АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

ВОПРОСЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

IV

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
РИГА 1964

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии наук Латвийской ССР от 9 марта 1964 года

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник выпускается в качестве дополнения к 3-му выпуску сборника того же названия и содержит преимущественно не вошедшие в него доклады, прочитанные на третьем рижском совещании по теоретической и прикладной магнитной гидродинамике (2—7 июля 1962 г.). В него включены труды, относящиеся преимущественно к теоретическим исследованиям различных аспектов магнитной гидродинамики электропроводящей газообразной среды, и прежде всего к вопросам мгд-волн и их поведению в тех или иных конкретных условиях.

Поскольку настоящее издание представляет собой одновременно сборник трудов Института физики АН Латвийской ССР — устроителя названного совещания, в нем помещены работы его сотрудников, подготовленные для опубликования к началу 1964 года.

Доклады и статьи публикуются в основном в том виде, в каком они были представлены авторами. Это привело в отдельных случаях к отсутствию достаточно строгого единообразия терминологии, символики, единиц измерений, а также обозначений физических величин.

Редакционная коллегия

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, М. 1957.
2. Bremmer H. — Propagation of electromagnetic waves. — In: Handbuch der Physik, 1958, 16, 423.
3. Oster L. — Rev. Mod. Phys., 1960, 32, 1, 141.
4. Уиттекер Е. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, 2. Физматгиз, М. 1963.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, М. 1961.

Вопросы магнитной гидродинамики, IV. Рига 1964

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев

О НЕКОТОРЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ С АНИЗОТРОПНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамики разреженной плазмы наиболее общим подходом является, как известно, использование кинетического уравнения с самосогласованными электромагнитными полями. Однако на этом пути встречаются затруднения, и потому довольно широкое применение получили различные упрощенные гидродинамические описания, приводящие во многих случаях к удовлетворительным результатам [1].

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых гидродинамических моделей для релятивистской плазмы. Исследование свойств релятивистской плазмы представляет не только теоретический интерес, как это может показаться на первый взгляд. Здесь следует прежде всего обратить внимание на исследование систем с релятивистскими электронами, например ловушек типа «Астрон» [2]. Существенно то, что устойчивость ловушек с релятивистскими электронами, вообще говоря, повышается по сравнению с обычными ловушками [2, 3]. Релятивистские эффекты необходимо учитывать в ряде астрофизических явлений, так как возможно преимущественное ускорение тяжелых элементов до релятивистских энергий за счет турбулентной энергии газомагнитной среды [5]. Теория разреженной релятивистской плазмы в ближайшие годы, очевидно, найдет более широкое применение в ускорительной технике. В этой связи интересно отметить, например, что толщина некоторых типов ударных волн в релятивистском случае падает по сравнению с нерелятивистским. Такие особенности релятивистской плазмы, как рост излучения (в частности, магнитотормозного), зависимость массы частиц от скорости, возможное нарушение квазинейтральности (существенное при нагреве частиц), учет конечности не только ионного, но и электронного ларморовского радиуса, позволяют ожидать определенных изменений в поведении плазмы. К этому следует добавить, что в релятивистской плазме сильно возрастают характерные времена процессов за счет соударений и повышается роль коллективных процессов. Из сказанного вытекает целесообразность исследования гидродинамических моделей разреженной релятивистской плазмы.

1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Релятивистское кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \qquad (1.1)$$

Уравнения гидродинамики можно получить методом, аналогичным описанному в работе [1]. Определяя моменты f как

$$nU_i = i\int \frac{d^3p}{u_4} u_i f_0;$$

$$T_{ik} = ic\int \frac{d^3p}{u_4} p_i u_k f_0; \qquad (1.2)$$

$$T_{ikl} = ic\int \frac{d^3p}{u_4} p_i u_k u_l f_0$$

и учитывая, что

$$f_0 = f_0\,(u_i U_i;\ (\varepsilon_{iklm} u_i U_k F_{lm})^2)^*, \qquad (1.3)$$

нетрудно получить

$$T_{ikl} = (3T_\perp + T_\varepsilon)\,U_i U_k U_l + T_\perp[(\delta_{ik} + R_i R_k)\,U_l + $$
$$+ (\delta_{il} + R_i R_l)\,U_k + (\delta_{kl} + R_k R_l)\,U_i] -$$
$$- T_\parallel\,(R_i R_k U_l + R_k R_l U_i + R_i R_l U_k). \qquad (1.4)$$

Здесь $T_\perp$, $T_\parallel$ и $-T_\varepsilon$ есть значения в собственной системе отсчета, соответственно, компонент $T_{114} = T_{224}$, T_{334} и T_{444}.

