

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Р. З. Сагдеев

§ 1. Коллективные процессы в плазме

Известно, что релаксационные процессы в разреженной плазме в состоянии, далеком от термодинамического равновесия, сопровождаются, как правило, возбуждением коллективных плазменных колебаний (например, из-за неустойчивости). Возникновение таких колебаний существенно влияет на явления переноса в плазме, что наиболее интересно с практической точки зрения. Важнейшим примером является так называемая «аномальная диффузия» горячей плазмы в магнитных ловушках [1]. Различные стороны этой сложной проблемы, связанные с теорией устойчивости относительно малых возмущений, сейчас изучены достаточно полно, и по существу уже заложены основы нелинейного подхода. Другой интересный пример коллективных процессов — ударные волны в плазме. В обычной газодинамике толщина фронта ударной волны ограничена снизу величиной порядка длины свободного пробега молекул в газе, в плазме же благодаря «коллективным» свойствам возможно существование специфических ударных волн с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега. Это означает, что даже сильно разреженная плазма по своим свойствам походит не на «кнудсеновский» газ, а на газодинамическую среду.

Цель данной статьи — наглядно изложить основные идеи и результаты теории коллективных процессов в разреженной плазме. Основное внимание уделяется качественной стороне данного вопроса — уяснению физического смысла при рассмотрении различных приближенных моделей.

1. Взаимодействие между частицами в плазме за счет дальнего действующего характера электрических сил осуществляется не только при столкновениях, но также и в результате действия так называемого согласованного поля. Для плазмы, которую можно рассматривать как почти идеальный газ (условием применимости «газового приближения» является $na^3 \gg 1$, где n — плотность

числа частиц; a — дебаевский радиус), справедлива кинетическая теория, в которой функция распределения для ионов (электронов) $f_{i,e}(v, r, t)$ удовлетворяет уравнению Больцмана—Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = St(f), \quad (1)$$

где $[H, f]$ — скобки Пуассона; $St(f)$ — столкновительный член. Самосогласованное поле в уравнении (1) учитывается включением членов, содержащих электрическое и магнитное поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Плотность заряда и плотность тока берут в виде $\rho = \sum e_k \int f_k dv$ и $j = \sum e_k \int v f dv$, где суммирование производится по всем сортам заряженных частиц, присутствующих в плазме. Столкновения учитываются в уравнении (1) интегралом столкновений $St(f)$, конкретный вид которого определяется составом плазмы. В динамике плазмы «близкие» столкновения и самосогласованное поле, казалось бы, должны играть принципиально различные роли. Так, столкновения должны определять релаксационные процессы (установление локального максвелловского распределения, обмен энергией и импульсом между ионами и электронами и т. п.), каждый из которых можно характеризовать некоторым временем τ («время столкновения»). Самосогласованное поле, напротив, должно было бы определять «дисперсионные» характеристики плазмы, особенности собственных колебаний, волновые свойства плазмы. В простейшем случае, например, когда отсутствует магнитное поле, основным дисперсионным параметром плазмы является ленгмюровская электронная частота ω_0 ($\omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$, e — заряд электрона, m — масса, n — плотность). В большинстве интересующих нас случаев частоту колебаний плазмы будем считать достаточно большой, так что $\omega\tau \gg 1$, т. е. в такой плазме имеются два различных масштаба времени τ и $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (период колебаний, причем $T \ll \tau$). Поэтому, рассматривая колебательные процессы, можно не учитывать близких столкновений, считая их редкими, т. е. можно исключить интеграл столкновений из уравнения (1). Такой подход, получивший название «бесстолкновительной теории плазмы», позволит упростить рассмотрение целого круга задач динамики плазмы. Эта теория рассматривает процессы, протекающие в плазме за время, которое значительно меньше времени свободного пробега τ . Исходным уравнением является кинетическое уравнение Власова с самосогласованными полями без интеграла столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0. \quad (2)$$

Так как в отсутствие интеграла столкновений, как следует из Н-теоремы, энтропия сохраняется, бесстолкновительная теория

плазмы, казалось бы, относится к изэнтропическим процессам и не должна описывать необратимых процессов релаксации плазмы, процессов установления теплового равновесия («максвеллизации») и т. п. Тем не менее экспериментально доказано, что релаксационные процессы протекают за время, значительно меньшее τ , т. е. в условиях, когда применима бесстолкновительная теория. Такие аномальные диссипативные свойства разреженной плазмы напоминают положение в обычной гидродинамической теории турбулентности. Характерное время необратимого процесса диффузии скорости порядка

$$\tau_v \sim \frac{R^2}{\nu}, \quad (3)$$

где R — характерный размер; ν — кинематическая вязкость. На самом же деле реальное время релаксации оказывается значительно меньшим: развитие неустойчивостей приводит к турбулентности — дроблению масштабов, а следовательно, к уменьшению времени размешивания. Здесь существенную роль играют два фактора. Во-первых, наличие очень большого числа макроскопических степеней свободы — так называемых «масштабов пульсаций» в теории турбулентности, — взаимодействующих между собой из-за нелинейных эффектов, само по себе приводит к необратимости процессов во времени при переходе от динамического к статистическому описанию системы, т. е. при переходе от уравнения Навье—Стокса к уравнениям, характеризующим усредненные движения¹ жидкости.

Во-вторых, по мере перехода энергии к движениям все более и более мелких масштабов усиливается роль вязких эффектов из-за увеличения пространственных градиентов; тогда величину R в уравнении (3) нужно заменить на характерный масштаб² пульсаций l . При $l \ll R$ время диффузии скорости резко уменьшается.

Раскрывая смысл аналогии между гидродинамической турбулентностью и аномальными диссипативными процессами в разреженной плазме, можно выделить две важнейшие группы подобных явлений.

1) Бесстолкновительная теория описывает различные плазменные колебания и волны. Часто состояния плазмы оказываются неустойчивыми, так что амплитуды таких колебаний быстро нарастают. Нелинейные взаимодействия различных видов колебаний соответствуют взаимодействиям между масштабами пульсаций в гидродинамике. Число различных колебаний в плазме можно счи-

¹ Например, система бесконечного числа зацепляющихся уравнений для моментов скоростей.

² Масштаб пульсаций l в гидродинамике во всяком случае не меньше длины свободного пробега λ .

тать очень большим¹ и от динамического описания перейти к статистическому. Как и в гидродинамической турбулентности, процессы даже в бесстолкновительной плазме становятся необратимыми.

2) Электрическое и магнитное поля плазменных колебаний вызывают резкие локальные изменения функции распределения частиц по скоростям. Это связано с тем, что любая волна вида $\exp i(\omega t - kr)$ сильнее всего взаимодействует с так называемыми резонансными частицами, например с частицами, движущимися со скоростью, близкой к фазовой скорости волны $v \sim \frac{\omega}{k}$. В результате возникают большие градиенты, но в пространстве скоростей. Столкновениям между заряженными частицами соответствует столкновительный член $\hat{D} \Delta_{cf}$, где D — «коэффициент диффузии» в пространстве скоростей, напоминающий член, содержащий вязкость в уравнении Навье—Стокса (но в пространстве скоростей). Это соответствует случаю, когда столкновения с отклонениями на малые углы, т. е. с малым изменением скоростей, преобладают. Таким образом, и здесь можно установить аналогию с гидродинамической турбулентностью, но скорее формальную, так как вязкости в обычном пространстве (гидродинамика) соответствует «вязкость» в пространстве скоростей (плазма).

Теорию таких аномальных явлений в плазме принято называть теорией коллективных процессов, тем самым подчеркивая, что основная роль в них принадлежит плазменным колебаниям и волнам, представляющим собой «коллективные» движения частиц плазмы. Аналогия с гидродинамической турбулентностью дает представление о характере и масштабе трудностей теории коллективных процессов в плазме. В действительности в теории коллективных процессов в плазме положение еще сложнее, хотя бы потому, что функция распределения частиц по скоростям зависит не от четырех переменных (r, t), как в гидродинамике, а от семи (r, v, t).

Основная задача теории коллективных процессов состоит в построении кинетики неравновесных процессов — процессов установления термического равновесия. Если исходное состояние плазмы достаточно далеко от равновесного, то переход к послед-

¹ Так, число N степеней свободы ленгмюровских колебаний в плазме можно оценить следующим образом: в единице объема число колебаний

$$\frac{N}{V} \sim \int_0^{k_{\max}} k^2 dk,$$

где k — волновое число.

Для плазменных колебаний, как известно, $k_{\max} \sim \frac{1}{a}$. Следовательно,

$N \sim \frac{v}{a^3}$, что по определению много больше 1.

нему носит не монотонный характер, а сопровождается интенсивной раскачкой плазменных колебаний вследствие неустойчивостей¹.

Теория коллективных процессов должна определять характерное время этих переходных явлений. Наличие достаточно интенсивных неупорядоченных колебаний, сопровождающих эти переходные процессы, сказывается и на явлениях переноса, таких, как диффузия, теплопроводность и т. д. С точки зрения практических приложений теории они представляют большой интерес. Так, например, в исследованиях по управляемым термоядерным реакциям используется принцип магнитной термоизоляции плазмы. При этом часто равновесные конфигурации плазмы в магнитном поле оказываются неустойчивыми. Возникновение неустойчивостей может привести к резкому ухудшению магнитной термоизоляции и возрастанию потоков тепла и частиц на стенки, как следствие коллективных процессов. В этой области за последние годы накоплен значительный экспериментальный материал. Однако зачастую явления аномально быстрого «ухода» плазмы на стенки бывают связаны не со специфически коллективными плазменными процессами, а с обычными магнитогидродинамическими неустойчивостями. Трудно провести четкую грань между специфически плазменными коллективными процессами и турбулентностями магнитогидродинамической природы, тем более что иногда разреженную плазму с очень большой длиной свободного пробега с хорошей точностью можно описать уравнениями, напоминающими уравнения обычной магнитной гидродинамики.

2. В многочисленных работах по динамике разреженной плазмы можно встретить совершенно различные математические модели, используемые для описания плазмы. Самый общий подход к решению данной задачи заключается в применении кинетического уравнения с самосогласованными электрическим и магнитным полями. Однако этот путь довольно сложен. Часто (особенно при рассмотрении задач из теории колебаний и устойчивости) пользуются для описания плазмы «гидродинамическими» уравнениями (отдельно для электронов и ионов). Строго говоря, ни о какой гидродинамике в отсутствие столкновений нельзя говорить. Тем не менее, во многих отношениях такой подход дает разумные результаты.

Рассмотрим например, вопрос о распространении какой-либо волны по плазме в отсутствие постоянного магнитного поля. Если фазовая скорость $\frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}$, то тепловое движение частиц несущественно и можно считать, что все ионы и электроны в данной точке имеют одинаковые скорости. Тогда можно пользоваться просто уравнениями движения для каждого сорта частиц. В эйлеровой системе координат это есть не что иное, как гидродинамика

¹ Часто уже небольшое отклонение от термодинамического равновесия достаточно, чтобы вызвать неустойчивость.

с нулевой температурой. Если же нас интересуют поправки, связанные с малым тепловым разбросом, то правильный результат, т. е. совпадающий с кинетическим, получится в том случае, когда в эти «гидродинамические» уравнения мы добавим члены, учитывающие градиенты давления ∇p (для ионов и электронов), а p будем считать изменяющимся по адиабатическому закону с показателем адиабаты $\gamma = 3$. Это не удивительно: ведь в отсутствие столкновений движение по каждой степени свободы является независимым, а для одномерного движения, как известно, $\gamma = 3$.

Можно подобным же образом оправдать «гидродинамический» упрощенный подход и в другом случае. Допустим, что фазовая скорость $\frac{\omega}{k}$ значительно больше тепловой скорости ионов $\left(\frac{T_i}{M}\right)^{1/2}$, но значительно меньше тепловой скорости электронов $\left(\frac{T_e}{m}\right)^{1/2}$.

По-прежнему ионы можно описывать уравнениями движения, пренебрегая тепловым разбросом. Что же касается электронов, то здесь картина меняется. Так как электроны движутся гораздо быстрее волны, то ее электрическое поле по отношению к электронам будет квазистатическим. Тогда, если в области, где электрический потенциал ϕ максимален, распределение электронов по скоростям является максвелловским $f \sim \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)$, то плотность электронов в любом месте будет описываться распределе-

нием Больцмана $n = n_0 e^{\frac{e\phi}{T}}$. Если теперь ограничиться длинами волн, значительно превышающими дебаевский радиус a , то электрическое поле можно исключить из уравнений, пользуясь усло-

вием квазинейтральности: $n_i = n_e = n_0 e^{\frac{e\phi}{T}}$. Член, содержащий электрическое поле в уравнении движения для ионов — $e\nabla\phi$, заменяется на $-\frac{T}{n} \nabla n$. Таким образом, движение ионов подчи-

няется уравнениям гидродинамики с $\gamma = 1$ (изотермичность обеспечивается за счет электронов, которые, двигаясь быстрее волны, успевают выравнять температуру). Однако гидродинамическое описание не учитывает некоторые особенности, связанные с наличием теплового движения. Так, выпадают из рассмотрения особенности, обусловленные наличием резонансных частиц, имеющих скорости, близкие к скорости распределения волн. Такие частицы определяют затухание колебаний, не связанное со столкновениями. Если $\frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}$, таких частиц экспоненциально мало и затухание, следовательно, мало [порядка $\exp\left\{-\frac{m}{T} \left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right\}$].

При наличии в плазме достаточно сильного магнитного поля ситуация может измениться. При некоторых ограничениях кинетический способ описания даже в отсутствие столкновений можно

привести к гидродинамическому. Физическая причина этого заключается в том, что магнитное поле как бы «привязывает» частицы к своим силовым линиям, тогда средняя макроскопическая скорость частиц будет определяться «движением» самих силовых линий. Формально такие приближенные уравнения получаются разложением кинетического уравнения по степеням отношения среднего ларморовского радиуса частиц к характерному пространственному масштабу R . Разложение по $\frac{r_H}{R}$ напоминает вывод обычного гидродинамического приближения из кинетической теории, когда разложение ведется по $\frac{\lambda}{R}$ (λ — длина свободного пробега). Это разложение фактически означает переход к описанию плазмы как совокупности квазичастиц — «ларморовских кружков». В получающихся таким образом гидродинамических уравнениях содержатся уже два давления: продольное и поперечное (по отношению к направлению силовых линий магнитного поля). При этом $\gamma = 2$, так как поперечное движение является двумерным.

В статье наряду с кинетическим уравнением используются и гидродинамические упрощенные уравнения в тех случаях, когда их применение обоснованно. Это существенно облегчает рассмотрение некоторых нелинейных задач, хотя бы по той причине, что позволяет обращаться к аналогии с нелинейными движениями в обычной гидродинамике.

3. Ясно, что важную роль в теории коллективных процессов играет теория устойчивости. Обычно устойчивость состояния какой-либо системы исследуется методом возмущения. Если начальное возмущение стационарного состояния системы растет со временем, то состояние неустойчиво по отношению к такому виду возмущений. Практически всегда речь идет об устойчивости лишь по отношению к малым возмущениям — отклонениям от исходного стационарного состояния, когда уравнения, описывающие их, допускают линеаризацию, т. е. разложение по амплитуде возмущений, и отбрасывание всех членов первого порядка аналогично теории малых колебаний. В теории устойчивости состояний разреженной плазмы сохраняются, как правило, многие черты магнитогидродинамической теории устойчивости. Это связано с тем, что часто разреженную плазму можно, как уже отмечалось, с хорошей точностью описывать магнитогидродинамическими уравнениями. Однако разреженной плазме присущи и своеобразные неустойчивости, не описываемые в рамках магнитогидродинамических уравнений. Критерий возникновения этих неустойчивостей и скорости их нарастания могут быть получены лишь в кинетической теории. Интеграл столкновений обычно опускается, что справедливо, если инкременты нарастания неустойчивости значительно больше частоты соударений. При рассмотрении неустойчивости, связанной с локальным отклонением состояния плазмы

от термодинамического равновесия, удобно считать «фон» (стационарное состояние плазмы) однородным и бесконечно протяженным. Исследование устойчивости в подобных случаях сводится к решению соответствующего дисперсионного уравнения, связывающего собственную частоту ω с волновым вектором k . Получение критерия неустойчивости по отношению к некоторым простейшим типам возмущений часто вообще не требует проведения громоздких расчетов: оказывается достаточно ограничиться наглядными рассуждениями [2]. Поддаются анализу также задачи об устойчивости «слабонеоднородной» плазмы, когда можно воспользоваться малостью отношения $\frac{\lambda}{R}$ (λ — длина волны возмущения; R — характерный размер «неоднородности»).

Рассмотрим неустойчивости по отношению к волнообразным искривлениям силовых линий магнитного поля. Известно, что в равновесной плазме такие начальные искривления силовых линий распространяются как альфвеновские магнитогидродинамические волны, которые можно наглядно представить в виде колебаний «упругих нитей» (силовых линий магнитного поля). Для выяснения условий неустойчивости рассмотрим силы, возникающие при искривлении силовой линии (рис. 1). Так как частицы «привязаны» к силовым линиям, при движении по их искривленному участку возникает центробежная сила

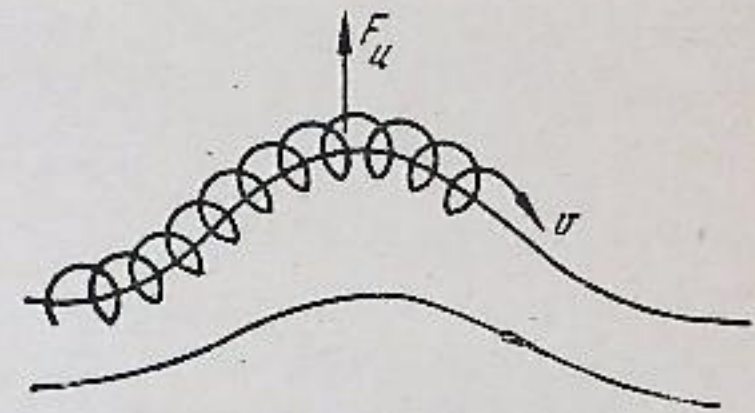


Рис. 1.

$$F_z = \int f \frac{mv_{\parallel}^2}{R} dv, \quad (4)$$

стремящаяся увеличить искривление.

Поскольку, кроме того, каждая «квазичастица» обладает магнитным моментом μ , ориентированным против магнитного поля H , то на частицу в неоднородном магнитном поле будет действовать сила, связанная с током намагничивания,

$$\mathbf{j}_{\mu} = c \nabla \times \int \mu f dv, \\ \mathbf{F}_{\mu} = \frac{[\mathbf{j}_{\mu} \times \mathbf{H}]}{c} = [\text{rot} \int \mu f dv \times \mathbf{H}]. \quad (5)$$

Эта сила вместе с силой натяжения линий магнитного поля

$$\mathbf{F}_H = \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}] \quad (6)$$

стремится вернуть силовую линию в положение равновесия.

Если $F_{\parallel} > F_{\perp} + F_{\text{н}}$, система уходит от положения равновесия, т. е. возникает неустойчивость. Из выражений (4)–(6) трудно получить следующее условие неустойчивости:

$$p_{\parallel} - p_{\perp} > \frac{H^2}{4\pi}, \quad (7)$$

где

$$p_{\parallel} = \int m v_{\parallel}^2 f dv, \quad p_{\perp} = \int \mu H f dv, \quad \mu = \frac{m v_{\perp}^2}{2H}.$$

Скорость, с которой плазма уходит из положения равновесия, можно найти, приравняв сумму сил $F_{\perp} - F_{\mu} - F_{\text{н}}$ к произведению массы элемента плазмы на ускорение $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} c \frac{E_{\sim}}{H}$. Из уравнений Максвелла следует, что $E_{\sim} = H_{\sim} \frac{\omega}{ck}$, если выбирать возмущения в виде $\exp(i\omega t - ikx)$. Тогда уравнение равно $\frac{dv}{dt} = i\omega^2 \frac{H_{\sim}}{kH}$. Подставляя значения сил F , получим

$$\omega^2 = \frac{k^2}{q} \left(\frac{H^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right). \quad (8)$$

Эта неустойчивость обязана своим появлением центробежной силе, возникающей при движении частиц по искривленной силовой линии (иногда ее называют «шланговой»), по аналогии с резиновым шлангом, который скручивается, когда по нему течет вода).

