

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

✓  
ВОПРОСЫ  
МАГНИТНОЙ  
ГИДРОДИНАМИКИ

IV  
том

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР  
РИГА 1964

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

чл.-корр. АН Латв. ССР доктор физ.-мат. наук *И. М. Кирко*,  
канд. техн. наук *Я. Я. Лиелпетер*,  
канд. техн. наук *М. В. Филиппов* (ответственный редактор),  
*Г. Я. Сермон.*

Сверено  
1964 г.

533  
B.748  
нч

612  $\frac{7}{15}$  66  
ГЕНТАРЬ СОАИ ССРС  
Гос. Публ. Науч. техн.  
библиотека

СВЕРЕНО  
*[Signature]*

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета  
Академии наук Латвийской ССР от 9 марта 1964 года

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник выпускается в качестве дополнения к 3-му выпуску сборника того же названия и содержит преимущественно не вошедшие в него доклады, прочитанные на третьем рижском совещании по теоретической и прикладной магнитной гидродинамике (2—7 июля 1962 г.). В него включены труды, относящиеся преимущественно к теоретическим исследованиям различных аспектов магнитной гидродинамики электропроводящей газообразной среды, и прежде всего к вопросам мгд-волн и их поведению в тех или иных конкретных условиях.

Поскольку настоящее издание представляет собой одновременно сборник трудов Института физики АН Латвийской ССР — устроителя названного совещания, в нем помещены работы его сотрудников, подготовленные для опубликования к началу 1964 года.

Доклады и статьи публикуются в основном в том виде, в каком они были представлены авторами. Это привело в отдельных случаях к отсутствию достаточно строгого единообразия терминологии, символики, единиц измерений, а также обозначений физических величин.

Редакционная коллегия

В. И. Карман

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭВОЛЮЦИОННОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Рассматриваются ударные волны в разреженной плазме в сильном магнитном поле ( $p \ll H^2/8\pi$ ), лежащем в плоскости фронта. При этих условиях можно пренебречь всеми диссипативными эффектами, кроме джоулева нагрева, связанного со столкновениями электронов с ионами.

Пусть  $\nu_{ie}$  — эффективная частота столкновений иона с электронами. В работе [1] было показано, что при очень малых  $\nu_{ie}$  структура фронта ударной волны носит осцилляторный характер («бесстолкновительные» ударные волны). В противоположном случае при

$$\nu_{ie} \gg \omega_{Hi} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} (M-1)^{-1/2} \quad (1)$$

( $M$  — число Маха) система уравнений для скорости  $u(x)$  и магнитного поля  $H(x)$  в ударной волне принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d(nu)}{dx} &= 0; \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{m_i n u^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0; \\ \frac{d(Hu)}{dx} &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} \cdot \frac{d^2 H}{dx^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где электропроводность  $\sigma$  связана с эффективной частотой столкновений соотношением

$$\sigma = \frac{ne^2}{m_i \nu_{ie}} \quad (3)$$

(Ось  $X$  направлена вдоль скорости течения газа в системе, где фронт волны покоится. Магнитное поле параллельно оси  $Y$ .)

Системе (2) удовлетворяет обычный мгд-профиль, ширина которого определяется «магнитной» вязкостью  $c^2/4\pi\sigma$ :

$$u(x) = u_0 - \frac{\Delta u}{2} \operatorname{th} \gamma x, \quad (4)$$

$$H(x) = H_0 + \frac{\Delta H}{2} \operatorname{th} \gamma x, \quad (5)$$

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2}{2}; \quad H_0 = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad (6)$$

$$\Delta u = u_1 - u_2; \quad \Delta H = H_2 - H_1. \quad (7)$$

Ширина фронта имеет вид:

$$\gamma^{-1} = \frac{c^2}{4\pi\sigma c_A (M-1)}, \quad (8)$$

где

$$c_A = \frac{H_1^2}{4\pi n_1 m_i}; \quad M = \frac{u_1}{c_A}. \quad (9)$$

$H_1, u_1$  и  $H_2, u_2$  — предельные значения магнитного поля и скорости в ударной волне при  $x \rightarrow -\infty$  и  $x \rightarrow +\infty$ , соответственно, которые связаны между собой следующими соотношениями (легко получающимися из выражений (2)):