Вид функции (1.3) предполагает пренебрежение тепловыми потоками вдоль магнитного поля.

* Обозначения те же, что и в работе [6].

Записывая уравнение (1.1) в виде:

$$ic\frac{u_i}{u_4}\frac{\partial f_0}{\partial x_i} = -\frac{e}{c}[(\mathbf{v} - \mathbf{V})\,\mathbf{H}]\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}}, \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{V}$ — скорость системы отсчета с $E = 0$, образуя моменты (1.2) в левой части (1.5) и исключая члены с f_1, с помощью уравнений Максвелла приходим к следующей системе одножидкостных гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial nU_i}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi}F_{ik}\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_l}, \qquad (1.6)$$

$$\frac{\partial\,(T_{11l} + T_{22l})}{\partial x_l} = 0; \quad \frac{\partial T_{33l}}{\partial x_l} = 0. \qquad (1.7)$$

Уравнения (1.7) играют роль уравнений состояния.

Рассмотрим волны малой амплитуды. Считая равновесные значения величины a не зависящими от x_i, а возмущения $\delta a \sim \exp i\,(\mathbf{kr} - \omega t)$, можно получить (опуская громоздкие вычисления) для волн, распространяющихся вдоль $\mathbf{H}$:

$$\omega_1^2 = \frac{k^2}{mn_\perp}(H^2/4\pi + P_\perp - P_\parallel), \qquad (1.8)$$

$$\omega_2^2 = k^2 S_\parallel^2; \qquad (1.9)$$

для волн, распространяющихся поперек $\mathbf{H}$:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{mn_\perp}\left(mn_\perp S_\perp^2 + \frac{H^2}{4\pi}\right). \qquad (1.10)$$

Здесь

$$mn_\perp = (P_\perp + P_\varepsilon)/c^2, \qquad (1.11)$$

$$S_\perp^2 = c^2\left(\frac{\partial P_\perp}{\partial P_\varepsilon}\right)_0; \quad S_\parallel^2 = c^2\left(\frac{\partial P_\parallel}{\partial P_\varepsilon}\right)_0, \qquad (1.12)$$

$P_\perp$ и P_ε — соответственно, перпендикулярное давление и энергия; нулевой индекс означает, что производная берется по адиабатическому процессу. Из выражения (1.8) следует, что для $\mathbf{k}\,||\,\mathbf{H}$ условие неустойчивости то же, что и в нерелятивистском случае, однако инкремент в γ раз меньше за счет $n_\perp$.

Для волн с $\mathbf{k}$, почти перпендикулярным $\mathbf{H}$, условие неустойчивости имеет вид:

$$P_\perp > P_\parallel + \frac{S_\parallel^2}{S_\perp^2}\cdot\frac{H^2}{4\pi}. \qquad (1.13)$$

В ультрарелятивистском случае, учитывая, что $P_\parallel,\ P_\perp \to \frac{1}{3}P_\varepsilon$, можно получить соотношения

$$T_\parallel^{4/9} P_\parallel^{-1} = \mathrm{const}; \qquad T_\perp^{2/3} P_\perp^{-1} = \mathrm{const}, \qquad (1.14)$$

которые в рассматриваемых переменных играют роль уравнений состояния.

2. ПРОЦЕССЫ ВЯЗКОСТИ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ ГАЗЕ

Получим тензор и коэффициенты вязкости релятивистского газа заряженных частиц. Запишем выражение (1.1) в виде [7]:

$$u_l \frac{\partial F}{\partial x_l} + \frac{e}{mc} u_m F_{lm} \frac{\partial F}{\partial u_l} = St\{F\}, \qquad (2.1)$$

где F — инвариантная функция распределения в пространстве четырехмерных импульсов, F_{ik} — тензор электромагнитного поля, $St\{F\}$ — столкновительный член.