Аналогично в другом предельном случае ($p_{\perp} > p_{\parallel}$) приходим к критерию неустойчивости, имеющему вид

$$p_{\perp} \gg p_{\parallel} \left(1 + \frac{H^2}{8\pi p_{\perp}} \right). \quad (9)$$

Условия (7) и (9) показывают, что плазма неустойчива, если распределение частиц по скоростям достаточно сильно отличается от изотропного. С уменьшением H неустойчивость может быть при меньшей анизотропии. Однако при очень малых H велик ларморовский радиус частиц, и представление о квазичастицах — ларморовских кружках — становится неверным. Тем не менее в пределе $H \rightarrow 0$ тоже существует анизотропная неустойчивость. Рассмотренные неустойчивости являются аperiodическими, т. е. зависимость от времени для них имеет вид $\exp \gamma t$. Отклонение состояния плазмы от термодинамически равновесного может привести и к раскачке волн, т. е. к появлению колебательной неустойчивости. Критерий возникновения такой неустойчивости, т. е. условия изменения знака мнимой части ω_i частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$, можно легко получить, рассмотрев баланс обмена энергией между какой-нибудь плазменной волной, возникшей в результате флуктуаций, и частицами плазмы. При очень малых ω_i ($\omega_i \ll \omega_r$) волна с данной ω и соответствующим волновым вектором является почти периодической. Ионы (электроны) плазмы, осциллируя в периодическом поле волны, в среднем не изменяют своей энергии.

Исключение составляют те частицы из распределения по скоростям, для которых выполнено условие резонанса с волной. При отсутствии магнитного поля в невозмущенной плазме в резонансе находятся лишь те частицы, скорость которых близка к фазовой скорости волны $\frac{\omega}{k}$ (условие резонанса: $\omega - kv = 0$). При наличии постоянного внешнего магнитного поля эффективно взаимодействовать с волной будут также и те частицы, для которых в их собственной системе координат частота волны $\omega' = \omega - kv$ из-за эффекта Доплера будет близка к циклотронной частоте $\omega_{\text{н}} = \frac{eH}{mc}$ (или к одной из ее гармоник $n\omega_{\text{н}}$ при $n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Частицы, у которых составляющая скорости вдоль магнитного поля удовлетворяет этому условию, будут непрерывно ускоряться (или замедляться) полем волны подобно тому, как ускоряются ионы в циклотроне. В простейшем случае, когда постоянное магнитное поле отсутствует, в однородной плазме могут распространяться либо чисто поперечные, либо чисто продольные волны. Поперечные волны не будем рассматривать, поскольку их фазовая ско-

рость превышает скорость света $\left(\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$. Что же касается продольных ленгмюровских электронных колебаний, их фазовая скорость ограничена снизу величиной порядка тепловой скорости электронов (соответствующая минимальная длина волны порядка дебаевского радиуса) и растет с увеличением длины волны. Рассмотрим ленгмюровскую волну с частотой ω (и фазовой скоростью $\frac{\omega}{k}$) в системе координат, движущейся относительно лабораторной со скоростью $\frac{\omega}{k}$ как электростатический потенциал, представляющий собой неподвижную синусоиду амплитуды ϕ_0 : чередование потенциальных «ям» и «горбов» для электронов. Те электроны, скорость которых заметно отличается от $\frac{\omega}{k}$, будут свободно двигаться в этом периодическом поле, сохраняя в среднем свою энергию. Электроны же, скорость которых v отличается от $\frac{\omega}{k}$ на величину, меньшую $\sqrt{\frac{2e\phi_0}{m}}$, будут отражаться от потенциальных «горбов». Эти электроны можно разбить на две группы: скорость одних превышает $\frac{\omega}{k}$, другие имеют меньшую, чем $\frac{\omega}{k}$, скорость. Электроны первой группы, догоняя «горбы» потенциала, отражаются, отдавая энергию волне; электроны второй группы «подхлестываются» волной, получая от нее энергию. Простое рассмотрение баланса энергии при отражении электронов от потенциальных «горбов» приводит к получению условия неустойчивости, называемого обращенным затуханием Ландау. Амплитуда волны будет расти, если в целом энергия переходит от электронов

к волне, а это происходит в том случае, если число электронов первой группы больше, чем второй, т. е. если

$$\frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right) > 0. \quad (10)$$

Для выполнения этого условия необходимо, чтобы функция распределения электронов по скоростям имела по меньшей мере один дополнительный максимум в области скоростей, превышающих тепловую. Если же всюду $\frac{df}{dv} < 0$, то $\omega_i < 0$, т. е. волна затухает (это и есть затухание Ландау) [3].

Оценив работу, совершаемую электрическим полем волны, можно аналогично вывести критерий неустойчивости и для циклотронного резонанса $\omega = \omega_n - kv$, который оказывается существенным для поперечно поляризованных волн, распространяющихся вдоль постоянного магнитного поля.

4. Самым трудным вопросом теории коллективных процессов в плазме является вопрос о том, в какое состояние переходит плазма в результате развития неустойчивостей: ведь экспоненциально растущие возмущения рано или поздно станут настолько велики, что нарушатся условия применимости линейного рассмотрения. Принципиальный ответ на этот вопрос, оказывается, можно дать для колебательной неустойчивости. В этом случае состояние, в которое переходит плазма вследствие неустойчивости, очевидно, должно представлять собой своеобразную смесь двух ансамблей: частиц и волн. Взаимодействие частиц с волнами, в частности, приводит к неустойчивости. Взаимодействие между волнами — эффект полностью нелинейный. Если любая волна «существует» в течение времени, значительно большего ее периода ($t \gg \frac{2\pi}{\omega}$), можно применять к ней понятие «квазичастица», а ансамбль таких волн-квазичастиц описывать соответствующей функцией распределения волн по квазимпульсам (волновым векторам k), удовлетворяющей соответствующему кинетическому уравнению. Формально ситуация становится очень близкой к имеющей место в квантовой теории твердого тела, где тоже рассматривается смесь двух газов: электронного и фононного. На самом же деле в теории неустойчивости плазмы все гораздо сложнее, так как уравнения принципиально нелинейны, ибо имеет смысл рассматривать лишь состояния, далекие от термодинамического равновесия. Чтобы написать соответствующие кинетические уравнения теории турбулентной плазмы, надо знать вид соответствующих столкновительных членов: волна—частица и волна—волна. Первый из них выводится в так называемой «квазилинейной» теории, которая принимает во внимание роль малых нелинейных эффектов лишь однажды — учитывает искажение функции распределения частиц из-за обратного воздействия волн [4—6].

В квазилинейном приближении функция распределения частиц по скоростям представляется в виде суммы двух частей:

медленно меняющейся $f_0(v, t)$ (будем называть ее «фоном») и быстро осциллирующей $f_{\sim}(v, t)$. Медленное изменение «фона» вследствие обратного воздействия колебаний на частицы обусловлено усредненными квадратичными эффектами малых быстрых осцилляций, аналогично известному методу Ван дер Поля в нелинейной механике. С другой стороны, термин «квазилинейность» означает, что непосредственное взаимодействие между различными гармониками, обусловленное нелинейностью, не учитывается. Поэтому баланс энергии в k -й гармонике колебаний определяется, как и в линейной теории устойчивости, уравнением

$$\frac{d}{dt} E_k^2 = 2\nu E_k^2, \quad (11)$$

где ν — мнимая часть частоты.

Рассмотрим, как получаются уравнения квазилинейного приближения для продольных электронных ленгмюровских колебаний в одномерном случае

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{eE}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi n_{\sim} e, \quad n_{\sim} = \int f_{\sim} dv. \quad (12)$$

Разобьем функцию распределения на медленно и быстро меняющиеся части

$$\begin{aligned} f_{\sim} &= \sum (f_k e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{к. с.}), \\ E &= \sum (E_k e^{i(kx - \omega t)} + \text{к. с.}). \end{aligned} \quad (13)$$

Величины f_k и E_k связаны между собой обычным соотношением, как и в линейной теории

$$f_k = -i \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega_k - kv} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot E_k. \quad (14)$$

Уравнение для медленно меняющейся части функции распределения f_0 мы получим, производя усреднение по быстрым осцилляциям,

$$\langle f \rangle = f_0. \quad (15)$$

Для такого усреднения необходимо, чтобы в плазме имелось одновременно много волн с различными волновыми векторами и хаотически распределенными фазами. Составленные из таких волн волновые «пакеты» должны иметь достаточно большую ширину, чтобы можно было пренебречь захватом частиц в «потенциальные» ямы отдельных гармоник пакета. Например, в рассматриваемом случае продольных ленгмюровских колебаний для этого необходимо, чтобы разброс фазовых скоростей волн в пакете значительно превышал ту скорость, с которой захваченная волной частица двигалась бы в потенциальной яме $e\varphi_0 : \Delta \frac{\omega}{k} \gg \left(\frac{e\varphi_0}{m} \right)^{1/2}$. Учитывая, что $\langle E f_0 \rangle = \langle E \rangle f_0$, получим из (12) — (14) следующее уравнение для f_0 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (16)$$

где коэффициент диффузии в пространстве скоростей D пропорционален квадрату электрического поля волн

$$-\frac{e^2}{m^2} \sum_{kk'} \left\langle (E_{k'} \cdot e^{i(k'x - \omega_{k'}t)} + \text{к. с.}) \left(\frac{E_k}{i(\omega_k - kv)} e^{i(kx - \omega_k t)} + \text{к. с.} \right) \right\rangle = -\frac{e^2}{m^2} 2\pi \sum_k |E_k|^2 \text{Im}(\omega_k - kv)^{-1}.$$

Уравнение (16) описывает обратное влияние ленгмюровских колебаний на функцию распределения частиц. Область применимости уравнений квазилинейной теории ограничена случаями, когда инкремент (или декремент) колебаний значительно меньше их частоты; если же это условие не выполнено, то разделение функции распределения на быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части невозможно.

Из уравнения (16) для усредненной функции распределения частиц f_0 ясно, что при возбуждении коллективных степеней свободы — волн — в плазме появляется, кроме обычной «столкновительной», дополнительная диффузия в пространстве скоростей. Данное уравнение, в отличие от исходного уравнения (12), уже не сохраняет энтропию. В этом нет ничего удивительного, так как процедура усреднения, использованная при переходе от выражения (12) к уравнению (16), соответствует переходу от динамического к статистическому описанию плазмы. Применение подобного же подхода к описанию волн приводит к кинетическому уравнению для волн-квазичастиц [7—10]. Такой статистический подход по существу эквивалентен корреляционному методу, используемому в теории гидродинамической турбулентности. Для волновых неустойчивостей с $\frac{v}{\omega} \ll 1$ (инкремент много меньше частоты) зацепляющаяся цепочка уравнений для корреляционных функций может быть разорвана по малому параметру $\frac{v}{\omega}$ [11]. Неустойчивости же неволнового характера с $v \gtrsim \omega$ не удастся рассмотреть таким способом, так как в задаче отсутствует малый параметр. В подобных случаях в теории коллективных процессов для получения результатов пользуются полуколичественными оценками.

Настоящий обзор посвящен конкретным применениям теории коллективных процессов для построения теории толщины ударных волн в разреженной плазме.

В разреженной плазме, в силу «коллективных» свойств, возможно существование специфических ударных волн с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега. На первый взгляд такой вывод мог бы показаться парадоксальным. Представим себе (рис. 2) ударную волну с толщиной Δ , значительно меньшей длины свободного пробега l . Более быстрые частицы ($v > u$) из области слева (нагретая ударной волной плазма),

казалось бы, могли, свободно двигаясь в сторону невозмущенной плазмы, размыть переходную область до толщины l — длины свободного пробега. Какие эффекты могут предотвратить такое расплывание переходной области?

1) Самый простой случай имеет место при наличии магнитного поля, параллельного плоскости фронта. Такое магнитное поле заворачивает ионы и электроны плазмы на расстояниях порядка их ларморовского радиуса r_H . Следовательно, можно ожидать, что $\Delta \sim r_H$. Достаточно сильное магнитное поле ($\frac{H^2}{8\pi} \gg nT$) препятствует размыванию даже в том случае, если оно не обязательно лежит в плоскости фронта.

Это связано с тем, что скорости ударной волны при $\frac{H^2}{8\pi} \gg nT$ значительно больше тепловой скорости частиц, и, следовательно, доля ионов (электронов), обгоняющих волну, экспоненциально мала. В задачах этого круга возникает следующий кажущийся парадокс. Состояния с обеих сторон фронта ударной волны связаны соответствующими законами сохранения (адиабатой Гюгонио), согласно которым энергия поступательного движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны. Что же приводит к диссипации, если $\Delta \ll l$? Ответ на этот вопрос заключается в том, что в возмущенном состоянии плазмы за фронтом волны основная доля внутренней энергии приходится на интенсивные плазменные колебания. Происхождение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы. Вторая глава специально посвящается изложению теории нелинейных упорядоченных колебаний плазмы (ее результаты представляют интерес и вне связи с ударными волнами). Нестационарные нелинейные движения плазмы представляют собой слишком сложную задачу (удается рассмотреть лишь некоторые частные случаи при различных упрощающих предположениях). Зато установившиеся нелинейные незатухающие колебания рассмотрены относительно полно. Здесь следует отметить полезную аналогию между нелинейными колебаниями плазмы и волнами конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. В теории нелинейных колебаний плазмы также появляются «уединенные» волны, скорость которых зависит от амплитуды. Нелинейные волны в плазме могут разрушаться вследствие различных плаз-

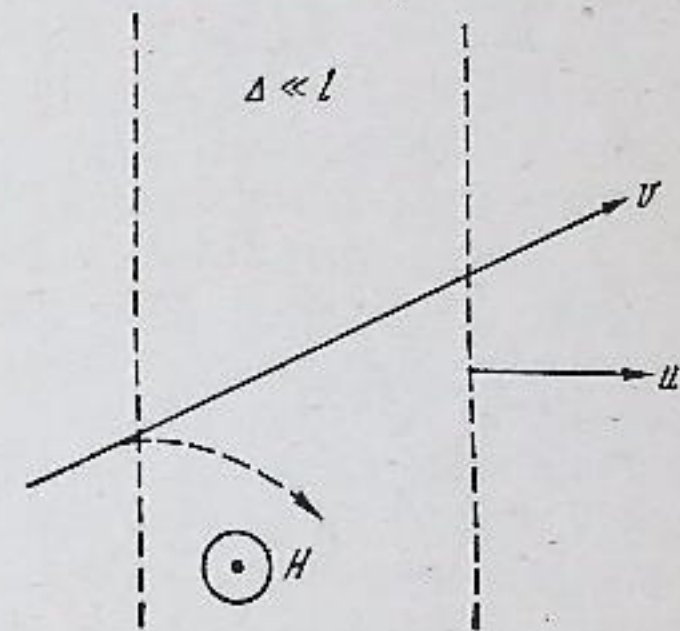


Рис. 2.

матического движения невозмущенной плазмы трансформируется во внутреннюю энергию плазмы после прохождения ударной волны. Что же приводит к диссипации, если $\Delta \ll l$? Ответ на этот вопрос заключается в том, что в возмущенном состоянии плазмы за фронтом волны основная доля внутренней энергии приходится на интенсивные плазменные колебания. Происхождение таких нелинейных колебаний не обязательно связано с неустойчивостью плазмы. Оно тесно связано со специфическими дисперсионными свойствами плазмы. Вторая глава специально посвящается изложению теории нелинейных упорядоченных колебаний плазмы (ее результаты представляют интерес и вне связи с ударными волнами). Нестационарные нелинейные движения плазмы представляют собой слишком сложную задачу (удается рассмотреть лишь некоторые частные случаи при различных упрощающих предположениях). Зато установившиеся нелинейные незатухающие колебания рассмотрены относительно полно. Здесь следует отметить полезную аналогию между нелинейными колебаниями плазмы и волнами конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. В теории нелинейных колебаний плазмы также появляются «уединенные» волны, скорость которых зависит от амплитуды. Нелинейные волны в плазме могут разрушаться вследствие различных плаз-

менных неустойчивостей. Некоторые типы неустойчивостей нелинейных волн рассмотрены в заключение § 2. Один из типов возможных неустойчивостей — так называемая «пучковая» неустойчивость — проявляется в нелинейных волнах в магнитном поле и связан с электрическим током волны. Если упорядоченная скорость электронов относительно ионов превышает их среднюю тепловую скорость, то энергия волны вследствие пучковой неустойчивости будет перекачиваться в энергию электростатических продольных колебаний плазмы. Существует и другой тип неустойчивости, присущий нелинейным периодическим волнам — так называемые «распадные» неустойчивости, когда регулярные колебания распадаются, рождая целый спектр неупорядоченных волн. Эта неустойчивость в известном смысле напоминает распады коллективных возбуждений в квантовой теории систем многих частиц. Совокупность всех этих факторов и приводит к формированию структуры ударной волны (§ 3).

2) Когда магнитное поле мало или вообще отсутствует, механизм, мешающий расплыванию фронта ударной волны, имеет иную природу. Предположим, что вследствие расплывания некоторая доля быстрых частиц проникнет в невозмущенную плазму перед фронтом ударной волны (см. рис. 2). Тогда состояние плазмы в этой области представит собой смесь равновесного невозмущенного распределения частиц и некоторой группы быстрых частиц, т. е. станет неравновесным (в итоге распределение частиц по скоростям будет отличаться от максвелловского). Неравновесная плазма неустойчива по отношению к раскачке различного рода колебаний. Флуктуирующие электрическое и магнитное поля колебаний, возникших вследствие неустойчивости, приводят к рассеянию ионов и электронов. Иначе говоря, при наличии такого сорта флуктуирующих полей нужно переопределить понятие длины свободного пробега. В достаточно редкой плазме рассеяние на неравновесных шумах оказывается значительно более существенным, чем обычные «парные» кулоновские столкновения частиц.

§ 2. Нелинейные колебания плазмы

1. Наиболее существенная роль нелинейных эффектов, как известно, состоит в увеличении крутизны переднего фронта. Однако в плазмодинамике по мере роста крутизны фронта часто начинают играть важную роль дисперсионные эффекты. Это приводит к интересным особенностям возникающих асимптотических движений — к спонтанному возникновению интенсивных колебаний вследствие конкуренции между нелинейностью и дисперсией. Данный параграф посвящается систематическому изложению теории нелинейных незатухающих колебаний. Начнем обсуждение этого вопроса с качественного рассмотрения нелинейного искажения формы какого-либо начального возмущения.

В линейной теории колебательное движение плазмы представляет собой суперпозицию отдельных не взаимодействующих волн — гармоник $[\exp i(\omega t - kr)]$, где ω — частота; k — волновой вектор]. Между ω и k , вообще говоря, существует определенная связь — закон дисперсии $\omega = \omega(k)$. Ясно, что учет нелинейности колебаний может изменить картину движения, имеющую место в линейной теории. Обратимся к наглядной аналогии со звуковыми колебаниями в обычной газодинамике. Хорошо известно, что звуковые волны, гармонические в линейном приближении, из-за конечности амплитуды с течением времени искажаются. Эта нелинейная деформация заключается в том, что участки профиля, которым соответствует большая скорость, стремятся опередить участки с меньшей скоростью и в конце концов образуются разрывы (если звук не успеет затухнуть).