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{u_2}{u_1}; \quad \frac{H_1}{n_1} = \frac{H_2}{n_2}, \quad (10)$$

$$j \equiv m_i n u(x) = \frac{H_1^2 - H_2^2}{8\pi(u_2 - u_1)}, \quad (11)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\sqrt{8M^2 + 1} + 1}{4M^2}. \quad (12)$$

Условия эволюционности обычной магнитной гидродинамики [2—4] приводят к соотношениям

$$u_1 > c_A = \frac{H_1^2}{4\pi n_1 m_i}; \quad u_2 < \frac{H_2^2}{4\pi n_2 m_i}, \quad (13)$$

причем

$$H_1 > H_2; \quad u_1 > u_2. \quad (14)$$

Эти соотношения получаются из условия равенства числа возмущений, распространяющихся от разрыва, и числа граничных

условий на разрыве. Это относится, разумеется, только к мгд-волнам, частота которых много меньше ионной ларморовской частоты и групповая скорость которых не превышает  $c_A$ .

Однако в достаточно разреженной плазме возможно распространение слабо затухающих возмущений с частотами, сравними с  $\omega_H$  — ионной ларморовской частотой. Их скорость может превышать  $c_A$ , и по отношению к ним условия эволюционности нарушаются.

Анализ этого случая должен производиться с помощью уравнений, учитывающих дисперсионные эффекты вблизи  $\omega_H$ . Эти уравнения имеют вид [5, 6]:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \nabla) V = \frac{1}{4\pi n m_i} [\operatorname{rot} H H]; \quad (15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} [VH] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta H - \frac{m_i c}{e} \operatorname{rot} \frac{dV}{dt}.$$

(В дальнейшем они называются «уравнениями магнитной гидродинамики с ионной дисперсией».)

Система (15) отличается от уравнений обычной магнитной гидродинамики последним членом во втором уравнении, который и определяет характерные дисперсионные эффекты. Уравнения (2), описывающие структуру фронта, легко получить и из уравнений (15), если заметить, что член  $\frac{m_i c}{e} \operatorname{rot} \frac{dV}{dt}$  исчезает в случае

одномерного течения, перпендикулярного магнитному полю. Дисперсионное уравнение для малых возмущений, следующее из уравнений (15), принимает вид [7]:

$$\omega_{1,2} = \frac{c_A}{2} \left( \sqrt{(k+k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2 k^2} \pm \sqrt{(k-k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2 k^2} \right). \quad (16)$$

При  $\omega \ll \omega_H$  отсюда следует:

$$\omega_1 = c_A k; \quad \omega_2 = c_A k_y. \quad (17)$$

Первая частота относится к быстрой гидромагнитной волне, вторая — к альфвеновской.

При  $k_y = 0$  дисперсионные члены выпадают и возмущение имеет скорость распространения быстрой гидромагнитной волны  $c_A$ . Однако уже при малых  $k_y$ , когда

$$\frac{c_A k_y}{\omega_H} \ll 1; \quad \frac{k_y}{k_x} \ll 1, \quad (18)$$

дисперсионное уравнение для «быстрой» волны принимает вид:

$$\omega \approx \varphi k; \quad \varphi = \beta c_A = \sqrt{1 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2}. \quad (19)$$

Проекция групповой скорости на направление потока

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \varphi \frac{k_x}{k} > c_A. \quad (20)$$

Таким образом, при достаточно малых  $k_y$  «косые» возмущения с частотой  $\sim \omega_H$  могут обгонять фронт ударной волны, т. е. имеет место неэволюционность, хотя структура фронта получается из уравнений (15) (ср. с работой [4]).

В связи с этим возникает вопрос об устойчивости профиля ударной волны.