Функция F с учетом диссипативных процессов получена в работе [8]. Умножая выражение (2.1) на $p_i u_k$ и интегрируя, находим

$$\frac{\partial T_{ikl}}{\partial x_l} + \frac{e}{mc}(F_{il}T_{kl} + T_{kl}F_{il}) = -\frac{1}{\tau}\pi_{ik}, \qquad (2.2)$$

где τ — характерное время столкновений, а π_{ik} — тензор вязкости, удовлетворяющий соотношениям

$$\pi_{ii} = 0; \quad \pi_{ik}U_k = 0. \qquad (2.3)$$

Для максвелловской функции распределения

$$T_{ikl} = (3T + T_\varepsilon)\, U_i U_k U_l + T(\delta_{ik}U_l + \delta_{il}U_k + \delta_{kl}U_i). \qquad (2.4)$$

Считая, что в собственной системе $E = 0$, подставляем выражение (2.4) в формулу (2.2) и проектируем полученное уравнение на U_l и $U_i U_k$. Находим

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -U_i U_l \frac{\partial (T + T_\varepsilon)}{\partial x_l} - (2T + T_\varepsilon)\frac{\partial U_i U_l}{\partial x_l}, \qquad (2.5)$$

$$2T\frac{\partial U_l}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_l}(T_\varepsilon U_l) = 0. \qquad (2.6)$$

Уравнение непрерывности дает

$$\frac{\partial T_{ill}}{\partial x_l} = \frac{\partial (3T - T_\varepsilon)\, U_l}{\partial x_l} = 0. \qquad (2.7)$$

Из системы уравнений (2.2) — (2.7) находим

$$TW_{ik} + \frac{e}{mc}(F_{il}\pi_{kl} + F_{kl}\pi_{il}) = -\frac{1}{\tau}\pi_{ik}, \qquad (2.8)$$

где W_{ik} — тензор напряжений:

$$W_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + U_l \frac{\partial U_i U_k}{\partial x_l} - \frac{2}{3}\frac{\partial U_l}{\partial x_l}(\delta_{ik} + U_i U_k), \qquad (2.9)$$

что совпадает с выражением, полученным в работе [9].

Из алгебраической системы (2.8) можно получить компоненты π_{ik} в произвольной системе отсчета и соответствующие коэффициенты вязкости η. В частности, в собственной системе

$$\eta_0 = \tau T \qquad (\tau\Omega \ll 1); \qquad (2.10)$$

$$\eta_H = \frac{1}{2}T/\Omega \qquad (\tau\Omega \gg 1); \qquad \Omega \equiv \frac{eH}{mc}. \qquad (2.11)$$

Компоненты π_{ik} в этом случае выражаются через компоненты W_{ik} так же, как и в нерелятивистском случае [10] с учетом выражений (2.10), (2.11).

3. УЧЕТ КОНЕЧНОСТИ ЛАРМОРОВСКОГО РАДИУСА

В работе [11] было показано, что учет конечности ларморовского радиуса ионов r_{Hi} приводит к стабилизации неоднородной разреженной ($\tau\Omega \gg 1$) плазмы относительно желобковых неустойчивостей. Учет конечности r_H может быть проведен в рамках гидродинамической модели путем введения тензора специфической магнитной «вязкости» [10].

Покажем, что магнитная «вязкость» стабилизирует однородную плазму с анизотропным давлением. Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Используя систему уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla(n\mathbf{V})=0; \qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=[\nabla[\nabla\mathbf{H}]];$$

$$mn\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}=-\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\frac{1}{4\pi}[[\nabla\mathbf{H}]\,\mathbf{H}]_\alpha;$$

$$P_{\alpha\beta}=P_\perp\delta_{\alpha\beta}+(P_\parallel-P_\perp)\,h_\alpha h_\beta;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P_\parallel H^2}{n^3}\right)=0; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P_\perp}{nH}\right)=0; \qquad \mathbf{h}=\frac{\mathbf{H}}{H} \tag{3.1}$$

и учитывая, что в этом случае (греческие индексы пробегают три значения, латинские — четыре)

$$W_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)+$$

$$+\frac{P_\parallel-P_\perp}{P_\perp}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\gamma}h_\beta h_\gamma+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\gamma}h_\alpha h_\gamma-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\delta}h_\gamma h_\delta\right);$$

$$\eta=\eta_\perp=\frac{1}{\Omega}P_\perp, \tag{3.2}$$

получаем при $\mathbf{k}\,||\,\mathbf{H}$

$$\omega=\pm\left(\frac{2}{nm}k_\parallel^2\eta_\parallel+\frac{1}{nm}\sqrt{4k_\parallel^4\eta_\parallel^2-mnk_\parallel^2\left(P_\parallel-P_\perp-\frac{H^2}{4\pi}\right)}\right)$$

$$\left(\eta_\parallel=\frac{1}{\Omega}P_\parallel\right). \tag{3.3}$$

Критерии устойчивости имеют вид:

$$k^2>\frac{1}{4}\left(\frac{P_\parallel-P_\perp}{P_\parallel}-\frac{H^2}{4\pi P_\parallel}\right)\frac{nm\Omega^2}{P_\parallel} \qquad (\mathbf{k}\parallel\mathbf{H});$$

$$k^2\gtrless\frac{1}{4}\left(\frac{P_\perp-P_\parallel}{P_\parallel}-\frac{H^2}{4\pi P_\perp}\right)\frac{nm\Omega^2}{P_\parallel}; \qquad (k_\perp\sim k;\ k_z\sim 0). \tag{3.4}$$