Теперь проследим за возможным нелинейным искажением профиля какой-нибудь гармонической волны в разреженной плазме. Тенденция к увеличению крутизны переднего фронта из-за нелинейности сохраняется и в волнах в разреженной плазме. [Исключение составляют волны с поперечной поляризацией, как, например, альфвеновские магнитогидродинамические. В уравнениях, описывающих такие волны, нелинейные члены типа $(v \nabla) v$ выпадают.] Если в газовой динамике рост крутизны фронта ограничивается диссипативными эффектами, то в разреженной плазме главную роль могут играть эффекты дисперсии. На примере с гармонической волной «конкуренцию» между нелинейностью, стремящейся опрокинуть волну, и дисперсией можно проиллюстрировать следующим образом. Увеличение крутизны переднего фронта означает рождение высших гармоник в волне под влиянием нелинейности. В первом (линейном) приближении всякая волна остается гармонической $[\exp i(\omega t - kr)]$; во втором приближении должны появляться вторые гармоники (как это имеет место в звуковой волне). В разложении по амплитуде волны уравнение для поправки второго приближения примет вид

$$\hat{L}_0 f_2 = \hat{L} f_1^2 \exp i(2\omega t - 2kr). \quad (17)$$

Здесь f — отклонение какой-либо величины, характеризующей плазму или поле, от равновесного значения (индексы 1, 2 означают соответственно первое и второе приближение); L_0 — линейный оператор, соответствующий линейным колебаниям плазмы с каким-то законом дисперсии $\omega = \omega(k)$. В известном смысле уравнение (17) имеет вид уравнения движения «осциллятора» под действием вынуждающей силы $\sim f_1^2$. Ясно, что вторая гармоника будет возбуждаться, если эта сила находится в резонансе с собственной частотой осциллятора, т. е. если удвоенной исходной частоте соответствует (в законе дисперсии) волновой вектор, равный $2k$. Такой «резонанс» будет осуществляться лишь для линейного закона дисперсии $\omega = ck$, как это и имеет место в обыч-

ном звуке. Для произвольного закона дисперсии, вообще говоря, уже не будет перекачки энергии основной гармонике во вторую и т. д., если «вынуждающая» сила находится далеко от резонанса. Такая качественная иллюстрация показывает, что периодические волны в плазме в области частот, где существенно отклонение от линейного закона дисперсии, могут распространяться без искажения своей формы из-за нелинейности. Зная ход дисперсионных кривых $\omega(k)$ из теории линейных колебаний плазмы, можно, таким образом, предвидеть некоторые общие свойства нелинейных движений. Пусть, например, речь идет о магнитозвуковых колебаниях, распространяющихся поперек магнитного поля в плазме.

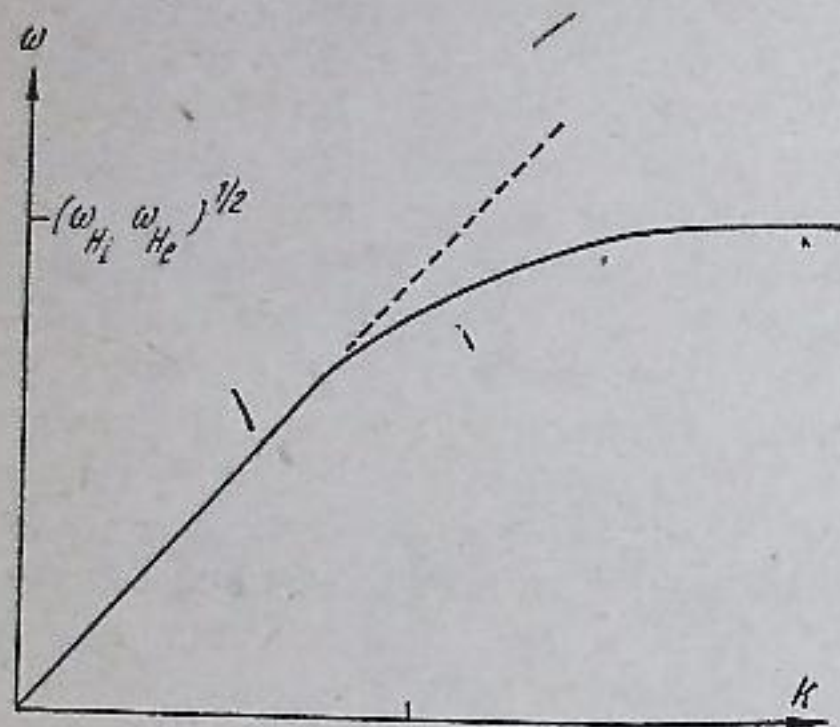


Рис. 3.

При частотах, меньших ω_{H_i} — ларморовской частоты ионов, фазовая скорость таких колебаний равна

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)^{1/2} = \left(\frac{H_0^2}{4\pi q_0} + 2 \frac{p_0}{q_0} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

где H_0 — невозмущенное магнитное поле; q_0 — плотность; p_0 — давление. С ростом частоты фазовая скорость меняется из-за дисперсии. В общем слу-

чае закон дисперсии даже для таких волн весьма сложен. Рассмотрим два противоположных предельных случая.

Плазма низкого давления ($p_0 \ll \frac{H_0^2}{8\pi}$). Фазовая скорость от значения $\frac{H_0}{\sqrt{4\pi q_0}}$ при малых частотах с ростом ω уменьшается до нуля при частоте $(\omega_{H_i} \omega_{H_e})^{1/2}$ (так называемая «гибридная» частота $(\frac{e^2 H^2}{m M c^2})^{1/2}$; mM — массы электрона и иона). Дисперсионная кривая для этого типа колебаний для наглядности показана на рис. 3. Соответствующий закон дисперсии имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{H_0^2}{4\pi q_0} \cdot \frac{\omega_0^2/c^2}{k^2 + \omega_0^2/c^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi n l^2}{m}$$

Отклонения от линейного закона дисперсии начинают существенно проявляться при $k \rightarrow \frac{\omega_0}{c}$. Величина $\frac{c}{\omega_0}$ определяет характерный пространственный масштаб для установившихся

нелинейных магнитозвуковых волн. Все это справедливо для плазмы в не слишком сильном магнитном поле $\frac{H^2}{8\pi} \ll n m c^2$. В такой плазме состояние в магнитозвуковой волне оказывается квазинейтральным. Если рассматривать, например, очень сильные магнитные поля

$$\frac{H_0^2}{8\pi} \gg n_0 m c^2,$$

то для частот, больших ω_{H_i} , становится существенным отступление от квазинейтральности. Закон дисперсии для таких колебаний имеет вид (опять-таки при пренебрежении тепловым движением)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{H_0^2}{4\pi q_0} \frac{\frac{4\pi q_0}{H_0^2} \Omega_0^2}{k^2 + \frac{4\pi q_0^2}{H_0^2} \Omega_0^2} \quad \left(\Omega_0^2 = \frac{4\pi n l^2}{M} \right). \quad (19)$$

Фазовая скорость стремится к нулю при ионной ленгмюровской частоте $\omega \rightarrow \Omega_0$. Характерная длина, при которой становится существенно отклонение от линейного закона дисперсии, есть $\frac{H_0 M}{4\pi q_0 e}$.

Плазма «большого давления» ($p_0 \geq \frac{H^2}{8\pi}$). В этом случае дисперсия начинает проявляться при $\omega \rightarrow \omega_{H_i}$. Действительно, когда частота ω становится больше ω_{H_i} , за время одного колебания траектория иона будет слабо искривляться магнитным полем. Иначе говоря, движение его в волне будет уже не двумерным, а одномерным. Поэтому эффективный показатель адиабаты γ ионов, характеризующий скорость магнитозвуковой волны, при $\omega > \omega_{H_i}$ нужно полагать равным 3 (а не 2, как при $\omega < \omega_{H_i}$). Следовательно, фазовая скорость волны при $\omega > \omega_{H_i}$ увеличивается. Таким образом, в плазме «большого давления» в рассматриваемом интервале частот фазовая скорость волн должна не падать, а расти с частотой. Характерный размер нелинейных волн в этом случае тоже иной; он порядка ларморова радиуса ионов.

До сих пор речь шла о волнах, распространяющихся строго перпендикулярно к магнитному полю. Как показывает линейная теория малых колебаний, законы дисперсии резко меняются даже при небольшом отклонении направления распространения от перпендикулярного. Это связано с тем, что в таких волнах появляется составляющая электрического поля вдоль H_0 . Электроны вдоль H_0 под действием этого электрического поля двигаются гораздо быстрее, чем поперек H_0 , но сильно искажают распределение токов и зарядов в волне. Рассмотрим опять «холодную» плазму.

Для углов, удовлетворяющих условию $(\frac{m}{M})^{1/2} \ll \theta \ll 1$, закон дисперсии, связывающий ω с k , приобретает особенно простой асимптотический вид (если ограничиться не слишком короткими волнами $\lambda \gg \frac{c}{\omega_0} 1/\theta$)

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx \frac{H_0^2}{4\pi e_0} \left(1 + \frac{k^2 \theta^2 c^2}{\Omega_0^2} \right). \quad (20)$$

Отклонение от линейного хода $\omega = \omega(k)$ становится существенным для длин волн порядка $\frac{c}{\Omega} \theta$. С ростом частоты в таких волнах фазовая скорость возрастает. Следует ожидать, что это приведет к изменению характера нелинейных движений.

Перейдем теперь к случаю, когда магнитное поле вообще отсутствует. При этом ионные звуковые колебания в разреженной плазме, как известно из линейной теории, имеют смысл, если давление электронов значительно превышает давление ионов $p_e \gg p_i$. Такие условия реализуются, например, в неизометрической плазме, когда температура электронов значительно превышает ионную. Если для простоты принять ионы «холодными» ($T_i = 0$), то закон дисперсии будет подобен закону (19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{T_e}{M} \cdot \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + k^2}, \\ \kappa^2 &= \frac{\Omega_0^2 M}{T_e}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Роль характерного масштаба здесь играет дебаевский радиус $1/\kappa^1$.

Все рассмотренные случаи показывают, что на малых расстояниях становятся существенными эффекты дисперсии. В обычной гидродинамике на малых расстояниях становятся существенными диссипативные эффекты, которые и ограничивают рост крутизны переднего фронта. В отличие от обычной газовой динамики, в разреженной плазме такой причиной являются дисперсионные эффекты. Различие между этими двумя группами эффектов находит свое отражение в математической структуре исходных уравнений. Диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность и т. п.) нарушают их обратимость — увеличивают порядок производных на нечетное число (как, например, вязкость добавляет к уравнению Эйлера в газодинамике члены со вторыми производными). Дисперсионные эффекты не нарушают обратимости и увеличивают порядок дифференцирования в уравнениях на четное число.

¹ Наконец, колебания электронов в холодной плазме без магнитного поля имеют в качестве дисперсионного соотношения просто $\omega^2 = \omega_0^2$. Здесь нет характерного масштаба, и можно сконструировать установившиеся нелинейные волны любого пространственного периода.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений, описывающих распространение ионно-звуковых колебаний при условии $T_e \gg T_i$. При сделанных предположениях одномерное плоское движение будет описываться системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v)}{\partial x} &= 0; \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 4\pi e \left(n_i - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Здесь M , v , n_i — соответственно масса, скорость и плотность ионов. Последнее уравнение системы (22) содержит старшую (вторую) производную. Для движений с характерным масштабом, значительно превышающим дебаевский радиус $(T/4\pi e^2)^{1/2}$, можно считать плазму квазинейтральной: $n_i = n_0 \exp(e\varphi/T)$, т. е. в последнем уравнении системы (22) надо опустить член $\partial^2 \varphi / \partial x^2$. Тогда, исключив из уравнений электрическое поле, получим

$$\left. \begin{aligned} M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{T}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (n v)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Эта система по форме совпадает с уравнениями изотермического движения ($\gamma = 1$) обычной газовой динамики. Здесь фронт, вообще говоря, любого начального возмущения с течением времени будет становиться все круче и круче. Такое нелинейное искажение формы профиля возмущения нагляднее всего иллюстрируется для частного случая, когда начальное распределение скорости и плотности таково, что одну из этих величин можно представить как функцию другой. В обычной газовой динамике для аналогичного случая существует решение Римана, описывающее так называемую простую волну произвольной амплитуды. Зависимость скорости от времени и координаты в этом решении определяется неявной функцией

$$x = t [v \pm c] + \chi(v), \quad (24)$$

где c — скорость звука, а $\chi(v)$ — функция, зависящая от начальных условий. Согласно выражению (24), профиль течения будет меняться так, что начиная с некоторого момента решение становится трехзначным. В обычной газовой динамике (с малой длиной свободного пробега) в подобных условиях возникает установившееся течение с разрывом (ударной волной). На основе описанной математической аналогии и возникла гипотеза

о возможности бесстолкновительной ударной волны в разреженной плазме. В рассматриваемом случае, однако, как только передний фронт возмущения стал достаточно крутым, включается действие дисперсионных эффектов [для задачи (23), например, они связаны с отступлением от квазинейтральности]. Интересно, что в обычной гидродинамике несжимаемой жидкости хорошо исследован аналог таких нелинейных движений — нелинейные волны на поверхности тяжелой жидкости. Если же глубина канала мала, уравнения двумерного движения сводятся, как известно, к уравнениям одномерного движения (для средней скорости жидкости v в данном сечении и глубины жидкости h):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hv) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где g — ускорение силы тяжести. Это так называемые «уравнения мелкой воды», являющиеся нулевым приближением в асимптотическом разложении точных уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости в канале конечной глубины по малому параметру h_0/L , где h_0 — глубина канала, L — характерный размер (например, длина волны). Уравнения мелкой воды по форме совпадают с уравнениями, описывающими плоские изэнтропические течения сжимаемого газа (с показателем адиабаты $\gamma = 2$). Поэтому в теории мелкой воды имеют смысл решения типа простых волн Римана. Из этих решений следует, что произвольный начальный профиль поверхности жидкости с течением времени стремится к образованию гребня. Уравнения мелкой воды, кроме того, в точности совпадают с уравнениями движения разреженной плазмы (при условии $nT \ll \frac{H^2}{8\pi}$) поперек магнитного поля для длин волн, значительно превышающих c/ω_0 (если, например, $H^2 \ll nmc^2$). При этом роль глубины канала h в уравнениях плазмы играет магнитное поле H . По мере роста крутизны переднего фронта волны в газовой динамике начинают играть роль диссипативные эффекты, в динамике редкой плазмы, напротив, появляются дисперсионные эффекты, когда характерный размер приближается к c/ω_0 . В теории мелкой воды, когда L приближается к h_0 , также начинают играть роль дисперсионные эффекты: уравнения (25) становятся несправедливыми, но когда h_0/L все еще мало, их можно «улучшить», добавляя следующие члены разложения по h_0/L точных уравнений. Эти члены имеют вид старших производных, ответственных за дисперсионные эффекты. Закон дисперсии для волн малой амплитуды в такой теории имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \operatorname{th}(kh_0).$$

При малых kh_0 его можно привести к виду

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \approx gh_0 \left[1 - \frac{1}{3} (kh_0)^2 + \dots \right] \quad (26)$$

Нелинейные колебания на поверхности тяжелой жидкости в настоящее время хорошо изучены для случая так называемых установившихся волн, т. е. волн, не меняющих свою форму с течением времени. Помимо периодических волн с длинами волн порядка h_0 , существуют так называемые «уединенные» волны, представляющие собой распространяющиеся обособленные возмущения уровня жидкости в канале.

На основании отмеченной аналогии с волнами в разреженной плазме в последней можно ожидать существование похожих периодических и уединенных волн. Однако в плазме из-за разнообразия законов дисперсии в различных случаях мы увидим и более разнообразные типы установившихся волн. Так, при определенных условиях по плазме могут распространяться уединенные волны «разрежения» (которым в теории поверхностных волн должны были бы соответствовать уединенные волны типа впадин).

В § 3 будет показано, что в разреженной плазме нелинейные волны такого типа неразрывно связаны с ударными волнами. До сих пор рассуждения проводились для конечной, но малой амплитуды волн. Для волн с достаточно большой амплитудой положение может быть совершенно иным. Дисперсионные эффекты могут оказаться недостаточными для ограничения роста крутизны, и фронт при амплитудах, превышающих некоторое критическое значение, может «опрокинуться». Возникают области многоскоростного течения (разумеется, это имеет смысл для первоначально холодной плазмы).

2. В газовой динамике асимптотической формой (при $t \rightarrow \infty$) любого начального движения является, вообще говоря, ударная волна. Какой характер должны иметь асимптотические движения в разреженной плазме? Можно ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ в конце концов установится какое-то стационарное волновое движение. Предполагая, что такие установившиеся движения существуют, в одномерном случае их нетрудно исследовать, непосредственно решая уравнения динамики плазмы. Стандартная процедура получения таких решений заключается в том, что в исходных уравнениях выбирают систему координат, движущуюся вместе с волной. В такой системе отсчета пропадает зависимость от времени и задача сводится к отысканию стационарного течения. Скорость волны u сначала входит в задачу как свободный параметр. Затем из условия разрешимости определяются границы, внутри которых может меняться u , а также связь u с амплитудой волны. Интерес для теории толщины ударных волн представляет исследование установившихся нелинейных волн в тех случаях,

когда закон дисперсии соответствующих колебаний при малой амплитуде стремится к линейному при больших длинах волн (звук), а дисперсионные эффекты проявляются на коротких волнах.

Начнем рассмотрение с волн, распространяющихся поперек магнитного поля. В приближении малого ларморовского радиуса («дрейфовое» приближение) здесь справедливы гидродинамические уравнения. Единственным типом установившегося движения для этих уравнений является тривиальный плоско-параллельный поток. Для того чтобы найти нетривиальные установившиеся движения,

нужно учесть эффекты дисперсии, проявляющиеся на малых расстояниях. Эффекты дисперсии связаны с отступлением от квазинейтральности, с инерцией электронов. При учете хотя бы одного из этих факторов можно получить установившиеся движения, отличные от плоско-параллельного потока. Им соответствуют две характерные длины.

Рассмотрим, как дисперсионные эффекты приводят к формированию установившихся волн для холодной

плазмы ($nmc^2 \gg \frac{H^2}{8\pi} \gg nT$). Рассматривая этот случай, мы не будем учитывать тепловое движение, так что система уравнений, описывающая движение ионов и электронов и профиль полей в установившейся волне, примет вид ($m_i = M$, $m_e = m$; волна распространяется вдоль оси x , магнитное поле направлено вдоль оси y ; рис. 4):

$$m_{i,e} \dot{v}_{x_{i,e}} (v_{x_{i,e}} - u) = \pm eE_x \pm \frac{e}{c} v_{y_{i,e}} H, \quad (27)$$

$$m_{i,e} \dot{v}_{y_{i,e}} (v_{x_{i,e}} - u) = \pm eE_y \mp \frac{e}{c} v_{x_{i,e}} H, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} E_y &= \frac{u}{c} (H - H_0), \\ -H' &= \frac{4\pi}{c} ne (v_{y,i} - v_{y,e}), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} n_{i,e} &= \frac{n_0 u}{u - v_{i,e}}, \\ n_i &= n_e. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из последнего уравнения, выражающего квазинейтральность, вытекает равенство компонент скорости электронов и ионов вдоль оси x . Исключая из этих уравнений все переменные, кроме H ,

получим (с точностью до членов с $\frac{m}{M}$)

$$\begin{aligned} -\frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2 u} \frac{d}{dx} \left[\frac{dH}{dx} \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) \right] \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) = \\ = \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right) H + uH_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Это уравнение определяет профиль изменения H в исследуемой установившейся волне. Интегрируя один раз, приведем его к виду

$$\begin{aligned} -a^2 H'^2 \left(\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u \right)^2 = \frac{(H^2 - H_0^2)^2 - 16\pi n_0 Mu^2 (H - H_0)^2}{16\pi n_0 M} + C \\ \left(a^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_0 e^2} = \frac{c^2}{\omega_0^2} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Перебирая различные значения C —константы интегрирования, мы получаем различные решения. Удобно проследить за характером решений в зависимости от C , построив интегральные кривые на фазовой плоскости (H, H') . Эти кривые приведены на рис. 5.

