beta_1 \beta_2) \omega_1 + \frac{\omega_H^2}{\omega_2} \right] (k_2 u) + \right. \\ \left. + k_0 u \omega_1 \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_2 O \left(\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} \right) \right\} \left\{ \frac{\omega_0^2 (\beta_2 k_{2z} + k_{2y})}{k_2^2} \left[(\beta_1 k_{2z} + k_{2y}) + \frac{(k_2 u) (\beta_1 k_{1z} + k_{1y})}{\omega_1} \right] + \left[(1 + \beta_1 \beta_2) \omega_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega_H^2}{\omega_1} \right] (k_1 u) + k_0 u \omega_2 \beta_1 \beta_2 + \beta_1 \beta_2 O \left(\frac{\omega_0^2}{k^2 c^2} \right) \right\}, \quad (12)$$

где

$$a_{1,2}^2 = \beta_{1,2}^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2} (\beta_{1,2} k_{1,2z} + k_{1,2y})^2 + 1 + \frac{\omega_H^2}{\omega_{1,2}^2}; \\ \beta_{1,2} = \frac{\omega_0^2 k_{1,2y} k_{1,2z}}{\omega_{1,2}^2 k_{1,2}^2 - \omega_0^2 k_{1,2z}^2}.$$

Из (12) следует, что максимальный инкремент нарастания электромагнитных волн имеет порядок

$$v \approx \frac{\alpha}{10} \omega_H. \quad (13)$$

Отметим, что описанный выше распад электронной продольной волны на две электромагнитные, по-видимому, экспериментально наблюдался в работе [3]. Роль ленгмюровских колебаний играл первоначально модулированный электронный пучок. Неустойчивость по отношению к возбуждению поперечных волн воз-

никала при условии

$$p \omega_M \approx 2 \omega_H,$$

где ω_M — «частота» модулированного пучка; $p=1, 2, 3, \dots$. При $p=1$ условие (14) совпадает с условием распада основной гармоники [см. (11)]; при $p=2, 3$ уравнение (14) является условием распада кратных гармоник. В заключение автор приносит благодарность Р. З. Сагдееву, А. А. Галееву, а также Я. Б. Файнбергу и его сотрудникам за полезные дискуссии.

Поступило в Редакцию 28/VI 1963 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. «Ж. техн. физ.», XXXII (1962).
2. А. А. Галеев, В. И. Карпман. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, 592 (1963).
3. И. Ф. Харченко и др. «Ж. техн. физ.», XXXI 761 (1961). Я. Б. Файнберг. «Атомная энергия», 11, 313 (1961).

УДК 621.384.611

К расчету фазовых соотношений в циклотроне

Г. Н. Вялов

Фазовое движение в циклотроне изучалось, например, в работах [1, 2]. Как известно, уравнение фазового сдвига можно представить в виде

$$\sin \varphi_2 \sin \varphi_1 = \kappa \left[\int_{\xi_1}^{\xi_2} h(\xi) d\xi + \frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{2} - p(\xi_2 - \xi_1) \right]; \quad (1)$$

$$\kappa = \frac{\pi W_K^2}{2eV_0 m_0 c^2} \frac{A}{Z}; \quad (2)$$

где φ и $2V_0$ — фаза и амплитуда ускоряющего потенциала между дуантами соответственно; W_K — конечная энергия иона на один нуклон; e — элементарный заряд; c — скорость света; m_0 — масса покоя нуклона; A и Z — массовое и зарядовое числа иона соответственно. Спад магнитного поля $h(\xi)$ и превышение магнитного поля H_0 в центре над резонансным значением H_{p0} определяются соотношениями

$$H(\xi) = H_0 [1 - \varepsilon_K h(\xi)]; \quad (3)$$

$$H_{p0} = H_0 (1 - \varepsilon_K p), \quad (4)$$

где $\varepsilon_K = \frac{W_K}{m_0 c^2}$.

Полагая в (1) $\xi_1 = \xi_s$, $\xi_2 = \xi_0 = 0$ и решая (1) относительно $2eV_0$, получим

$$2eV_0 = \frac{\pi W_K^2}{m_0 c^2} \frac{A}{Z} D(\xi_s, \varphi), \quad (5)$$

где

$$D(\xi_s, \varphi) = \frac{\int_{\xi_s}^0 h(\xi) d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s}, \quad (6)$$

причем $p = h_s + \xi_s$; ξ_s — энергия иона в точке поворота фазы. Для определения ξ_s можно воспользоваться уравнением

$$B_1 = \frac{\sin \varphi_K - \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 - \sin \varphi_s} = \frac{\int_0^1 h(\xi) d\xi + \frac{1}{2} - p}{\int_{\xi_s}^0 h(\xi) d\xi - \frac{\xi_s^2}{2} + p\xi_s}. \quad (7)$$