Максимальный инкремент ν в случае $\mathbf{k}\,||\,\mathbf{H}$ равен:

$$\nu=\frac{1}{2}\frac{\Omega}{P_\parallel}(P_\parallel-P_\perp-H^2/4\pi). \tag{3.5}$$

В случае, когда электроны релятивистские, а ионы — нерелятивистские, r_{H_e} может стать порядка r_{H_i} и эффект стабилизации пропадет. Однако при $r_{H_e}\gg r_{H_i}$ плазма снова начинает стабилизироваться, но уже за счет конечности r_{H_e}.

Для получения количественных результатов предположим, что возмущения плазмы нерелятивистские. Тогда дисперсионные уравнения не меняются, а изменяются только параметры, характеризующие внутреннее состояние двухкомпонентной плазмы. Для плотности и коэффициента вязкости

$$\rho=\frac{n}{c^2}(Mc^2+P_{\varepsilon_e}+P_e); \tag{3.6}$$

$$\eta=\frac{c}{2eH}(P_i-T_e), \tag{3.7}$$

где M — масса иона.

В случае желобковых возмущений [7] условие устойчивости имеет вид:

$$k^2>\frac{g}{\eta'^2}\rho\rho', \tag{3.8}$$

где g — гравитационный потенциал, а штрих означает производную по координате.

В случае анизотропной плазмы в формулах (3.3) следует заменить nm и $\eta_\parallel$ соответственно на формулу (3.7) и

$$\eta_\parallel=\frac{c}{2eH}(P_{\parallel i}-T_e).$$

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Известно, что в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям существует неустойчивость апериодического типа [3]. Линейную теорию устойчивости можно рассмотреть уже в рамках четырехпотоковой гидродинамической модели.

Рассмотрим четыре группы ионов, каждая из которых имеет среднюю скорость вдоль одного из направлений осей X или Z и различные энергии теплового движения вдоль осей. Так, для групп ионов со средней скоростью вдоль положительного (отриную плазму с анизотропным давлением. Рассмотрим сначала нерелятивистский случай. Используя систему уравнений

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla(n\mathbf{V})=0;\qquad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=[\nabla[\nabla\mathbf{H}]];$$

$$mn\frac{\partial V_\alpha}{\partial t}=-\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-\frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\frac{1}{4\pi}[[\nabla\mathbf{H}]\,\mathbf{H}]_\alpha;$$

$$P_{\alpha\beta}=P_\perp\delta_{\alpha\beta}+(P_\parallel-P_\perp)\,h_\alpha h_\beta;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P_\parallel H^2}{n^3}\right)=0;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{P_\perp}{nH}\right)=0;\qquad \mathbf{h}=\frac{\mathbf{H}}{H}\tag{3.1}$$

и учитывая, что в этом случае (греческие индексы пробегают три значения, латинские — четыре)

$$W_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)+$$

$$+\frac{P_\parallel-P_\perp}{P_\perp}\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\gamma}h_\beta h_\gamma+\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\gamma}h_\alpha h_\gamma-\frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\delta}h_\gamma h_\delta\right);$$

$$\eta=\eta_\perp=\frac{1}{\Omega}P_\perp,\tag{3.2}$$

получаем при $\mathbf{k}\,||\,\mathbf{H}$

$$\omega=\pm\left(\frac{2}{nm}k_\parallel^2\eta_\parallel+\frac{1}{nm}\sqrt{4k_\parallel^4\eta_\parallel^2-mnk_\parallel^2\left(P_\parallel-P_\perp-\frac{H^2}{4\pi}\right)}\right)$$

$$\left(\eta_\parallel=\frac{1}{\Omega}P_\parallel\right).\tag{3.3}$$

Критерии устойчивости имеют вид:

$$\begin{aligned}&k^2>\frac{1}{4}\left(\frac{P_\parallel-P_\perp}{P_\parallel}-\frac{H^2}{4\pi P_\parallel}\right)\frac{nm\Omega^2}{P_\parallel}\qquad(\mathbf{k}\parallel\mathbf{H});\\&k^2\underset{\infty}{>}\frac{1}{4}\left(\frac{P_\perp-P_\parallel}{P_\parallel}-\frac{H^2}{4\pi P_\perp}\right)\frac{nm\Omega^2}{P_\parallel};\qquad(k_\perp\sim k;\ k_z\sim 0).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Максимальный инкремент ν в случае $\mathbf{k}\,||\,\mathbf{H}$ равен:

$$\nu=\frac{1}{2}\frac{\Omega}{P_\parallel}(P_\parallel-P_\perp-H^2/4\pi).\tag{3.5}$$

В случае, когда электроны релятивистские, а ионы — нерелятивистские, r_{H_e} может стать порядка r_{H_i} и эффект стабилизации пропадет. Однако при $r_{H_e}\gg r_{H_i}$ плазма снова начинает стабилизироваться, но уже за счет конечности r_{H_e}.

Для получения количественных результатов предположим, что возмущения плазмы нерелятивистские. Тогда дисперсионные уравнения не меняются, а изменяются только параметры, характеризующие внутреннее состояние двухкомпонентной плазмы. Для плотности и коэффициента вязкости

$$\rho=\frac{n}{c^2}(Mc^2+P_{\varepsilon_e}+P_e);\tag{3.6}$$

$$\eta=\frac{c}{2eH}(P_i-T_e),\tag{3.7}$$

где M — масса иона.

В случае желобковых возмущений [7] условие устойчивости имеет вид:

$$k^2>\frac{g}{\eta'^2}\rho\rho',\tag{3.8}$$

где g — гравитационный потенциал, а штрих означает производную по координате.

В случае анизотропной плазмы в формулах (3.3) следует заменить nm и $\eta_\parallel$ соответственно на формулу (3.7) и

$$\eta_\parallel=\frac{c}{2eH}(P_{\parallel i}-T_e).$$

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ В ОТСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Известно, что в плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям существует неустойчивость апериодического типа [3]. Линейную теорию устойчивости можно рассмотреть уже в рамках четырехпотоковой гидродинамической модели.

Рассмотрим четыре группы ионов, каждая из которых имеет среднюю скорость вдоль одного из направлений осей X или Z и различные энергии теплового движения вдоль осей. Так, для групп ионов со средней скоростью вдоль положительного (отрицательного) направлений оси X с плотностью n_+ (n_-) линеаризованные уравнения в нерелятивистском случае имеют вид:

$$-\Theta_z \frac{\partial \delta n_\pm}{\partial z} \pm \frac{enH}{c} \sqrt{\Theta_{ix}/M} = 0; \quad \underset{(k_x, k_y = 0)}{n = n_+ = n_-}, \tag{4.1}$$

где Θ_z — температура вдоль оси Z, H — поле волны.

Из системы (4.1) и из уравнений для частиц, движущихся вдоль оси Z, имеем

$$\delta n_+ = -\delta n_- = -i \frac{enH}{ck_z \Theta_z} \sqrt{\Theta_{ix}/M}, \tag{4.2}$$

$$\delta V_{+x} = \delta V_{-x} = i \frac{eH}{ck_z M}, \tag{4.3}$$

где $\delta V_{\pm x}$ — поправки к скоростям для групп частиц, движущихся вдоль оси Z.

Воспользовавшись законом Ома для тока электронов с «проводимостью» $e^2 n/(mk\sqrt{\Theta_e/m})$, получим из уравнений Максвелла дисперсионное уравнение, которое совпадает с найденным из кинетической теории [3].

Перейдем теперь к нелинейному режиму и рассмотрим сильно релятивистский случай ($\sigma \to 0$). Неустойчивость возникает при $k > k_0$, где k_0 равно [5]:

$$k_0^2 = \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{c^2} \sigma \frac{\Delta P}{P}. \tag{4.4}$$

Здесь ω_0 плазменная частота ионов, $\Delta P = P_{xx} - P_{zz}$, P_{xx}, $P_{zz} \sim P$ — давления соответственно вдоль осей X и Z.

Если F_0 — функция распределения, обращающая в нуль столкновительный член, а F_1 — возмущение, то можно написать:

$$u_i \frac{\partial F_0}{\partial x_i} = -\frac{1}{c\tau} F_1, \tag{4.5}$$

где τ — характерное время столкновений частиц на турбулентных полях в собственной системе отсчета.