Решения уравнения (32) должны описывать периодические волны конечной амплитуды. Исключение составляет решение, соответствующее особому выбору величины C :

$$C = 0.$$

Такой выбор соответствует условию $\frac{dH}{dx} = 0$ при $H = H_0$. Тогда уравнение примет вид

$$\pm a \frac{dH}{dx} = \frac{(H - H_0)}{\frac{H^2 - H_0^2}{8\pi n_0 Mu} - u} \cdot (16\pi n_0 M)^{-1/2} \cdot \sqrt{16\pi n_0 Mu^2 - (H + H_0)^2}. \quad (33)$$

Если выбрать определенный знак перед корнем в равенстве (33), то нельзя построить физически разумное решение для H на всей оси x . Существуют, однако, решения всюду непрерывные (до второй производной включительно), в которых при некоторых $x = x_1$ производная H' меняет знак. В этой точке H достигает своего максимального значения $H_{\text{макс}}$. Уравнение $\frac{dH}{dx}(x_1) = 0$ связывает амплитуду магнитного поля $H_{\text{макс}}$ со скоростью распространения волны и играет роль, аналогичную дисперсионному уравнению

$$16\pi n_0 Mu^2 - (H_{\text{макс}} + H_0)^2 = 0. \quad (34)$$

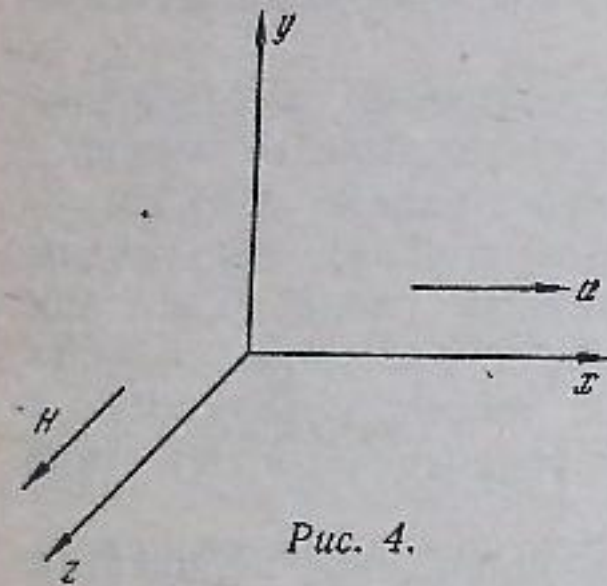


Рис. 4.

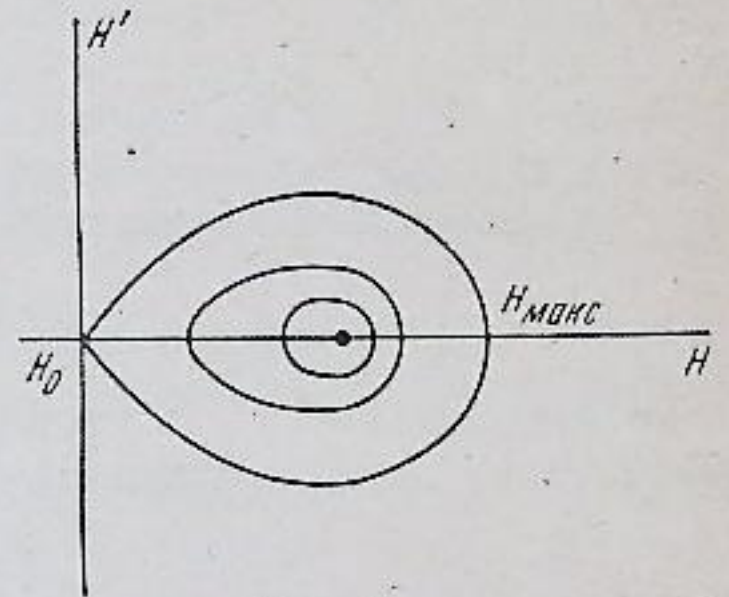


Рис. 5.

Решая уравнение (18) относительно u , получим [12—15]

$$u^2 = \frac{(H_{\text{макс}} + H_0)^2}{16\pi n_0 M} \quad (35)$$

В предельном случае малых амплитуд ($H_{\text{макс}} \rightarrow H_0$) уравнение (35) определяет скорость так называемого магнитного звука. С ростом амплитуды скорость распространения волны возрастает. Интегрирование выражения (33) дает профиль изменения H в такой волне. Профиль решения оказывается симметричным

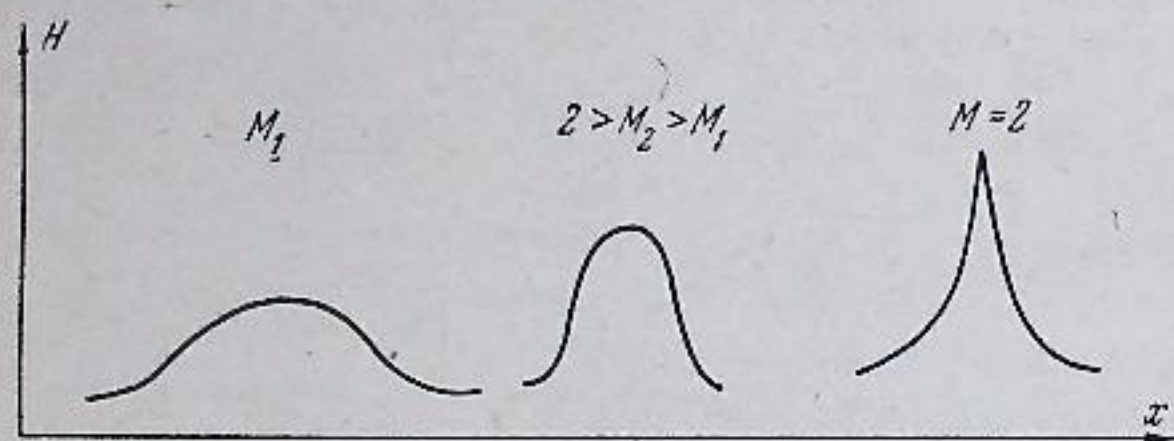


Рис. 6.

относительно $x = x_1$ и представляет собой одиночный импульс магнитного поля с шириной порядка

$$\delta \sim \frac{c}{\omega_0},$$

где

$$\omega_0 = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, решение уравнения (33) должно описывать аналог уединенной волны в разреженной плазме. Простое аналитическое выражение для профиля магнитного поля в уединенной волне легко получить для малых амплитуд ($H_{\text{макс}} - H_0 \ll H_0$). Оно имеет вид

$$H = H_0 \left\{ 1 + 2 \left(\frac{u^2}{\left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^2} - 1 \right) \text{sh}^2 \frac{x}{\frac{c}{\omega_0}} \sqrt{\frac{u^2}{\left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^2} - 1} \right\}. \quad (36)$$

На рис. 6 изображены зависимости $H = H(x)$ для различных значений числа Маха $M = \frac{u}{H_0 \sqrt{4\pi n_0 M}}$.

Уравнение (17) имеет действительное решение не при сколь угодно больших u и H . Так, например, для уединенных волн решения существуют при $H_{\text{макс}} \leq 3H_0$ (т. е. $u \leq 2 \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}}$).

При приближении амплитуды волны к критической, плотность ионов (электронов) на гребне волны стремится к бесконечности. Физически это означает следующее. Уединенная волна представ-

ляет собой «горб» электрического потенциала ϕ . В системе координат, связанной с волной, поток ионов из $x = \infty$ набегаёт на этот потенциальный барьер со скоростью u . При не слишком больших амплитудах начальная кинетическая энергия иона $\frac{Mu^2}{2}$ превышает высоту потенциального барьера $e\phi_{\text{макс}}$ и ионы, несколько задержавшись, переваливают через него. Однако, как следует из решения, с ростом амплитуды волны потенциальный барьер становится настолько высоким, что $e\phi_{\text{макс}} > \frac{Mu^2}{2}$. Момент $e\phi_{\text{макс}} \approx \frac{Mu^2}{2}$ соответствует амплитуде $H_{\text{макс}} = 3H_0$ (иначе говоря, критическое число Маха равно 2). На гребне такой волны ионы, потеряв скорость, «останавливаются», а их плотность возрастает до бесконечности. При еще больших амплитудах ионы просто «отражались» бы от барьера, но соответствующее такой картине движение уже не описывается в рамках нашей исходной системы уравнений (27) — (30), так как после отражения течение становится «многопоточковым» (взаимопроникающие потоки набегающих и отраженных ионов).

Таким образом, мы видим, что эффекты дисперсии не могут остановить «прокидывание» волн с достаточно большой амплитудой в холодной плазме.

Если бы мы учли тепловой разброс скоростей ионов, то даже при малых амплитудах волны могли бы найти ионы, отражающиеся от барьера (это ионы с малой относительной скоростью $u - v_x$), т. е. двигавшиеся первоначально в направлении распространения волны со скоростью, близкой к u ; эти ионы можно назвать «захваченными». Такие ионы отбирают энергию от волны, вызывая ее затухание. Однако мы пока пренебрегаем затуханием. Без учета захваченных ионов легко найти решение для уединенной волны и в более общем виде с учетом теплового разброса, рассматривая функцию распределения ионов по скоростям.

Очень похожий класс нелинейных движений может осуществляться и в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля — это нелинейные ионно-звуковые колебания. Так как из линейной теории известно, что ионный звук имеет место лишь при $T_e \gg T_i$, мы ограничимся этим случаем.

Предположив, что все величины зависят от x и t только в комбинации $x - ut$, систему (22) можно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка для потенциала

$$\phi'' = 4\pi n_0 e \cdot \left\{ \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\phi}{M}}} - \exp\left(\frac{e\phi}{T}\right) \right\}. \quad (37)$$

Интегрируя уравнение (37) один раз, получим

$$-\frac{1}{2} (\phi')^2 = 4\pi n_0 e \left(-\frac{uM}{e} \sqrt{u^2 - \frac{2e\phi}{M}} - \frac{T}{e} \exp\left(\frac{e\phi}{T}\right) \right) + C. \quad (38)$$

В зависимости от выбора константы интегрирования C можно сконструировать различные периодические волны (см. интегральные кривые на фазовой плоскости рис. 7). Особый случай представляет величина C , выбираемая из условия $\varphi' \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$, т. е. $C = 4\pi n_0 (Mu^2 + T)$. На фазовой плоскости этот случай выделен особо. Он соответствует уединенной волне (рис. 8), представляющей собой симметричный «горб» потенциала.

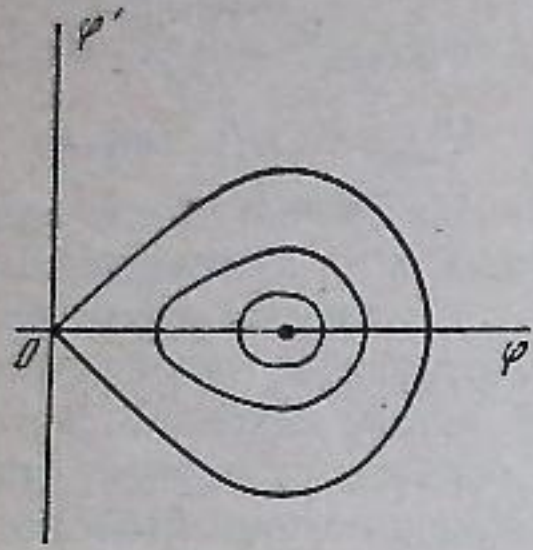


Рис. 7.

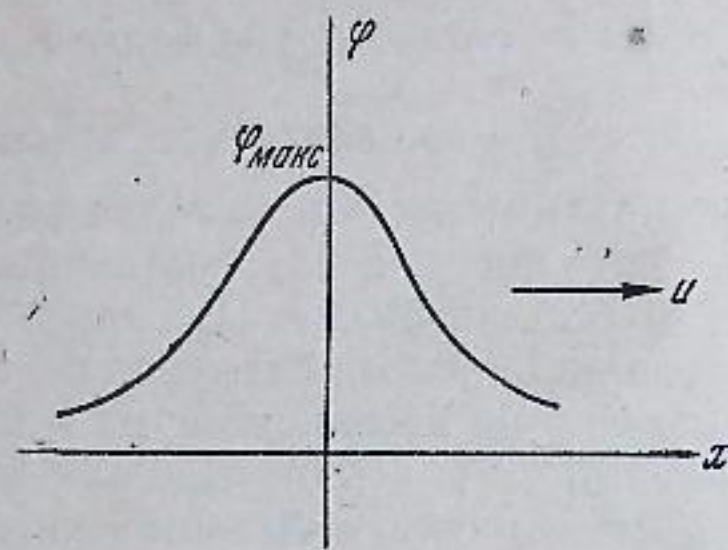


Рис. 8.

Скорость распространения такой волны u как функцию $\varphi_{\text{макс}}$ амплитуды потенциала найдем из выражения (38), полагая $\varphi' = 0$ при $\varphi = \varphi_{\text{макс}}$ [4],

$$u^2 = \frac{T}{2M} \cdot \frac{\left[\exp\left(\frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}\right) - 1 \right]^2}{\exp\left(\frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}\right) - 1 - \frac{e\varphi_{\text{макс}}}{T}}. \quad (39)$$

В предельном случае малых амплитуд ($e\varphi_{\text{макс}} \ll T$) u стремится к скорости изотермического звука $\sqrt{\frac{T}{M}}$. Для малых амплитуд профиль потенциала в уединенной волне имеет вид

$$\varphi \approx \frac{3}{2} \frac{T}{e} \left(1 - \frac{T}{Mu^2}\right) \text{sh}^2 \left\{ \frac{\sqrt{\pi n_0 e}}{\sqrt{T}} \sqrt{1 - \frac{T}{Mu^2}} \cdot x \right\}. \quad (40)$$

Ионные волны тоже существуют не при сколь угодно большой амплитуде. В конце концов наступает момент, когда движение становится многопоточковым. Это происходит по той причине, что ионы оказываются не в состоянии перевалить потенциальный барьер. Амплитуда «уединенной» волны, при которой это происходит, равна $e\varphi_{\text{макс}} = \frac{Mu^2}{2}$. Если для u — скорости волны — воспользоваться выражением (39), то для $\varphi_{\text{макс}}$ получается трансцендентное уравнение. Соответствующий корень оказывается приблизительно равным $e\varphi_{\text{макс}} \approx 1,3 T$. Это и есть критическая амплитуда уединенной волны. Ей соответствует число Маха

$$M = \frac{u}{\left(\frac{T}{M}\right)^{1/2}} \approx 1,6.$$

Таким образом, в обоих рассмотренных выше случаях (магнито-звуковые и ионные волны) мы получили сходную картину установившегося нелинейного движения. Отличие практически заключается лишь в различных пространственных масштабах. Это и неудивительно, ведь соответствующие линейные законы дисперсии для этих случаев [см. уравнения (19) и (21)] очень похожи. Наиболее интересны уединенные волны. Уединенные волны представляют собой особый тип установившихся нелинейных волн. Если периодические волны могут существовать при произвольном законе дисперсии (лишь бы не линейном), то для уединенных волн требуется определенный характер закона дисперсии. Это связано с тем, что, в то время как спектральное разложение периодических волн содержит дискретные ω и k , разложение профиля уединенной волны имеет сплошной спектр. Поэтому рассуждения, использованные в начале этой главы, уже невозможны. Ясно, что для существования стационарной картины в уединенной волне необходимо, чтобы участкам профиля с большими амплитудами скорости соответствовали меньшие скорости распространения волн в линейной теории. Тогда более сильное влияние нелинейности на участки с большей амплитудой скорости

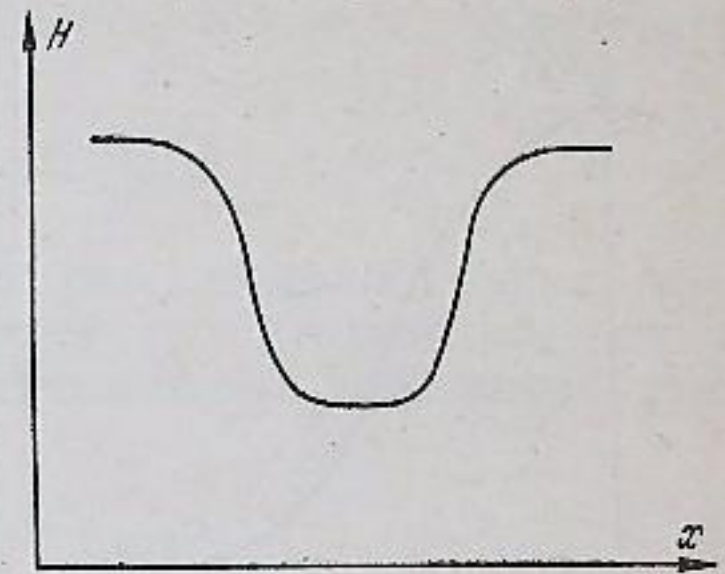


Рис. 9.

будет, грубо говоря, компенсироваться уменьшением $\frac{\partial \omega}{\partial k}$. Такого рода законами дисперсии ($\frac{\partial \omega}{\partial k}$ падает с ростом k) обладают рассмотренные нами магнито-звуковые волны и «ионный» звук в плазме при $T_e \gg T_i$. Такое же свойство имеет закон дисперсии для волн на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины.

Волны с обратным законом дисперсии, для которых $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ растет с ростом k , должны в нелинейном случае формировать уединенные волны «разрежения» (рис. 9), в отличие от волн «уплотнения», как в предыдущем случае. Такой закон дисперсии справедлив, например, для волны поперек магнитного поля в плазме высокого давления. Отыскание профиля подобных волн и установление связи между скоростью волны и амплитудой магнитного поля не представляет труда. Однако мы уже выяснили характерные физические особенности нелинейных незатухающих волн, а теперь перейдем к изучению различных механизмов затухания таких волн.

3. В разреженной плазме, помимо обычных механизмов затухания, связанных с переходом энергии упорядоченного движения в тепло при соударениях частиц, существует «затухание без столкновений». Оно связано с «захваченными» частицами, т. е. частицами, имеющими скорости движения, близкие к фазовой скорости волны. Мы исследуем это явление на простейшем примере электронных ленгмюровских волн. При этом качественная картина останется справедливой для любых типов волн. Волны очень малой амплитуды, рассмотренные Л. Д. Ландау [3], как известно, затухают, если функция распределения резонансных частиц

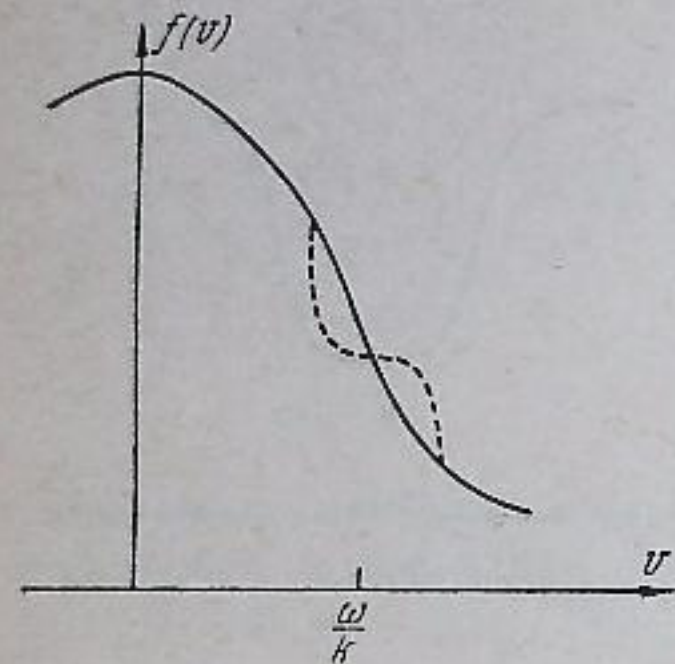


Рис. 10.

убывает, т. е. $\frac{df}{dv} < 0$ для $v = \frac{\omega}{k}$.

Это связано с тем, что более быстрые частицы замедляются, а более медленные — ускоряются волной. Если в резонансе быстрых частиц меньше, чем медленных, то волна затухает. Практически линейная теория быстро становится неприменимой, так как в процессе затухания вид $f(v)$ меняется. Так, в «квазилинейной» теории искажение функции распределения описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} D \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (41)$$

где $D \sim E^2$ и особенно велико для резонансных частиц.