Рассмотрим распространение малых возмущений с учетом ионной дисперсии на фоне течения (4)–(7). Подставляя в уравнения (15)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y, t) &= \mathbf{H}(x) + \mathbf{h}(x) \exp [i(k_y y + \omega t)]; \\ \mathbf{V}(x, y, t) &= \mathbf{u}(x) + \mathbf{v}(x) \exp [i(k_y y + \omega t)], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\mathbf{u}(x)$  и  $\mathbf{H}(x)$  определяются формулами (4), (5), получим следующие уравнения для малых возмущений:

$$\begin{aligned} i\omega v_x + (uv_x)' &= -\frac{1}{4\pi\rho} (Hh_y)' + \frac{ik_y}{4\pi\rho} h_x; \\ i\omega v_z + uv_z' &= ik_y \frac{H}{4\pi\rho} h_z; \\ i\omega h_y + (uh_y + v_x H)' &= \frac{m_i c}{4\pi\rho e} ik_y (h_z H)'; \\ i\omega h_z + (uh_z)' - ik_y H v_z &= \frac{m_i c}{e} ik_y [i\omega v_x + (uv_x)']. \end{aligned} \quad (22)$$

Ограничиваясь случаем (18) и предполагая  $M - 1 \ll 1$ , можно привести систему (22) к одному уравнению:

$$a(x)h'' + b(x)h' + c(x)h = 0; \quad h = h_y(x), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \varphi^2 - u^2; \\ b &= -2vu - 4u'u - 3\frac{\beta H}{4\pi\rho} H' - \frac{A'}{A} (\varphi^2 - u^2); \\ c &= -\left(3vu + u'u + \frac{u'}{u} \varphi^2\right)' + \frac{A'}{A} \left(vu + u'u + \frac{u'}{u} \varphi^2\right) + \\ &\quad + \frac{u'^2}{u^2} (\varphi^2 - u^2) - v^2; \\ \beta &= \sqrt{1 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2} k_y^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

причем  $\varphi$  определяется формулой (19), в которой вместо  $H_1$  стоит  $H(x)$ ;  $\varphi(x) = \beta \frac{H(x)}{\sqrt{4\pi\rho}}$  и, кроме того, введены следующие обозначения:

$$v = i\omega, \quad (25)$$

$$A = \beta(2u' \pm v)H(x). \quad (26)$$

Задача сводится к определению таких  $v$ , для которых существует ограниченное при  $x \rightarrow \pm \infty$  решение уравнения (23). При  $\text{Re } v > 0$  имеет место неустойчивость.

Асимптотическое решение при  $x \rightarrow \pm \infty$  имеет вид:

$$h(x) \sim \exp(\mu x)$$

$$\mu_{1,2} = \left[ -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \right]_{1,2} = \left[ \frac{v}{a} (u \mp \sqrt{u^2 + a}) \right]_{1,2}, \quad (27)$$

где индексы 1, 2 показывают значения величин при  $x = -\infty$ ,  $+\infty$ , соответственно, а знак перед корнем выбирается так, чтобы решение было ограниченным при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Легко видеть, что если  $\mu_1 < u_1$  ( $a < 0$ ), то выражение в круглых скобках (27) положительно при любом знаке перед корнем. Следовательно, решение может быть ограниченным по обе стороны от фронта только при чисто мнимых  $v$ . Но при таких  $v$  волна устойчива (заметим, что при  $a < 0$  выполняются условия эволюционности). При  $a > 0$  (условия эволюционности не выполняются) возможно

существование неустойчивых решений ( $\text{Re } \nu > 0$ ), если выполняются следующие условия на  $\pm \infty$ :

$$h_1 \sim \exp(\mu_1 x) (x \rightarrow -\infty); \quad h_2 \sim \exp(\mu_2 x) (x \rightarrow +\infty), \quad (28)$$

$$\mu_1 = \frac{\nu}{a_1} (u_1 + \sqrt{u_1^2 + a_1}); \quad \mu_2 = \frac{\nu}{a_2} (u_2 - \sqrt{u_2^2 + a_2}). \quad (29)$$

Величина  $\nu$  должна быть получена из условия «сшивки» асимптотик (28) с помощью решения уравнения (23).