Рассмотрим выражение

$$mc^2 \int d^4p\, (u_x^2 - u_z^2) F = mc^2 \int d^4p\, (u_x^2 - u_z^2) F_1 =$$

$$= -\tau mc^3 \int d^4p\, (u_x^2 - u_z^2) u_i \frac{\partial F_0}{\partial x_i} = -\tau c \frac{\partial (T_{11i} - T_{33i})}{\partial x_i}, \tag{4.6}$$

где учтено, что F_0 — сферически симметричная функция. Учитывая, что

$$T_{\bar\alpha\bar\alpha i} = (3T + T_\varepsilon) U_{\bar\alpha}^2 U_i + T(2\delta_{i\bar\alpha} U_{\bar\alpha} + U_i), \tag{4.7}$$

где по индексам с черточкой суммирование не производится, найдем в собственной системе отсчета

$$\left.\frac{\partial (T_{11i} - T_{33i})}{\partial x_i}\right|_c = 2T \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)_c. \tag{4.8}$$

Индекс «c» указывает, что выражение берется в собственной системе отсчета.

Рассмотрим для простоты одномерный случай, когда скорость направлена вдоль оси X и зависит только от x. Тогда

$$\left.\frac{\partial (T_{11i} - T_{33i})}{\partial x_i}\right|_c = 2T \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \tag{4.9}$$

и, учитывая выражение (4.6), получаем

$$\Delta P = 2c\tau T \left|\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right|. \tag{4.10}$$

Для τ в работе [4] получено выражение

$$\tau \sim \frac{1}{ck_0} \frac{1}{\sqrt{|\ln \sigma|}} \cdot \frac{P_i^2}{P_e^2}. \tag{4.11}$$

Используя формулы (4.4), (4.10) и (4.11), находим окончательно

$$\tau \sim \left(\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{P_i^2}{P_e^2} \sqrt{\frac{2P}{cT\sigma |\ln \sigma|}}\right)^{2/3} \left|\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right|^{-1/3}. \tag{4.12}$$

Коэффициент вязкости отыскивается по формуле (2.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. — Проблемы современной физики, 1957, 7, 139.
2. Кристофилос Н. — Труды II Международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Докл. иностр. ученых. Атомиздат, М. 1959, 597.
3. Заславский Г. М., Моисеев С. С. — ЖЭТФ, 1962, 42, 4, 1054.
4. Заславский Г. М. — ДАН СССР, 1962, 148, 4, 803.

5. Корчак А. А., Сыроватский С. И. — ДАН СССР, 1958, 122, 5, 792.
6. Заславский Г. М., Моисеев С. С. — ПМТФ, 1962, 1, 21.
7. Беляев С. Т., Будкер Г. И. — ДАН СССР, 1956, 107, 6, 807.
8. Моисеев С. С. — ЖЭТФ, 1959, 37, 2 (8), 553.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е. Гостехтеоретиздат, М. 1954.
10. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, М. 1960.
11. Розенблют М. Н., Ростокер Н., Кралл Н. А. Доклад на Международной конференции по исследованиям в области физики плазмы и управляемого ядерного синтеза. Зальцбург, 1961 г.

В. В. Гогосов

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ЗАТУХАНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

В настоящей работе рассматривается затухание слабых мгд-волн в плазме с учетом разности температур, скоростей и термодинамических свойств компонент — вязкости, градиентов температур и с учетом рождения частиц ионизации, диссоциации, процессов перезарядки и т. д., в предположении, что затухание не очень сильное (мало́ на длине волны).

Затухание слабых волн в трехкомпонентной плазме исследовалось в работе [1]. Плазма предполагалась достаточно холодной — газовое давление не учитывалось. Система уравнений, описывающих плазму, оказывалась замкнутой без уравнений энергии. В предположении, что сила трения между компонентами пропорциональна разности скоростей компонент, выписывалось дисперсионное уравнение, которое исследовалось при соответствующих предположениях.

Рассмотрим теплоизолированную систему, не находящуюся в равновесии. В процессе установления равновесия система совершает работу над внешней средой. При этом энергия E и энтропия S системы меняются.

Энергия единицы объема идеально проводящей среды равна [2]:

$$\rho\varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi}.$$

Полное изменение энергии жидкости, связанное с наличием мгд- (альфвеновской или магнито-звуковой) волны равно:

$$\int \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho} + \frac{H'^2}{8\pi} \right) dV.$$

Здесь и далее интегрирование ведется по всему объему V, занимаемому плазмой. Штрихом, как обычно, обозначаем малые