Согласно уравнению (41) резонансные частицы перераспределяются, и на графике функции распределения (рис. 10) образуется плато $\frac{df}{dv} \rightarrow 0$ [уравнение (41) аналогично уравнению теплопроводности в неоднородной среде]. Это означает, что наступает насыщение и затухание прекращается. Однако столкновения, хотя и редкие, постепенно «сглаживают» края плато и устанавливают квазистационарное состояние, в котором $\frac{df}{dv}$ слегка отрицательно от нуля ($\frac{df}{dv} < 0$). Чтобы найти его величину и тем самым затухание, нужно в уравнение (41) ввести столкновительный член. Ясно, что чем больше амплитуда колебаний, тем сильнее их релаксирующее действие на вид функции распределения в окрестности $v \approx \frac{\omega}{k}$. Следовательно, можно ожидать, что величина декремента затухания $\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt}$ (ε — энергия волны), пропорциональная $\frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right)$, с ростом ε будет падать. Ста-

ционарный наклон $\frac{df}{dv}$ найдем из уравнения

$$\frac{d}{dv} D \frac{df}{dv} = \text{Sh}(f), \quad (42)$$

где для резонансных частиц ($v \approx \frac{\omega}{k}$) выражение для квазилинейного коэффициента диффузии D можно упростить

$$D(v) = \sum_k \frac{e^2}{m^2} E_k^2 \text{Im}(\omega + kv)^{-1} \sim \frac{e^2 E^2}{m^2 \omega}. \quad (43)$$

В выражении для $\text{St}(f)$ удержим старший член, содержащий вторую производную

$$\text{St}(f) \approx v_{\text{ст}} \cdot \frac{T}{m} \frac{d^2(f_0 - f)}{dv^2},$$

где f_0 — максвелловская функция распределения. Такая упрощенная форма «интеграла столкновений» учитывает восстановление локального равновесного распределения. Интегрируя уравнение (42) один раз, получим

$$\frac{df}{dv} = \frac{df_0}{dv} \cdot \frac{1}{1 + \frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{ст}}}}. \quad (44)$$

Из этого выражения видно, что для волн малой амплитуды $\frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{ст}}} < 1$ декремент затухания

$$v = \frac{\pi \omega_0}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right) \rightarrow \frac{\pi \omega_0}{2} \cdot \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{df}{dv} \left(v = \frac{\omega}{k} \right) \equiv v_0$$

стремится к v_0 -декременту затухания Ландау. Однако при амплитудах $\frac{e^2 E^2}{m \omega T v_{\text{ст}}} > 1$ линейная теория уже неприменима. Декремент затухания для таких волн, как следует из выражения (44), должен падать с ростом амплитуды, как E^{-2} .

То, что было проделано выше, справедливо только для затухания колебаний, представляющих собой достаточно широкие волновые пакеты, так как мы воспользовались квазилинейной теорией. Для монохроматической волны с одним ω и k выражение (44) уже неприменимо, и нужно было бы провести специальное рассмотрение. Мы ограничимся здесь лишь полуколичественной оценкой для того, чтобы установить зависимость инкремента от амплитуды. Формулу (44) можно интерпретировать следующим образом: представим ее в виде $v = v_0 / (1 + \tau_1 / \tau_2)$. Здесь v_0 — декремент, получаемый в линейном приближении (затухание Ландау); τ_1 — характерное время установления локального максвелловского распределения; τ_2 — характерное время искажения функции распределения под действием поля волнового пакета. Если $\tau_1 \ll \tau_2$ (за счет столкновения успевает устанавливаться

максвелловская функция распределения), мы получаем обычное затухание Ландау. С ростом амплитуды волны искажение, вносимое ею, становится настолько большим, что столкновения не успевают установить максвелловскую функцию распределения, и декремент затухания уменьшается. Путем подобной интерпретации можно оценить поглощение и для монохроматической волны, если выбрать правильно τ_1 и τ_2 . Пусть амплитуда потенциала в волне φ , тогда ответственными за поглощение будут частицы со скоростями относительно волны порядка $\pm \sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$. Это значит, что наиболее сильно искажается функция распределения в области Δv с шириной порядка $\pm \sqrt{\frac{e\varphi}{m}}$. Из-за кулоновских столкновений с рассеянием на малые углы локальное равновесие в этой области будет восстанавливаться, очевидно, за время $\tau_1 \sim \frac{e\varphi}{v_{ст}T}$. Время же нелинейного искажения под действием поля волны имеет порядок $\tau_2 \sim \frac{\lambda}{\sqrt{e\varphi/m}}$, где λ — длина волны. Окончательно получим [4]

$$v = \frac{v_0}{1 + \frac{(e\varphi)^{3/2}}{T\lambda v_{ст} \sqrt{m}}} \quad (45)$$

Значит, для монохроматической волны с ростом амплитуды декремент затухания падает как $E^{-3/2}$. Строгое рассмотрение подтверждает эту зависимость [16].

4. Из этих результатов можно сделать вывод, что нелинейные волны в разреженной плазме затухают очень медленно, как только происходит «релаксация» в распределении резонансных частиц, ответственных за затухание. Тем не менее это еще не гарантирует того, что, раз возникнув, нелинейные установившиеся волны могут долго существовать. Надо еще выяснить, устойчивы ли они по отношению к различным случайным искажениям. Если они окажутся неустойчивыми, то это будет означать переход их энергии в какие-то другие виды движения плазмы, возможно, в беспорядочное турбулентное движение. Тогда можно было бы говорить об эффективном затухании. Ясно, что распространение в разреженной плазме достаточно больших возмущений должно сопровождаться заметным отклонением плазмы от термодинамического равновесия, что и может привести к неустойчивости.

Рассмотрим, например, установившуюся уединенную волну, распространяющуюся поперек магнитного поля в холодной плазме ($nT \ll \frac{H^2}{8\pi}$). Вернемся снова к картине движения ионов и электронов плазмы в такой волне. Если $\frac{H^2}{8\pi} \ll nmc^2$, плазма квазинейтральна. В направлении распространения волны и ионы и электроны движутся с одинаковыми скоростями. Однако элек-

трический ток в направлении, перпендикулярном к скорости волны и к магнитному полю, создается только электронами. В однородной плазме, как известно, наличие заметного относительного движения ионов и электронов приводит к так называемой «лучковой» неустойчивости. Ясно, что аналогичный эффект можно ожидать и здесь. Задача упростится, если при рассмотрении малых отклонений от стационарной картины уединенной волны пренебречь членами, учитывающими невозмущенное движение плазмы в направлении x . Очевидно, это справедливо в том случае, когда время развития неустойчивости значительно меньше времени «прохождения» плазмой области уединенной волны. Последнее по порядку величины равно, очевидно, $\frac{\delta \sqrt{4\pi nM}}{H}$, где

δ — «ширина» волны. Эту задачу нетрудно решить, если возмущенное движение ионов и электронов рассматривать для простоты как движение двух «жидкостей» с адиабатическими законами изменения давления. Влияние магнитного поля на возмущенное движение учитывать не будем, ограничиваясь частотами колебаний, которые значительно больше ларморовской частоты электронов ω_{He} . В этом приближении уравнения для возмущенных величин v_e (скорость электронов); v_i (скорость ионов); n_e, n_i (плотность электронов и ионов) и φ (электрический потенциал) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} i(\omega + kv_0)v &= \nabla \frac{e}{m} \varphi - \nabla \frac{T}{mn_0} n; \\ i\omega V &= -\nabla \frac{e}{M} \varphi; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} i(\omega + kv_0)n_e + ikn_0v_y + \frac{d}{dx}(n_0v_x) &= 0; \\ i\omega n_i + \frac{d}{dx}(n_0V_x) + ikn_0V_y &= 0; \\ -k^2\varphi + \varphi'' &= 4\pi e(n_e - n_i). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Здесь уравнения (46) — уравнения движения для электронов и ионов, (47) — уравнения непрерывности для электронов и ионов, а также уравнение Пуассона для электрического поля. Мы сразу выбрали зависимость возмущенных величин в виде $\varphi(x) e^{i(\omega t + ky)}$. Входящие в уравнения v_0, T и n_0 представляют собой зависящие от x невозмущенные среднюю скорость электронов (по оси y), температуру электронов (ионы для простоты будем считать холодными) и плотность плазмы. В предположении, что производные по x от возмущенных величин значительно больше производных от невозмущенных («квазиклассическое» приближение), эта система уравнений сводится к одному дифференциальному уравне-

нию второго порядка для величин n_e :

$$\frac{T}{m} \frac{d^2 n_e}{dx^2} + \left[(\omega + kv_0)^2 - \frac{T}{m} k^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \right] n_e = 0. \quad (48)$$

Исследование устойчивости сводится к задаче о собственных значениях для уравнения (48). С помощью граничных условий выбираются решения, убывающие в обе стороны от уединенной волны.

Исследуем поведение функции

$$F(x, \omega, k) = (\omega + kv_0)^2 - \frac{T}{m} k^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}.$$

В однородной плазме эта функция не зависела бы от x и дисперсионное уравнение, связывающее ω и k , имело бы вид

$$F(\omega, k) = 0. \quad (49)$$

Это уравнение дает неустойчивые решения, когда $v_0^2 > \frac{T}{m}$, т. е. когда средняя скорость относительного движения ионов и электронов превышает тепловую скорость электронов. Для не очень больших k ($k^2 \ll \frac{\omega_0^2}{T} m$) это уравнение приближенно можно записать как

$$F(\omega, k) \approx k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right) - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = 0.$$

Отсюда находим

$$\omega^2 = \frac{\Omega_0^2 k^2 \left(\frac{T}{m} - v_0^2 \right)}{\omega_0^2 - k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right)};$$

при $v_0^2 > \frac{T}{m}$ ω становится мнимым (неустойчивость). Возвращаясь к нашей неоднородной задаче, рассмотрим пространственный ход функции $F(x, \omega, k) \approx k^2 \left(v_0^2 - \frac{T}{m} \right) - \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ (в этом приближении достаточно рассматривать действительные ω^2). Для наглядности изобразим (рис. 11) профиль изменения v_0 и ω_0^2 в уединенной волне как функцию x . В области, где $v_0^2 > \frac{T}{m}$, т. е. $F(x, \omega, k) > 0$, для n_e имеется осциллирующее решение. Вдали от уединенной волны $F(x, \omega, k) < 0$, что соответствует экспоненциально затухающим решениям. В точках «поворота», где $F(x, \omega, k) = 0$, эти решения «сшиваются». Итак, нужные

локальные решения всегда существуют, а неустойчивость появляется в том случае, если внутри уединенной волны имеется область, где $v_0^2 > \frac{T}{m}$. Инкременты нарастания такой неустойчивости, как известно, имеют порядок Ω_0 (в плазме «нулевой» температуры максимальный инкремент еще больше $\Omega_0 \left(\frac{M}{m} \right)^{1/6}$). При получении этих результатов было сделано несколько упрощающих предположений. В общем случае задача несколько усложняется: уравнение, соответствующее уравнению (48), становится четвертого порядка; точки «сшивки» смещаются в комплексную плоскость x . Однако условие неустойчивости $v_0^2 > \frac{T}{m}$ остается неизменным.

Амплитуда v_0 в уединенной волне увеличивается с ростом числа Маха M ($M = \frac{u \sqrt{4\pi n_0 M}}{H_0}$). Наконец, при некотором значении числа Маха ($M = M^*$) амплитуда v_0 превысит среднюю тепловую скорость электронов, т. е. волна станет неустойчивой. Если воспользоваться решением задачи о профиле уединенной волны, которое было приведено ранее, можно убедиться, что для холодной плазмы ($nT \ll \frac{H_0^2}{8\pi}$)

$$M^* \approx 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{8\pi n_0 T}{H_0^2} \right)^{1/3}. \quad (50)$$

По существу все это означает, что для неоднородных задач можно, соблюдая известную осторожность, применять критерии «пучковой» неустойчивости в однородной плазме. Проверим теперь, удовлетворяется ли исходное предположение о том, что время развития неустойчивости значительно меньше времени «прохождения» плазмой области уединенной волны $\frac{c}{\omega_0} \cdot \left(\frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}} \right)^{-1} \gg \nu^{-1}$.

Подставляя $\nu \sim \Omega_0$, получим $H_0^2 \ll 4\pi n_0 m c^2$.

Развитие пучковой неустойчивости, влияя на исходную нелинейную волну, должно вызывать эффективное затухание последней — энергия упорядоченного движения электронов в нелинейной волне переходит в энергию беспорядочных ленгмюровских электронных колебаний. В этом смысле влияние такого рода неустойчивости можно трактовать как силу трения электронов об ионы, имеющую коллективную природу [4, 17, 18].

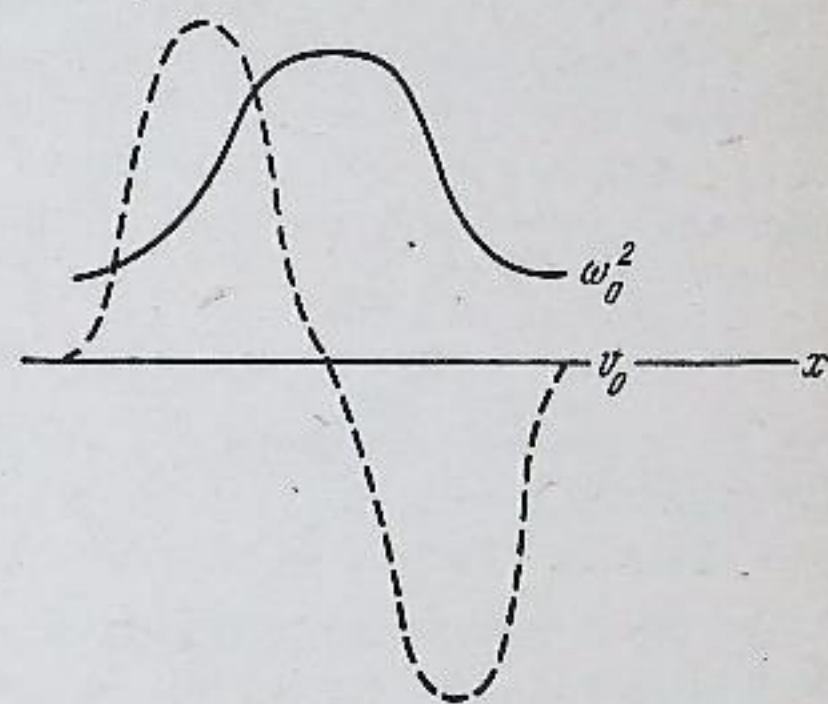


Рис. 11.

Хотя мы применяли рассмотренную неустойчивость лишь к уединенным установившимся волнам, ясно, что такая же ситуация может возникнуть и для других волн в плазме с магнитным полем. Тем не менее «пучковая» неустойчивость все же относится к довольно узкому классу задач. Более общий характер имеют так называемые «распадные» неустойчивости, которые могут наблюдаться у периодических нелинейных волн [19].

Начнем с некоторых общих замечаний. При изучении устойчивости нелинейных стационарных волн (которые для краткости будем называть «фоном») удобно перейти к системе координат, движущейся вместе с волной. Коэффициенты в линеаризованных уравнениях, описывающих поведение малых отклонений от «фона», не зависят от времени, и зависимость решений этих уравнений от времени можно выбрать в виде $e^{i\omega t}$. Задача сводится к решению системы уравнений, которая символически может быть записана в виде

$$\hat{L}\varphi = 0, \quad (51)$$

где \hat{L} — некоторый линейный дифференциальный оператор. Конкретный вид оператора зависит от «фона» и собственной частоты ω , в отыскании которой и заключается исследование устойчивости. Оператор \hat{L} можно представить в виде суммы \hat{L}_0 и \hat{L}_1 , где \hat{L}_0 — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а \hat{L}_1 — дифференциальный оператор, стремящийся к нулю вместе со стремлением к нулю амплитуды, исследуемой на устойчивость стационарной волны. Для волн конечной, но малой амплитуды \hat{L}_1 мало и естественно воспользоваться теорией возмущений. В нулевом приближении¹ уравнение

$$\hat{L}_0\varphi = 0 \quad (52)$$

описывает колебания однородной плазмы с собственными функциями, пропорциональными e^{ikr} , и собственными значениями ω , удовлетворяющими дисперсионному уравнению $\omega = \omega(k)$. В первом приближении по \hat{L}_1 появляются диагональные матричные элементы $\langle \varphi_\omega | \hat{L}_1 | \varphi_\omega \rangle$, причем пространственная зависимость \hat{L}_1 определяется множителями $e^{\pm i \cdot k_0 \cdot r}$. Ясно, что матричные элементы обращаются в нуль, если каждому значению частоты ω соответствует лишь одно значение модуля волнового вектора k . Первое приближение теории возмущений дает исчезающий вклад лишь в том случае, если существуют «вырожденные» состояния, для которых одному ω соответствует по меньшей мере два волно-

¹ В гидродинамическом приближении в пренебрежении диссипацией \hat{L}_0 самосопряженный оператор и его собственные функции должны соответствовать незатухающим волнам.

вых вектора (k_1 и k_2). В этом случае между k_1 и k_2 должно выполняться следующее соотношение:

$$k_1 = k_0 + k_2, \quad (53)$$

а принадлежность их к одной и той же частоте запишем в виде $\omega_1 = \omega_2$. Если вернемся теперь от системы координат, движущейся вместе с волной, в лабораторную систему координат, частоты ω_1 и ω_2 будут уже разными. При этом будет выполняться условие

$$\Omega_1 = \Omega_0 + \Omega_2, \quad (54)$$

где Ω_0 — частота колебаний фона ($\Omega_0 = k_0 u$), а Ω_1 и Ω_2 — частоты, соответствующие волновым векторам k_1 и k_2 ($\Omega_1 = \omega_1 + k_1 u$; $\Omega_2 = \omega_2 + k_2 u$). Условия (53) и (54) можно трактовать как законы сохранения квазиэнергии и квазиимпульса при взаимодействии («распадах») квазичастиц волн. Поэтому в дальнейшем будем называть их распадными условиями, а неустойчивость, возникающую при этом, распадом колебания с частотой Ω_0 и волновым вектором k_0 на колебания с частотами Ω_1 и Ω_2 и волновыми векторами k_1 и k_2 . Распадные условия выполняются не для любых законов дисперсии $\omega(k)$. На рис. 12 изображены кривые, соответствующие различным формам спектров.

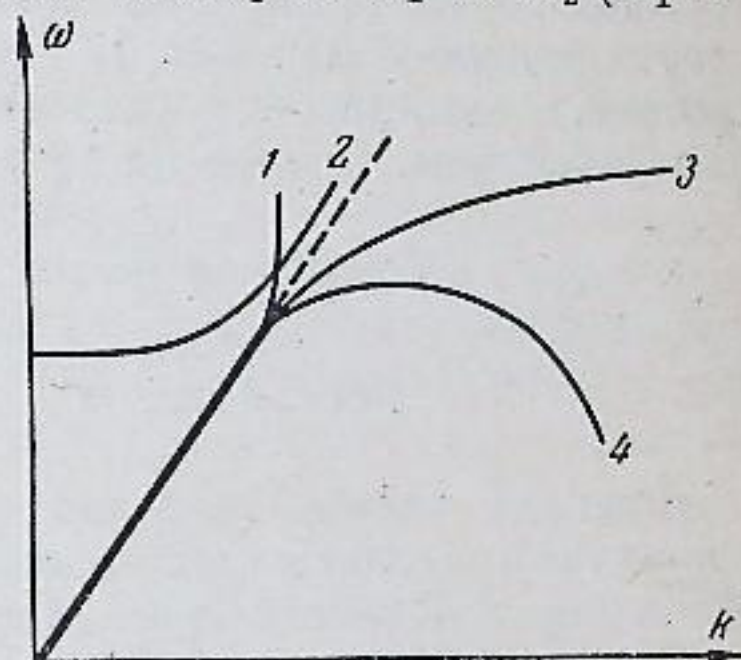


Рис. 12.

Легко показать, что распады колебаний могут происходить лишь для спектров 1 и 4. Колебания, имеющие спектры, подобные спектрам 2 и 3, устойчивы по отношению к распадам. Однако при наличии нескольких ветвей в спектре колебаний, характеризующие спектрами, аналогичными спектрам 2, могут быть неустойчивыми по отношению к распадам на колебания, из которых хотя бы одно не принадлежит данной ветви. Более точно: распады возможны тогда, когда через три точки, соответствующие колебаниям Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 (эти три точки, вообще говоря, могут лежать на разных ветвях), можно провести кривую, подобную либо кривой 1, либо кривой 3 (для разных ветвей спектров могут, однако, возникнуть «запреты», связанные с поляризацией волн). Но выполнение «распадных» условий само по себе еще не означает неустойчивости. Если подсчитать поправку к частоте из первого приближения теории возмущений, окажется, что либо она мнимая, т. е. действительно имеется неустойчивость, либо действительная, т. е. возникает лишь сдвиг частоты. Что же именно происходит, нужно исследовать в каждом конкретном

случае. Величины A_i , характеризующие рассматриваемый «фон», могут быть записаны в виде

$$A_i = A_{i0} + 2\delta(k_0) \sin k_0 r + O(\delta A_i^2),$$

где k_0 — волновой вектор. В дальнейшем мы не будем учитывать слагаемое $O(\delta A_i^2)$, иными словами, будем исследовать устойчивость основной гармоники, учитывая взаимодействие ее с малыми отклонениями от фона. С этой целью рассмотрим прежде всего, в каких случаях могут быть выполнены распадные условия.