Подстановка

$$h(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{b}{a} dx\right) \varphi(x) \quad (30)$$

приводит уравнение (23) к виду:

$$\varphi'' - p(x)\varphi = 0, \quad (31)$$

$$p(x) = \frac{b^2 - 4ac + 2(b'a - a'b)}{4a^2} \quad (31a)$$

с граничными условиями  $\varphi(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Если решений уравнения (31) с такими граничными условиями не существует, то фронт устойчив.

Рассматриваемая задача является обобщением задачи на собственные значения, но при этом параметр  $\nu$  («собственное значение») входит в  $p(x, \nu)$  не аддитивно, а весьма сложным образом, благодаря чему уравнение (31) может иметь ограниченные решения и при комплексных  $\nu$ . В связи с этим задача существенно усложняется и необходимы мощные численные методы. Можно, однако, на основе элементарных соображений локализовать область возможных значений инкремента.

Введем обозначения:

$$\mu = \Delta u \gamma; \quad \text{th} \gamma x = z; \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (32)$$

Тогда из выражения (4) следует:

$$u'_x = -\mu(1 - z^2); \quad u''_x = 2\mu\gamma z(1 - z^2);$$

$$u'''_x = 2\mu\gamma^2(1 - z^2)(1 - 3z^2).$$

Для слабых ударных волн

$$\frac{\mu}{\gamma u} = \left(\frac{\Delta u}{u}\right)^2 \ll 1. \quad (33)$$

Будем предполагать также, что

$$\frac{a}{u^2} \ll 1, \quad \frac{a}{u^2} \gg \frac{\mu}{\gamma u}. \quad (34)$$

Рассмотрим два случая:

1)  $\nu \gg \gamma u$ , т. е.  $\nu \gg \mu$ . В этом случае для  $p(x, \nu)$  получаем

$$\begin{aligned} p(x, \nu) &\approx \frac{\nu^2 u^2}{a^2} - \frac{2u''' a^2 + 3\nu u'' u a + 6\nu^2 u' u^2}{2\nu a^2} = \\ &= \frac{\nu^2 u^2}{a^2} - \frac{\mu}{\nu a^2} (1 - z^2) (\gamma^2 a^2 - 3\nu^2 u^2 + 3\nu \gamma u a z - 3\gamma^2 a^2 z^2). \end{aligned} \quad (35)$$

Легко убедиться, что в рассматриваемом случае ( $\nu \gg \mu$ ) первый член всегда значительно больше второго и  $p(x)$  нигде не обращается в нуль. Следовательно, в этом случае затухающих при  $x \rightarrow \pm \infty$  решений не существует;

2)  $\nu \ll \gamma u$ .

$$p(x, \nu) \approx \frac{\nu^2 u^2}{a^2} - \frac{\mu \gamma^2 (1 - z^2)}{2(\nu + 2u')^2} [\nu(1 - 3z^2) - 2\mu(1 - z^2)]. \quad (36)$$