Рассмотрим сначала простейший случай — плазма без магнитного поля. В такой плазме имеется две ветви колебаний: электронные продольные колебания и ионный звук (при $T_e \gg T_i$). Электронные колебания принадлежат к виду, спектр которого соответствует кривой 2 (см. рис. 12), ионные — к виду, спектр которого соответствует кривой 3, следовательно, сами по себе эти колебания устойчивы. Однако не запрещены перекрестные распады

$$\begin{array}{l} \text{электронная волна} \left\{ \begin{array}{l} \text{электронная волна} \\ \text{ионная волна} \end{array} \right. \\ \text{ионная волна} \left\{ \begin{array}{l} \text{электронная волна} \\ \text{электронная волна} \end{array} \right. \end{array}$$

«Распад» электронной продольной волны на электронную и ионную продольные волны является одним из простейших примеров неустойчивости «распадного» типа. Уравнения для малых возмущений имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) v_i - \frac{e}{M} E &= -2\delta v_i \frac{\partial}{\partial x} (v_i \sin k_0 x); \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) n_i + n_0 \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \{ (n_i \delta v_i + \\ &+ v_i \delta n_i) \sin k_0 x \}; \\ eE + \frac{T}{n_0} \frac{\partial n_e}{\partial x} &= 2 \frac{T}{n_0^2} \frac{\partial}{\partial x} (n_e \delta n_e \sin k_0 x) \end{aligned} \quad (55)$$

(эта система уравнений будет описывать ионную волну). Здесь v_i , n_i , e — скорость и плотность ионов (электронов).

Для электронной волны гидродинамические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) v_e + \frac{e}{m} E + \frac{1}{mn_0} \frac{\partial p_e}{\partial x} &= -2\delta v_e \frac{\partial}{\partial x} (v_e \sin k_0 x) + \\ &+ \frac{\gamma p_0}{mn_0^2} \cdot 2\delta n_e \frac{\partial}{\partial x} (n_e \sin k_0 x); \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) n_e + n_0 \frac{\partial v_e}{\partial x} &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \{ (n_e \delta v_e + v_e \delta n_e) \sin k_0 x \}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(p_e - \gamma \frac{p_0}{n_0} n_e\right) &= 2\gamma(\gamma - 1) \frac{p_0 \delta n_e}{n_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \\ &\times (n_e \sin k_0 x); \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -4\pi e n_e, \end{aligned}$$

где v_e — скорость электронов, γ — показатель адиабаты для электронов, который можно в одномерном случае принять равным 3; p_e — давление электронов; δv , δn — амплитуды скорости и плотности электронов и ионов в исходной электронной волне, исследуемой на устойчивость. Здесь мы для простоты ограничились одномерным случаем, т. е. предположили, что величины, описывающие динамику малых отклонений от «фона», зависят лишь от времени и координаты x (ось x направлена вдоль k_0).

Итак, в соответствии с намеченной схемой исследования устойчивости, ищем возмущение в виде суперпозиции $C_i e^{i(\omega + k_1 x)} + C_e e^{i(\omega + k_2 x)}$ ионной и электронной волн. В нулевом приближении они независимы, а при учете правых частей в уравнениях (55), (56) между ними появляется связь. Из условия разрешимости системы уравнений для C_i и C_e после простых, но довольно громоздких выкладок можно получить выражение для квадрата мнимой части частоты

$$\nu^2 \approx \left(\frac{\delta v_e}{u}\right)^2 \frac{k_2 u}{4} \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \left\{ \Omega_2 + (\gamma - 2) k_2 v_T \frac{v_T}{u} \right\}, \quad (57)$$

где $v_T = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{n_0 m}}$ и Ω_1 , Ω_2 — частоты ионных и электронных колебаний в лабораторной системе координат.

Распадные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \pm |k_1| &= k_0 \pm |k_2|, \\ \pm k_1 u_i &= \sqrt{\omega_0^2 + k_2^2 v_T^2} - \sqrt{\omega_0^2 + k_0^2 v_T^2}, \end{aligned} \quad (58)$$

где $u_i = \sqrt{\frac{p_0}{n_0 M}}$.

Используя выражения (57) и (58), можно показать, что $-\nu^2 > 0$, т. е. электронные продольные колебания неустойчивы по отношению к распаду на ионные и электронные продольные колебания. Наиболее неустойчивы достаточно коротковолновые колебания ($k_0 \lesssim \kappa$; $\frac{1}{\kappa}$ — дебаевский радиус). Для них

$$\nu_{\text{макс}} \sim \frac{\delta v}{u} \sqrt{\frac{m}{M}} \cdot \omega_0. \quad (59)$$

Выше все вычисления проводились в гидродинамическом приближении, т. е. тепловое движение электронов учитывалось лишь включением электронного давления. Как известно, учет теплового движения приводит также к появлению затухания волн. Затухания электронных волн можно не учитывать, если волновой вектор

$k \ll \kappa$. Для ионных волн затухание не является экспоненциально малым эффектом, а потому неустойчивость фона фактически будет определяться неравенством $\nu > \nu_i$, где ν_i — декремент затухания ионных колебаний. Как известно (см., например, [20]), при $P_i \ll P_e$

$$\nu_i \cong \sqrt{\frac{\pi}{8}} \Omega_1 \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (60)$$

Сравнивая это выражение, например, с формулой (59), получаем, что колебания, для которых амплитуды удовлетворяют неравенству $\frac{\delta v}{u} > \left(\frac{m}{M}\right)^{3/4}$, будут неустойчивы. Отметим, что, как видно из выражений (57) и (58), при распаде возникают электронные колебания с частотами, меньшими частот фона.

Исследуя аналогично второй случай перекрестного распада, можно убедиться, что ионные волны устойчивы: связь между C_1 и C_2 приводит лишь к сдвигу частоты. Поступая подобно тому, как было показано для первого случая, можно исследовать устойчивость различного типа нелинейных периодических волн не слишком большой амплитуды и в плазме, находящейся в магнитном поле. В одной из работ [21] такое исследование было проделано с альфвеновскими магнитогидродинамическими волнами. Известно, что в магнитной гидродинамике (и притом не только в несжимаемой жидкости, но и в газе) альфвеновские волны являются точным решением нелинейных уравнений. Поэтому могло возникнуть представление, что эти волны существуют неограниченно долго без изменения формы. Анализ показал, однако, что альфвеновская волна «распадается» на сумму двух волн: альфвеновской и медленной магнитозвуковой (или быстрой магнитозвуковой и медленной магнитозвуковой). Инкременты «распадной» неустойчивости пропорциональны первой степени амплитуды исходной нелинейной волны. Поэтому волны малой амплитуды могут существовать длительное время, не распадаясь.

Более тонкое исследование уравнений $\hat{L}_0 \varphi = \hat{L}_1 \varphi$, получающихся при анализе распадной неустойчивости, показывает, что по виду закона дисперсии можно угадать, будет ли поправка к частоте мнимой (неустойчивость) или действительной (сдвиг частоты). Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|, |\Omega_2|$, то при выполнении условий распада (53) и (54) исходная волна с частотой Ω_0 неустойчива. Как будет видно ниже, «распадная» неустойчивость играет важную роль в теории бесстолкновительных ударных волн, к изложению которой мы сейчас перейдем.

§ 3. Ударные волны в сильно разреженной плазме

В обширной литературе по этому вопросу, накопившейся за последние несколько лет, встречаются совершенно различные, казалось бы, даже противоречащие друг другу утверждения.

В первом приближении можно разделить их на две группы противоположных точек зрения:

- 1) ударные волны с толщиной, значительно меньшей длины свободного пробега, существуют, причем все происходящее внутри фронта в принципе можно описать в рамках ламинарной теории (на языке упорядоченных нелинейных колебаний);
- 2) процесс аномальной диссипации во фронте ударной волны связан с плазменной турбулентностью.

Наконец, существовала еще и третья, негативная точка зрения, что таких ударных волн вообще не существует. В аргументации сторонников различных теорий были слабые места, не позволяющие сделать однозначный выбор той или иной теории. Так, в турбулентной теории неясен был механизм неустойчивости, приводящий к переходу в турбулентное состояние. Внутри самой ламинарной теории не было единства — зачастую приводились, казалось бы, противоречащие друг другу результаты.

Естественный путь построения теории ударной волны без столкновений должен быть таким. Сначала строится ламинарная теория, основанная на представлении о регулярных колебаниях (для этого нам окажется достаточным взять за основу сведения, приведенные в предыдущей главе), затем исследуется устойчивость таких решений. Наконец, в неустойчивых случаях (а также тогда, когда ламинарных решений вообще не существует) строится «турбулентная» теория.

1. Ламинарная теория строится весьма легко: достаточно лишь учесть влияние затухания на характер нелинейных установившихся волн. В отсутствие затухания эти волны описывали обратимые движения. Так, состояние плазмы до и после прохождения уединенной волны оказывалось одним и тем же. Ясно, что учет диссипации должен нарушить обратимость, и состояния плазмы до и после уединенной волны будут различны. Если воспользоваться для нелинейных движений плазмы уравнениями сохранения потоков массы, импульса и энергии, то для установившихся движений эти уравнения, по определению, должны связывать состояния, подчиняющиеся уравнениям адиабаты Гюгонио. Состояния до и после уединенной волны без учета затухания тривиально удовлетворяют адиабате Гюгонио. Как изменится форма уединенной волны, если учесть диссипацию? Состояние после прохождения уединенной волны должно отличаться от исходного, причем различие это, конечно, определяется конкретным механизмом и величиной диссипации.

С другой стороны, адиабата Гюгонио не зависит от диссипации. В теории толщины ударной волны в обычной газодинамике этот кажущийся парадокс разрешается тем, что в зависимости от коэффициентов вязкости, теплопроводности и других величин, характеризующих диссипацию, меняется и сама форма переходной зоны (ее толщина). В разреженной же плазме «толщина» уединенной волны (при малой диссипации) задается независимо

от адиабаты Гюгонио дисперсионными свойствами. Решение кажущегося парадокса в случае разреженной плазмы заключается в том, что после прохождения уединенной волны состояние плазмы остается «возмущенным»: в плазме остаются интенсивные колебания, вклад которых в потоки импульса и энергии нужно учитывать. Это означает, что внутри фронта ударной волны самопроизвольно нарастают регулярные колебания конечной амплитуды. Как известно, толщина фронта слабой ударной волны в обычных газах значительно превышает длину свободного пробега. Это обстоятельство позволяет для исследования структуры фронта применять уравнения газодинамики с учетом диссипативных эффектов.

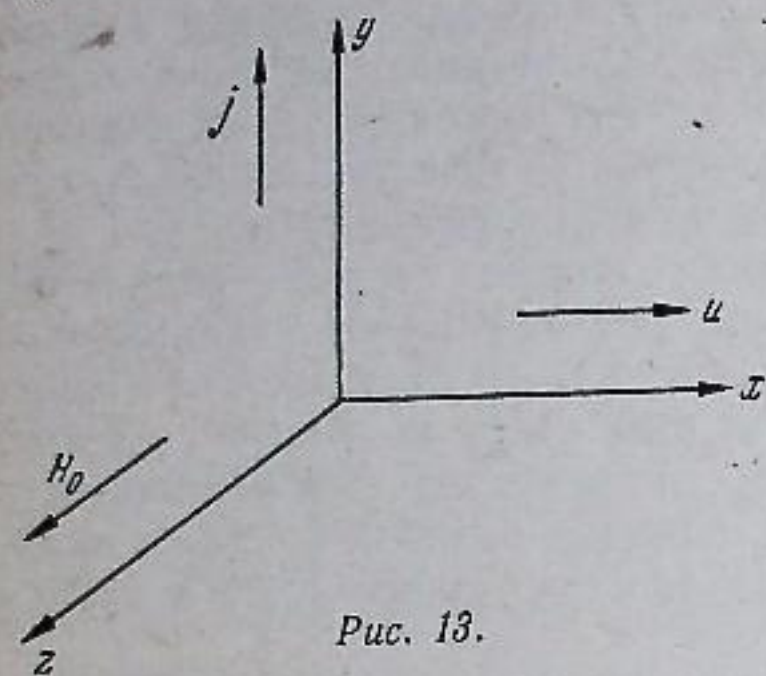


Рис. 13.

Начнем наше рассмотрение с ударных волн в плазме в магнитном поле. В случае разреженной плазмы, находящейся в магнитном поле, когда длина свободного пробега значительно больше среднего ларморовского радиуса ионов, формальное газодинамическое описание применимо (для движений поперек силовых линий) внутри пространственных областей, меньших свободного пробега. Необходимо только, чтобы все величины мало менялись на расстоянии порядка ларморовского радиуса. Рассматривая структуру фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме, будем считать, что всюду внутри фронта выполнено условие малости ларморовского радиуса по сравнению с любым характерным размером. Для этого необходимо выполнение условия малости амплитуды волны. Рассмотрим сначала более простой случай «холодной» плазмы ($\rho \ll \frac{H^2}{8\pi}$).

В качестве механизма затухания возьмем сначала джоулево нагревание за счет столкновений между ионами и электронами (как мы увидим ниже, конкретная величина затухания будет носить в данной задаче чисто символический характер). Наша задача заключается в том, чтобы составить систему дифференциальных уравнений для величин, характеризующих плазму и самосоглазованные электромагнитные поля внутри фронта ударной волны, и исследовать ее. Введем систему координат, в которой фронт волны покоится; магнитное поле направим по оси z ; zy пусть является плоскостью фронта. Электрический ток будет переноситься электронами в направлении y (рис. 13). Инерция электронов в этом направлении будет существенно влиять на структуру фронта. Наконец, для простоты примем, что внутри фронта вы-

полняется условие квазинейтральности $n_i = n_e$, где $n_{i,e}$ — плотность числа ионов (электронов) в соответствии с аналогичной задачей о незатухающих нелинейных колебаниях поперек магнитного поля (см. § 2).

В набор величин, определяющих плазму и поля, входят: n , H , v — скорость плазмы в направлении распространения волны, v_y — скорость электронов, переносящих ток; E_y — напряженность электрического поля вдоль оси y (поле вдоль оси E_x не входит в уравнения из-за квазинейтральности). Для этих шести неизвестных имеется шесть уравнений: а) уравнение сохранения потока частиц; б) уравнение сохранения потока импульса; в) уравнение сохранения потока энергии; г) уравнение движения электронов в направлении переноса электрического тока — по оси y ; д) и е) уравнения Максвелла для соответствующих компонентов роторов E и H . Исходную систему — шесть уравнений — после несложных преобразований можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка для одной из переменных, например H . Однако поскольку вся схема газодинамического приближения справедлива лишь для слабых ударных волн, можно с самого начала упростить уравнения. Действительно, в слабой волне, распространяющейся по холодной плазме, перепад давления плазмы будет величиной пренебрежимо малой по сравнению с перепадом магнитного поля: $\frac{p}{H_0^2} \ll \frac{H - H_0}{H_0}$. Тогда из

уравнения сохранения потока импульса скорость плазмы v непосредственно выражается через H . Нам теперь нет надобности пользоваться уравнением сохранения потока энергии, так как в остальные уравнения p явно не входит (исходная система уравнений расщепляется). Выпишем эти уравнения с учетом сделанных приближений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} nv &= 0; \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{Mnv^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0; \\ mnv \frac{dv_y}{dx} &= -enE_y + \frac{e}{c} nvH - \bar{v} mnv_y; \\ \frac{dE_y}{dx} &= 0; \\ \frac{dH}{dx} &= \frac{4\pi ne}{e} v_y. \end{aligned} \right\} (61)$$

Последний член в правой части уравнения движения для электронов соответствует силе трения электронного газа об ионный (\bar{v} — средняя частота столкновений между электроном и ионом, равная $n \langle v_e \sigma \rangle$, где n — плотность числа ионов; σ — сечение столкновения и v_e — относительная скорость электрон — ион;

в достаточно слабой ударной волне \bar{v} можно считать приближенно постоянным внутри фронта); M, m — масса иона (электрона).

После выполнения процедуры исключения всех переменных, кроме H , система уравнений (61) сводится к следующему дифференциальному уравнению для определения H :

$$-a^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H_0 - H + H \frac{H^2 - H_0^2}{8\pi M n_0 u^2} + \frac{a^2}{u} \bar{v} \frac{dH}{dx}. \quad (62)$$

Здесь H_0 — магнитное поле в плазме до прихода ударной волны (при $x \rightarrow \infty$); n_0 — невозмущенная плотность числа ионов (электронов); u — скорость ударной волны относительно невозмущенной плазмы;

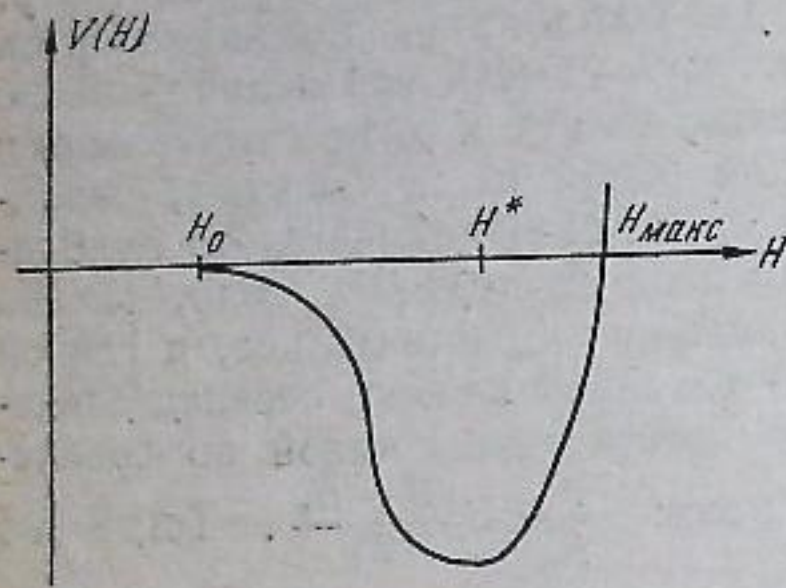


Рис. 14.

Если из этого уравнения исключить трение, оно будет напоминать уравнение (31). Единственное отличие останется в том, что здесь мы сразу ограничились для простоты небольшими амплитудами. Уравнение (2) представляет собой уравнение движения ангармонического осциллятора при наличии трения; роль обобщенной координаты играет H ; роль времени — x .

Форма ямы определяется потенциалом

$$V(H) = \frac{1}{2} (H - H_0)^2 \left[\frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} - 1 \right]. \quad (63)$$

На рис. 14 для наглядности изображен вид $V(H)$. При

$$H = H^* = -\frac{H_0}{2} + \sqrt{8\pi n_0 M u^2 + \frac{H_0^2}{4}}$$

$V(H)$ достигает минимума. Аналогия с осциллятором легко позволяет установить профиль H внутри фронта ударной волны; H осциллирует вокруг значения H^* с затухающей амплитудой до тех пор, пока не установится $H = H^*$, соответствующее магнитному полю позади фронта ударной волны. Для того чтобы H_0 соответствовало минимуму магнитного поля в волне, т. е. чтобы $V(H)$ имело вид, изображенный на рис. 14, необходимо выполнение условия $u^2 > \frac{H_0^2}{4\pi n_0 M}$. При $\bar{v} \rightarrow 0$ максимальная амплитуда,

достигаемая в конце первого полупериода колебаний, соответствует

$$H_{\text{макс}} = 4u \sqrt{\pi n_0 M} - H_0.$$

В явном виде найти $H(x)$ не удастся, однако, если затухание за один период мало, можно воспользоваться простым приближенным методом медленно меняющейся амплитуды, усреднив по быстрым осцилляциям. В отсутствие трения движение «частицы» в нашей потенциальной яме определяется с помощью одной константы c , представляющей уровень полной энергии «частицы» (см. рис. 14). Тогда определение обратной зависимости x от H сводится к квадратуре

$$\int \frac{dH}{\sqrt{(H - H_0)^2 \left[1 - \frac{(H + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c}} \pm \frac{x}{a}. \quad (64)$$

Пусть решение соответствующей задачи будет $H = \Phi(x, C)$. В методе медленно меняющейся амплитуды ищем решение (и при учете трения) в виде $H = \Phi(x, C_x)$, но C теперь считается медленно убывающим с возрастанием x (вследствие «диссипации» энергии). Зависимость C от x определяется после усреднения по периоду следующим уравнением:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\frac{\bar{v}}{u} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right]} + c d\Phi}{\int_{\Phi} \left(\sqrt{(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right]} + c \right)^{-1} d\Phi}. \quad (65)$$

Здесь $\Phi_{1,2}$ — два положительных корня уравнения

$$(\Phi - H_0)^2 \left[1 - \frac{(\Phi + H_0)^2}{16\pi n_0 M u^2} \right] + c = 0, \quad (66)$$

которые больше H_0 . Таким образом, задача сводится к решению уравнений (64) и (65). При $x \rightarrow \infty$ мы имеем граничное условие $H \rightarrow H_0$, $\frac{dH}{dx} \rightarrow 0$, т. е. $C \rightarrow 0$. При малых C оба уравнения имеют простые асимптотические решения. Так, $\Phi(x, 0)$ имеет вид

$$\Phi(x, 0) \approx H_0 \left[1 + 2(\mathcal{M}^2 - 1) \text{sh}^2 \frac{x}{a} \sqrt{\mathcal{M}^2 - 1} \right],$$

совпадающий, разумеется, с профилем уединенной волны небольшой амплитуды (см. § 2), где $\mathcal{M} = \left(\frac{4\pi M n_0 u^2}{H_0^2} \right)^{1/2}$, т. е. магнитное число Маха. Уравнение (65) при $C \rightarrow 0$ сводится к следующему:

$$\frac{dC}{dx} \approx -\frac{4}{15} \frac{\bar{v}}{u} \frac{H_0^2 8(\mathcal{M} - 1)^3}{\ln \frac{\sqrt{-c}}{H_0 \sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}}}, \quad (67)$$

откуда находим

$$C \ln \frac{V-c}{H_0 \sqrt{M^2-1}} \approx -\frac{4}{15} \frac{\bar{v}}{u} 8H_0^2 (M-1)^3 x + \text{const.} \quad (68)$$

При больших C , когда амплитуда колебаний заметно уменьшилась по сравнению с начальной, колебания становятся затухающими гармоническими

$$H - H^* \sim e^{-\frac{\bar{v}}{u} x} \sin \left(\sqrt{M-1} \frac{x}{a} \right).$$

Профиль изменения H внутри фронта волны окончательно можно представить следующим образом (рис. 15). Сначала в невоз-

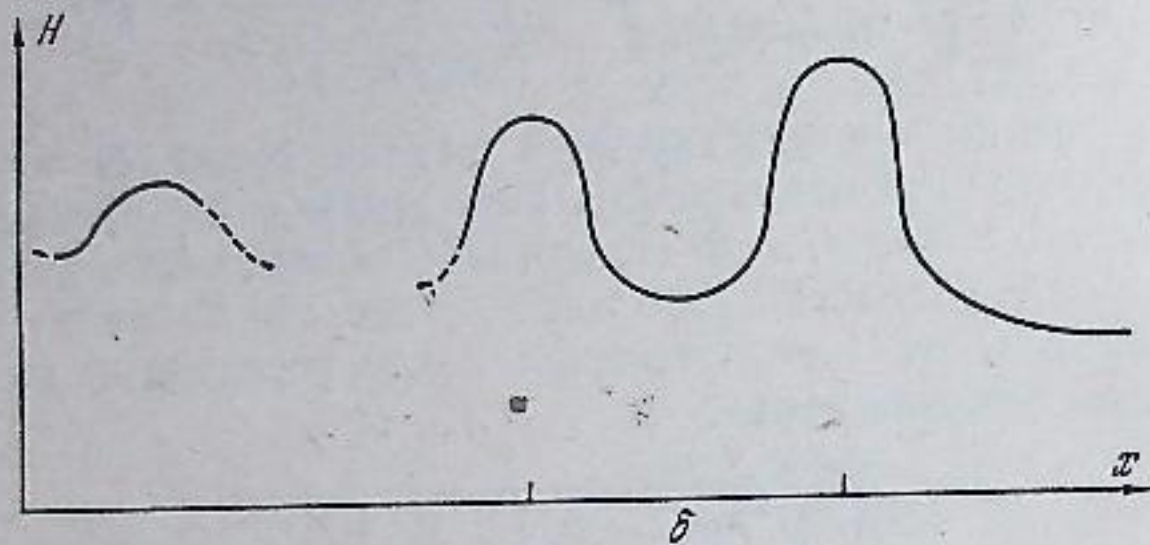


Рис. 15.

мушенной плазме появляется уединенная волна, на гребне которой магнитное поле достигает максимального значения; вследствие наличия необратимой диссипации (трение) состояние плазмы после прохождения такой волны будет немного отличаться от исходного. На расстоянии порядка

$$\delta \approx \frac{a}{\sqrt{M-1}} \ln \frac{u}{va} \sqrt{M-1} \quad (69)$$

вслед за первой волной движется вторая волна и т. д. Если не интересоваться тонкой структурой осцилляций во фронте ударной волны и произвести усреднение по расстояниям, превышающим δ , то можно говорить о δ как об эффективной толщине фронта ударной волны, связывающей два состояния плазмы: невозмущенное (до прихода волны) и возмущенное (модулированное интенсивными колебаниями), вклад которых при таком подходе нужно включить в законы сохранения на «разрыве». В этом смысле роль затухания действительно чисто символическая, так как в выражение для δ (69) (ширина такой ударной волны) затухание входит под знаком логарифма [22].

Картина затухания нелинейных осцилляций позади фронта ударной волны имеет следующий характер. В последующих «уединенных» волнах амплитуда все уменьшается и расстояние между

двумя соседними «возвышениями» магнитного поля сокращается до $\frac{a}{\sqrt{M-1}}$, когда совокупность возвышений и впадин становится затухающей синусоидой. Полная длина затухания осцилляций будет порядка Δ

$$\Delta \sim \frac{u}{\bar{v}}. \quad (70)$$

Для чисел Маха, не слишком близких к единице, эта формула неприменима, так как \bar{v} будет уже меняться внутри фронта волны. Но для оценки Δ можно пользоваться просто выражением $\frac{u}{\langle v \rangle}$, где $\langle v \rangle$ — средняя частота столкновений электронов с ионами. Выражая через длину свободного пробега $\lambda = \frac{\bar{v}_e}{\nu}$ (\bar{v}_e — средняя относительная скорость электронов относительно ионов), получим

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{H^2}{8\pi nT} \cdot \frac{m}{M}} \lambda, \quad (71)$$

откуда видно, что даже длина затухания осцилляций из-за столкновений в реальных условиях, соответствующих принятому приближению, может оказаться значительно меньше свободного пробега (если $\frac{H^2}{8\pi nT} \cdot \frac{m}{M} \ll 1$). Это и естественно, так как при джоулевом нагреве растет температура электронов, а их время релаксации, как правило, значительно меньше ионного из-за большей скорости. «Выравнивание» температур ионов и электронов будет происходить уже после того, как колебания внутри фронта затухнут, на расстояниях порядка $\lambda \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2}$.

При переходе к большим числам Маха, кроме отмеченных выше ограничений, появляется и еще одно. Суть его заключается в том, что, если плазма в невозмущенном состоянии и была «холодной», в конце концов она нагреется настолько, что ларморовские радиусы электронов станут сравнимы с характерной длиной осцилляции $\frac{c}{\omega_0}$. Очевидно, это произойдет тогда, когда давление электронов станет сравнимым с магнитным давлением $nT \sim \frac{H^2}{8\pi}$.

Однако картина начальной стадии фронта будет иметь вышеописанный характер и для не малых чисел Маха. На фазовой плоскости (H' , H) рассмотренное осциллирующее решение для профиля во фронте ударной волны имеет вид, изображенный на рис. 16

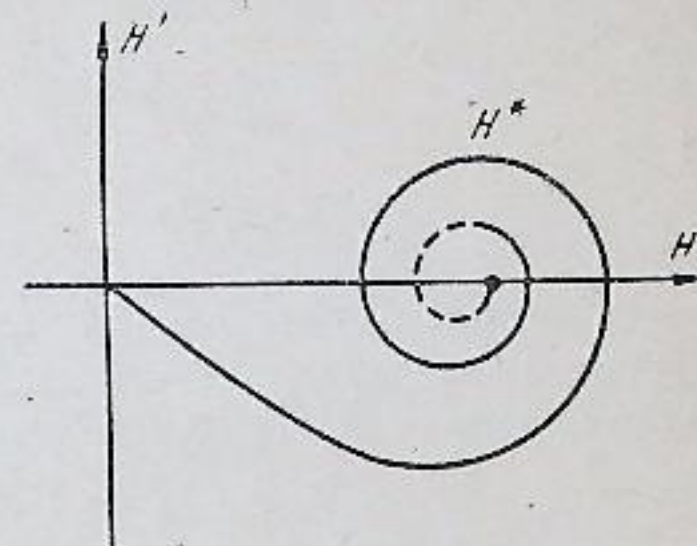


Рис. 16.

(сравните с соответствующими интегральными кривыми в отсутствие затухания на рис. 5, в).

Интересно установить связь между полученным решением для разреженной плазмы и известным выражением для толщины ударной волны в магнитной гидродинамике плазмы для аналогичного случая слабой волны, распространяющейся поперек магнитного поля

$$\Delta \sim \frac{\eta_m}{u(\omega M - 1)}, \quad (72)$$

где η_m — так называемая магнитная вязкость ($\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$,

$\sigma = \frac{ne^2}{mv}$). Точка $H = H^*$ является особой точкой уравнения (62). До сих пор мы, рассматривая разреженную плазму, молчаливо предполагали затухание [роль последнего члена

в уравнении (62)] малым, и точка H^* автоматически оказывалась фокусом. В плотной же плазме особенность H^* становится «узлом» (рис. 17) при условии

$$\frac{c}{\omega_0} < \frac{c^2 m v \cdot 1}{4\pi n e^2 u \cdot \sqrt{6}} \cdot \frac{H_0^{1/2}}{(H^* - H_0)^{1/2}}. \quad (73)$$

В противоположность рассмотренному в предельном случае, когда

$$\frac{c}{\omega_0} \ll \frac{c^2 m v}{4\pi n e^2 u}$$

и имеет место известный гидродинамический профиль, определяемый магнитной вязкостью. Толщина фронта тогда дается выражением (72).

2. К каким эффектам могло бы привести малое «бесстолкновительное» затухание за счет доли частиц, скорости которых близки к скорости распространения ударной волны [14, 23]? Механизм затухания — это получение энергии ионами, отражающимися от «горбов» потенциала на фронте ударной волны (рис. 18). При таком отражении магнитное поле не играет существенной роли, если ларморов радиус ионов значительно больше характерного размера осцилляций $\frac{c}{\omega_0} \cdot \frac{1}{M-1}$.

Основная доля отражений приходится на первую уединенную волну (если вообще не учитывать заворачивающее действие

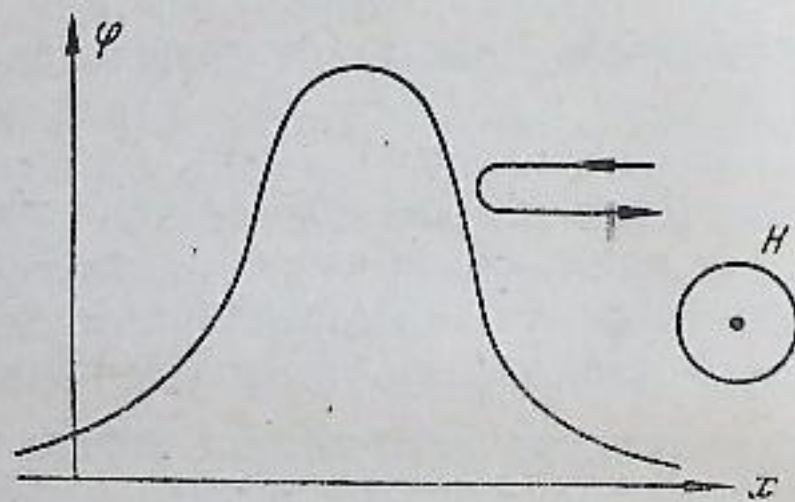


Рис. 18.

магнитного поля и столкновения, отражения имели бы место лишь на первой уединенной волне). Количественный учет эффекта отражающихся ионов довольно громоздок, и мы его не приводим (в более простом случае волны в отсутствие магнитного поля такой расчет будет дан ниже).

Отметим любопытный эффект ускорения группы ионов в такой ударной волне. Ионы, скорость которых весьма близка к скорости ударной волны, будут иметь очень маленький ларморов радиус. Поэтому, отразившись от горба потенциала, они сразу будут вновь возвращены магнитным полем, снова отразятся и т. д. После многократных отражений (рис. 19) они приобретут весьма большую скорость по оси y в плоскости фронта и поперек H . Однако эта скорость не может стать сколь угодно большой, так как с ростом v_y становится существенной лоренцова сила $\frac{e}{c} v_y H$ в области горба, которая в конце концов превысит «отражающую» силу — $e\nabla\phi$, и ион перевалит через горб. Максимальная энергия таких ионов оказывается равной по порядку величины $\frac{M}{m} \cdot \frac{Mu^2}{2}$, где $\frac{Mu^2}{2}$ средняя энергия упорядоченного движения, приходящаяся на один ион в таких колебаниях.

Другим механизмом бесстолкновительного затухания могли бы служить неустойчивости, которые приводят к перекачке энергии упорядоченных осцилляций в энергию хаотических колебаний. Воспользуемся результатами предыдущей главы. Наиболее прозрачным типом неустойчивости для нелинейных волн в магнитном поле является «пучковая», когда средняя упорядоченная скорость электронов относительно ионов превышает среднюю тепловую ($v_0 > \sqrt{\frac{T}{m}}$). Это условие начинает выполняться для волн с числом Маха, превышающим

$$M^* \approx 1 + \frac{3}{8} \left(\frac{8\pi n T}{H^2} \right)^{1/2}$$

[см. формулу (50)]. Физически эта неустойчивость означает, что электроны, двигаясь относительно ионов, тормозятся не только за счет обычных столкновений [последний член в уравнении (62)], но и за счет своеобразной силы трения коллективной природы — когерентное «излучение» плазменных колебаний вследствие неустойчивости. Для оценки можно воспользоваться следующими

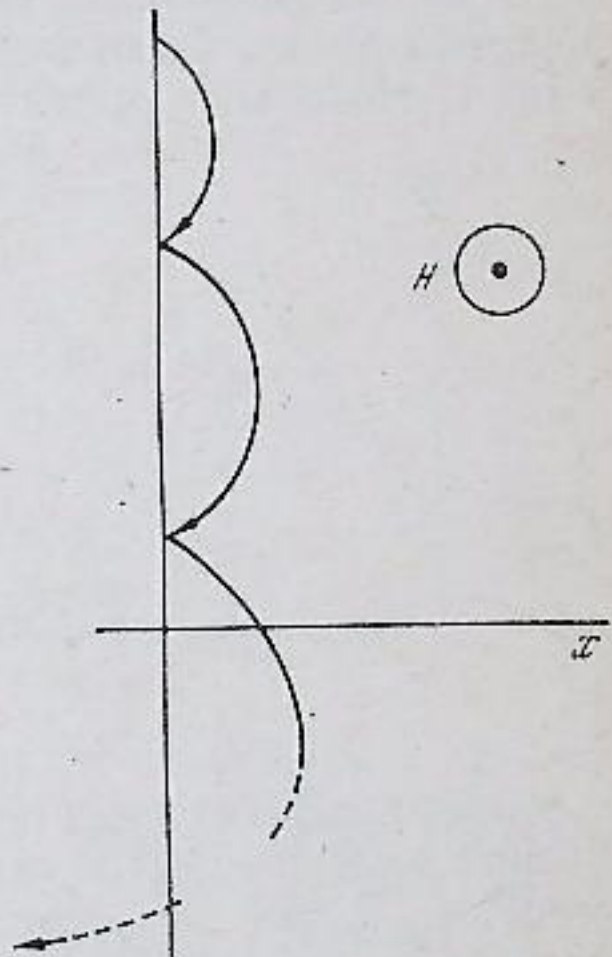


Рис. 19.

соображениями: в выражении для коэффициента электропроводности $\sigma_{эфф} \sim \frac{ne^2}{m\nu}$; под ν теперь надо понимать обратное время потерь энергии электронами за счет неустойчивости. Разумно вместо $1/\nu$ выбрать по порядку величины эффективное время раскачки неустойчивости, т. е.

$$\sigma_{эфф} \sim \frac{ne^2}{m\Omega_0}. \quad (74)^1$$

При выполнении условия $M > M^*$ головная часть фронта ударной волны будет определяться именно таким эффектом затухания. На языке эффективной потенциальной ямы $V(H)$ струк-

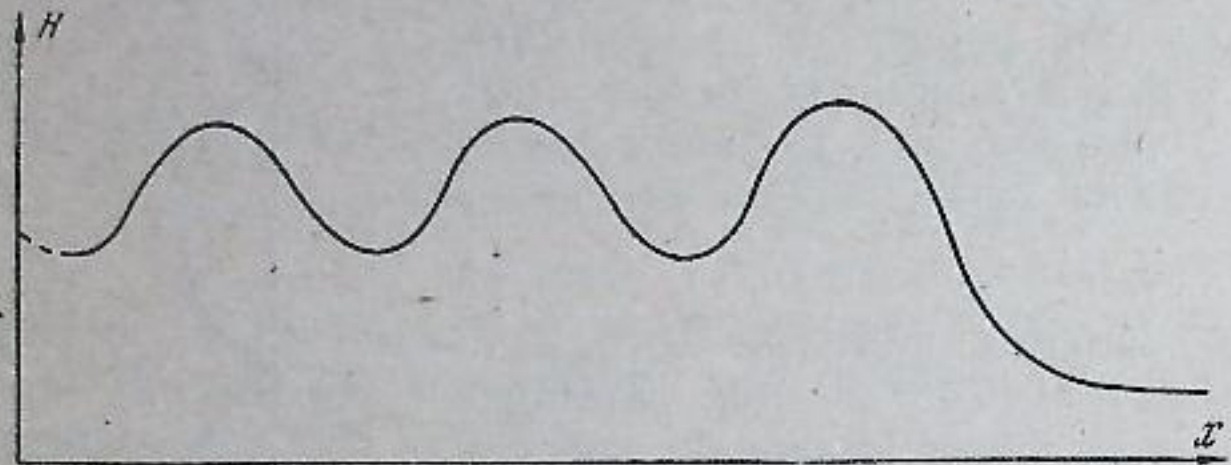


Рис. 20.

тура фронта будет качественно иметь вид, изображенный на рис. 20. Резкое торможение частицы вначале связано с влиянием неустойчивости. Затем по мере уменьшения амплитуды пульсаций (и увеличения температуры) неустойчивость пропадает и дальнейшее торможение замедляется [17]. На самом деле затухание осцилляций и в этой области может быть аномальным из-за распадной неустойчивости.