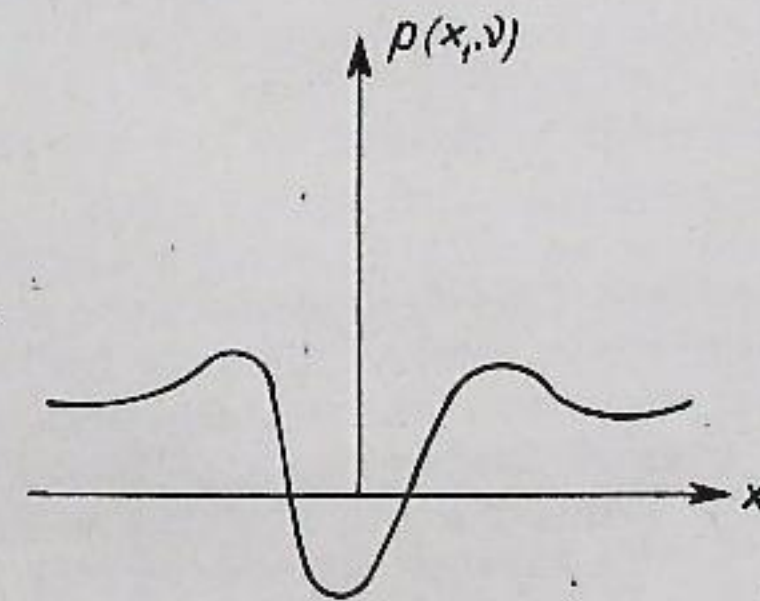


Рис. 1.

При  $\nu \sim \mu$  график  $p(x)$  имеет вид потенциальной ямы (рис. 1) и существование «связанного состояния» возможно. Таким образом, инкремент неустойчивости имеет порядок

$$\text{Re } \nu \sim \mu = \Delta u \gamma \ll \gamma u.$$

$(\gamma u)^{-1}$  есть время «прохождения» ширины фронта в лабораторной системе отсчета. Время развития неустойчивости значи-

тельно превышает  $(\gamma u)^{-1}$ , и в этом смысле неустойчивость нарастает медленно (этот результат справедлив, разумеется, для достаточно слабых ударных волн).

Автор выражает глубокую благодарность Р. З. Сагдееву, за то что он обратил его внимание на рассмотренный вопрос, а также за плодотворные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. — ЖТФ, 1961, 31, 10, 1185.
2. Половин Р. В. — УФН, 1960, 72, 1, 3.
3. Конторович В. М. — ЖЭТФ, 1958, 35, 5 (11), 1216.
4. Гельфанд И. М. — УМН, 1959, 14, 2 (86), 87.
5. Карпман В. И., Сагдеев Р. З. — ЖТФ, 1963, 33, 7, 805.
6. Брагинский С. И. — Вопросы теории плазмы, 1. Госатомиздат, М. 1963.
7. Шафранов В. Д. — Вопросы теории плазмы, 3. Госатомиздат М. 1963.

А. А. Бармин

#### РАСПАД ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА С ВЫДЕЛЕНИЕМ (ПОГЛОЩЕНИЕМ) ЭНЕРГИИ

Задача о распаде произвольного разрыва при наличии поверхностей с выделением энергии в обычной газовой динамике решена Бам-Зеликовичем [1]. Задача о распаде произвольного разрыва в магнитной гидродинамике решена Гогосовым для нерелятивистских скоростей [2] и Гогосовым и Шикиным — для релятивистских [3].

Демущкий и Половин [4, 5, 8] исследовали соотношения на поверхностях разрыва с выделением (поглощением) энергии, когда магнитное поле мало, а количество выделившейся энергии по сравнению с квадратом скорости звука либо мало, либо велико. Для общего случая это исследование проведено автором [6].

Разрывами с выделением (поглощением) энергии являются сверхальфвеновская и доальфвеновская детонации  $D^+$ ,  $D^-$  — разрывы, в которых зона экзотермической реакции следует за быстрой или медленной ударной волной, соответственно. Сверхальфвеновская или доальфвеновская ионизация ( $U^+$ ,  $U^-$ ) представляет собой разрывы с поглощением энергии, в которых зона реакции следует за быстрой или медленной ударной волной. Возможны также четыре фронта горения  $\Gamma^{++}$ ,  $\Gamma^{+-}$ ,  $\Gamma^{-+}$ ,  $\Gamma^{--}$ , которые будем соответственно называть быстрым и медленным сверхальфвеновским и быстрым и медленным доальфвеновским горением. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда возникает только детонация или ионизация.

Ниже решается задача о распаде произвольного разрыва в совершенном газе с бесконечной электропроводностью при произвольном по величине и направлению магнитном поле и наличии поверхностей разрыва, на которых происходит выделение (поглощение) энергии.

Остановимся на постановке задачи.