3. До сих пор речь шла о структуре волны, распространяющейся в «холодной» плазме строго поперек магнитного поля. Теперь нетрудно обобщить предыдущее рассмотрение на случай волн, не перпендикулярных к H . Дисперсионные эффекты резко чувствительны к направлению распространения волны. Если волна распространяется не строго поперечно, дисперсионное уравнение, связывающее ω с k , имеет вид уравнения (20) в § 2. Характерной длиной дисперсии является $\frac{c}{\Omega_0} \theta$ (при $\sqrt{\frac{m}{M}} \ll \theta \ll 1$). Инерция электронов для таких волн незначительна, но зато учитывается гиротропия плазмы. Исходную систему уравнений для

¹ Это означает, что при выполнении условия неустойчивости $v_0 > \sqrt{\frac{T}{m}}$ появляется аномальное электрическое сопротивление, приводящее к аномальной диссипации. Данное явление было обнаружено экспериментально в волнах большой амплитуды в плазме, помещенной в магнитном поле [24].

этого случая

$$\begin{aligned} M \frac{dV}{dt} &= eE + \frac{e}{c} V \cdot H; \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } nV &= 0; \\ -eE + \frac{e}{c} v \times H &= 0, \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } nv = 0; \\ \text{rot } E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \text{rot } H &= \frac{4\pi en}{c} (V - v) \end{aligned}$$

можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} e \frac{dV}{dt} &= -\nabla \frac{H^2}{8\pi} + \frac{(HV)H}{4\pi}; \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } qV &= 0; \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= \text{rot } V \times H - \frac{Mc}{e} \text{rot } \frac{dV}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Слагаемое $\frac{Mc}{e} \text{rot } \frac{dV}{dt}$ дает отклонение от линейного закона дисперсии при больших k . Стационарное решение этой системы уравнений (в которую нужно включить аналогично предыдущему случаю джоулеву диссипацию) описывает профиль ударной волны.

При $\sqrt{\frac{m}{M}} \ll \theta \ll 1$ уравнение, описывающее профиль изменения магнитного поля внутри волны, будет иметь вид [17, 25]

$$\frac{c^2}{\Omega_0^2} \theta^2 \frac{d^2 H}{dx^2} = H \left\{ 1 + \frac{H_0^2}{8\pi Q_0 u^2} - \frac{H^2}{8\pi Q_0 u^2} \right\} - H_0 + \alpha \frac{dH}{dx}. \quad (76)$$

Здесь меняется не только длина диссипации (вместо $\frac{c}{\omega_0}$ стало $\frac{c}{\Omega_0} \theta$), но и характер дисперсии ($\frac{\omega}{k}$ с ростом k увеличивается). В уравнении (76) по сравнению с уравнением (62) изменился знак «эффективной массы». В пренебрежении затуханием $\alpha \frac{dH}{dx}$ уравнение (76) описывает нелинейные периодические установившиеся волны. Особым решением и здесь являются уединенные волны (рис. 21), но в этом случае это уединение волны «разрежения». Профиль же ударной волны будет иметь вид, показанный на рис. 22. Любопытно, что внутри фронта ударной волны магнитное поле достигает минимального значения, меньшего, чем в невозмущенной плазме.

Длина затухания таких осцилляций из-за обычной силы трения по порядку величины равна

$$\Delta \sim \lambda \theta \left(\frac{H^2}{8\pi n T} \right)^{1/2}. \quad (77)$$

Самое главное отличие от предыдущего случая заключается в том, что передний фронт осцилляций не является резким. По этой причине здесь может создаться впечатление, что нет ударной волны без столкновений, так как в выражение (77) для Δ (длины затухания осцилляций) входит λ — длина свободного пробега. Однако закон дисперсии $\omega(k)$ для этих колебаний является как раз таким, чтобы нелинейные периодические волны были неустойчивы относительно «распада» [26] (см. § 2). Вследствие распадной неустойчивости нелинейные упорядоченные колебания затухнут гораздо раньше, чем по формуле (77), так как их энергия перейдет в энергию целого спектра шумов. Получающуюся таким образом длину затухания Δ можно отождествить с толщиной фронта ударной волны. Для нахождения Δ нужно уметь находить уровень шумов, возникающих

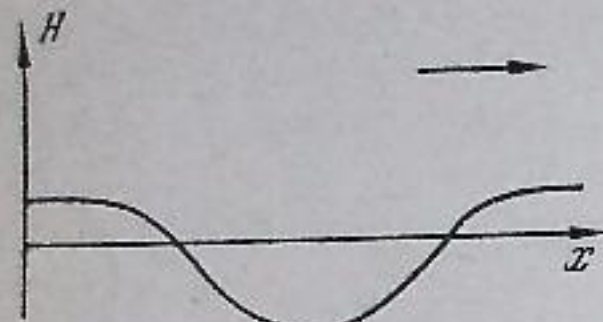


Рис. 21.

доченные колебания затухнут гораздо раньше, чем по формуле (77), так как их энергия перейдет в энергию целого спектра шумов. Получающуюся таким образом длину затухания Δ можно отождествить с толщиной фронта ударной волны. Для нахождения Δ нужно уметь находить уровень шумов, возникающих

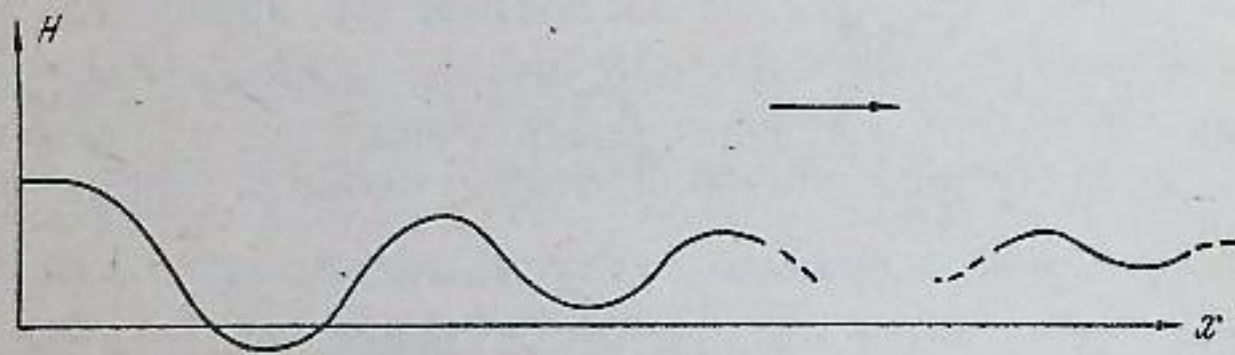


Рис. 22.

из-за распадной неустойчивости, и их обратное влияние на фон. Эта чрезвычайно сложная задача еще не решена (в одной из работ [8] сделана попытка получить приближенную оценку Δ). Из размерностных соображений можно ожидать, что Δ должно быть порядка нескольких длин осцилляций (кроме длины волны осцилляций внутри фронта, в задаче нет других характерных размеров).

Таким образом, задача о ламинарной структуре нелинейных осцилляций внутри фронта ударных волн сводится к двум различным постановкам (рис. 23): 1) когда дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет вид типа 1 (волны, перпендикулярные к H в холодной плазме); в этом случае передний фронт осцилляций резкий (все начинается с уединенных волн), и можно говорить о бесстолкновительной ударной волне даже в ламинарной теории; 2) когда короткие волны имеют большую скорость распространения, чем длин-

ные (тип 2). В этом случае передний фронт осцилляций вытягивается, так как короткие волны обгоняют фронт. Для существования бесстолкновительной ударной волны здесь уже необходимо аномальное затухание таких осцилляций. Причиной затухания может служить распадная неустойчивость (присущая как раз спектрам типа 2). В результате развития такой неустойчивости плазма переходит в турбулентное состояние. Теория толщины ударных волн в первом случае весьма проста, но во втором построение количественной теории представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Однако качественно и здесь уже ясны главные механизмы.

Можно было бы еще привести примеры задач, сводящихся к одному из двух проанализированных случаев. Так, ударная волна поперек магнитного поля в плазме «большого» давления ($p \gtrsim \frac{H^2}{8\pi}$) относится ко второму случаю, так как соответствующая дисперсионная зависимость (см. § 2) относится к типу 2. Ионный звук в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) имеет спектр типа 1, поэтому задача о бесстолкновительной ударной волне решается в ламинарной постановке.

4. Для установления профиля фронта в этом случае будем пользоваться аналогией с предыдущим пунктом. В отсутствие магнитного поля нелинейные установившиеся колебания существуют при $T_e \gg T_i$. В пренебрежении затуханием уравнение, описывающее профиль потенциала φ в такой волне [см. уравнение (37)], имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi n_0 e \left(\frac{u}{V u^2 - \frac{2e\varphi}{M}} - e^{\frac{e\varphi}{T}} \right) = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (78)$$

где $V(\varphi)$ — эффективная потенциальная энергия. Мы будем считать, что обычная диссипация из-за столкновений частиц друг с другом отсутствует, но примем во внимание эффект отражения ионов от переднего фронта волны, играющий роль бесстолкновительной диссипации.

Структуру возникающей при этом бесстолкновительной ударной волны можно описать, исходя из следующей наглядной картины. В отсутствие какой-либо диссипации в плазме может распространяться уединенная волна, представляющая собой симметричный горб потенциала. В действительности же в плазме имеется хотя бы небольшая группа ионов, отражающихся от движущегося потенциального горба, что приводит к нарушению симметрии;

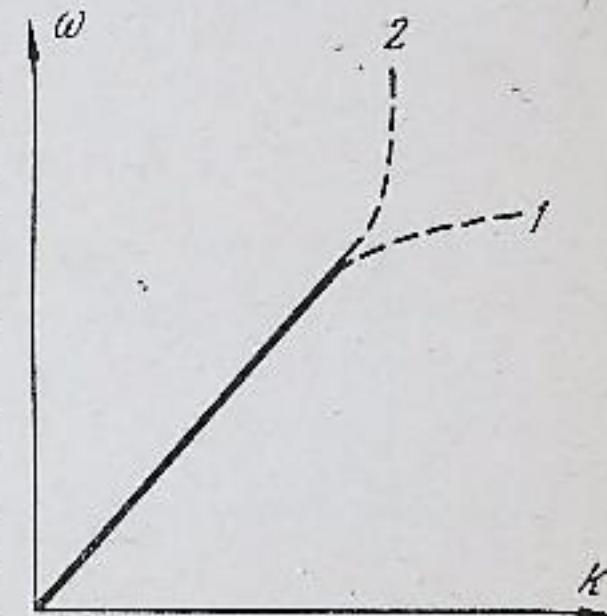


Рис. 23.

за горбом появляются периодические колебания, так что в результате возникает своеобразная ударная волна, связывающая два различных состояния плазмы: невозмущенное (перед фронтом) и модулированное интенсивными упорядоченными колебаниями (за фронтом). Соответствующая «ударная адиабата» должна учитывать дополнительные слагаемые в выражениях для плотностей потоков энергии и импульса за фронтом, связанные с такими упорядоченными колебаниями. Следует, однако, заметить, что распределение энергии между тепловым движением и колебаниями зависит от конкретного механизма «бесстолкновительной» диссипации.

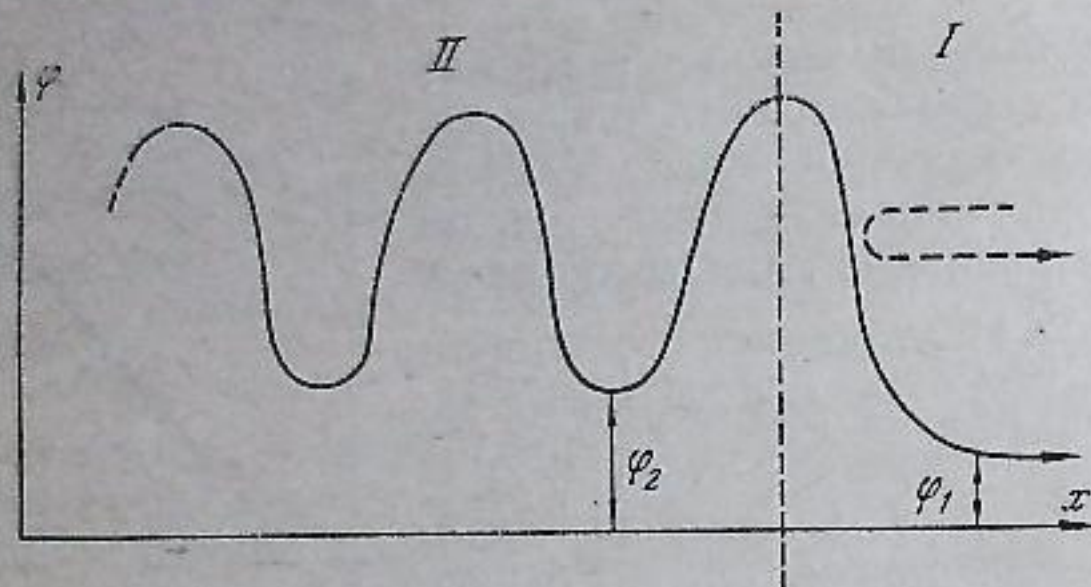


Рис. 24.

Если число отраженных частиц мало, то можно найти форму профиля такой ударной волны. Вид потенциала в волне показан на рис. 24. В отсутствие диссипации $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\lambda = \infty$ — симметричная уединенная волна.

При учете отраженных ионов для потенциала в области I (см. рис. 24) имеет место уравнение, отличающееся от уравнения (78) наличием в правой части дополнительных слагаемых

$$-4 n_0 e f(\varphi_1) \frac{u}{\sqrt{u^2 - \frac{2e\varphi}{M}}}, \quad 2 \cdot 4 \pi n_0 e f(\varphi).$$

Первое слагаемое соответствует вычитанию отраженных ионов из полного числа ионов n_0 ; второе же представляет собой вклад отраженных ионов. Величина $n_0 f(\varphi)$ есть полная плотность отражающихся ионов в точке с потенциалом φ (конкретный вид f легко найти, зная невозмущенное распределение ионов по скоростям).

Скачок потенциала φ_1 связан с уходящими в бесконечность ионами, отразившимися от потенциального барьера, и в рассматриваемом случае малого числа отраженных частиц ($f \ll 1$) пропорционален f , величина же φ_2 , как мы увидим, пропорциональна корню квадратному из числа отраженных частиц, так что $\varphi_1 \ll \varphi_2$. Состояние плазмы за фронтом (в области II) характеризуется вели-

чинами $\varphi_{\text{макс}}$, φ_2 , определяющими амплитуду колебаний и длиной осцилляции λ ; в этой области справедливо уравнение (78).

Решая уравнение для потенциала в областях I и II с граничными условиями непрерывности φ и $\frac{d\varphi}{dx}$, находим профиль потенциала. Если мы снова обратимся к аналогии с движением частицы в потенциальной яме $V(\varphi)$, то можно сказать, что влияние отраженных ионов сводится к тому, что полная энергия C становится отрицательной. Это и приводит к периодическому движению (к периодической структуре за фронтом волны).

Уменьшение энергии C пропорционально числу отраженных ионов

$$-C \sim \int_0^{\varphi_{\text{макс}}} f(\varphi) d\varphi.$$

Так как потенциальная энергия $V(\varphi)$ при малых φ меняется квадратично, точка поворота φ_2 пропорциональна квадратному корню из энергии $-C$

$$\varphi_2 \sim \sqrt{-C},$$

а период колебаний логарифмически растет с уменьшением энергии

$$\lambda \sim \ln \frac{1}{-C}.$$

Таким образом, минимальное значение потенциала φ_2 за фронтом ударной волны равно

$$\varphi_2 = \frac{2\alpha M}{\sqrt{\alpha M^2 - 1}} \left(\frac{T}{e} \int_0^{\varphi_{\text{макс}}} f(\varphi) d\varphi \right)^{1/2} \left(M^2 = \frac{u^2}{T} \right). \quad (79)$$

Значение же $\varphi_{\text{макс}}$ мало отличается от соответствующего значения в уединенной волне с тем же числом Маха.

Длина осцилляций на фронте есть [27]

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{\alpha M^2 - 1}} \left(\frac{T}{\pi n_0 e^2} \right)^{1/2} \ln \frac{\varphi_{\text{макс}}}{\varphi_2}, \quad (80)$$

где $A \sim 1$.

5. Мы еще совсем не касались случаев, когда ламинарную теорию фронта ударной волны вообще невозможно построить. Такая ситуация в уже рассмотренных примерах осуществляется при достаточно больших амплитудах, когда нет установившихся нелинейных волн. Рассмотрим сначала случай, когда ударная волна идет поперек сильного магнитного поля в холодной плазме. При небольших числах Маха здесь внутри фронта ударной волны существовали упорядоченные колебания. При приближении амплитуды магнитного поля в волне к значению, втрое большему начальной величины магнитного поля, рассмотренная упорядоченная осцилляционная структура нарушается. Действительно, как

следует из § 2, при таких амплитудах (соответственно при числах Маха, больших 2) уединенная волна не существует; более того, невозможно построить установившееся нелинейное течение односкоростного типа, т. е. такое, что в каждой точке пространства имеется лишь одно значение скорости ионов. Физически это означает, что как только амплитуда волны достигает критического значения ($H_{\text{макс}} = 3H_0$), происходит «опрокидывание». В некотором участке пространства ионы, двигавшиеся первоначально позади, настигают передних и обгоняют их (рис. 25). Профиль скорости в этот момент становится трехзначным.

Заметим, что аналогичное явление хорошо изучено в теории волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости в канале конечной глубины. Здесь существуют нелинейные установившиеся движения типа уединенных или периодических волн. При достаточно больших амплитудах такие волны разрушаются вследствие «опрокидывания». Ясно, что строгий математический анализ картины, возникающей после опрокидывания, чрезвычайно труден. Можно попытаться лишь качественно установить

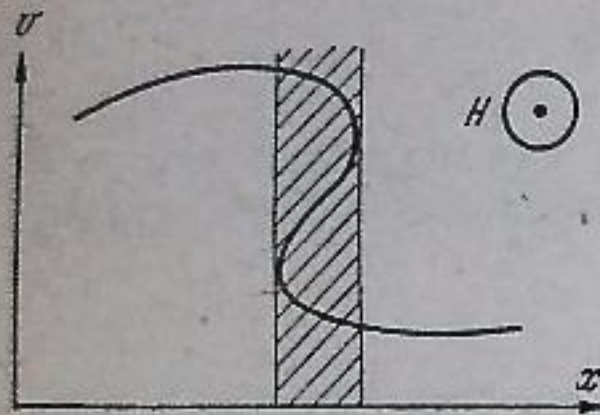


Рис. 25.

наиболее существенные черты явления, проводя аналогию с волнами в жидкости.

Основной вопрос заключается в том, будет ли после опрокидывания движение плазмы стремиться к какому-либо установившемуся режиму или же переходная область (заштрихованная на рис. 25) будет неограниченно размываться, как это имело бы место в обычном газе без столкновений. В теории поверхностных волн через некоторое время после опрокидывания возникает установившееся течение, называемое «прыжок воды» или «бор», представляющий собой некоторую переходную область конечной толщины, которая обычно заменяется идеализированной математической поверхностью, разделяющей два плоскопараллельных потока. При переходе через эту поверхность удовлетворяются соответствующие законы сохранения. В известном смысле «бор» представляет собой аналог ударной волны. Стационарность ширины переходного слоя физически обеспечивается тем, что участки профиля, выдвигающиеся вперед при опрокидывании, в конце концов, описав дугу, под действием силы тяжести падают и «смешиваются» с покоившимися. В плазме роль силы тяжести выполняет магнитное поле, заворачивающее ионы. Хотя распределение их скоростей еще далеко от максвелловского, можно состояния плазмы с обеих сторон переходной области связывать законами сохранения потоков массы, импульса и энергии, понимая под энергией теплового движения величину $\frac{M}{2}(\bar{v} - \bar{v})^2$ (черта

означает усреднение по распределению скоростей). Ширину переходной области можно оценить как радиус кривизны ионов после опрокидывания в магнитном поле [22]. Так как в волне с числом Маха, большим 2, амплитуда скорости $v \approx \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$, то ширина переходного слоя (или ширина бесстолкновительной ударной волны) будет порядка

$$\delta \sim \frac{vMc}{eH} \sim \frac{c}{\Omega_0}, \quad \left(\Omega_0^2 = \frac{4\pi ne^2}{M} \right). \quad (81)$$

Многоскоростное течение со скоростями, перпендикулярными к магнитному полю, возникающее после опрокидывания, однако, должно быть неустойчиво. Действительно, если для простоты рассмотреть двухпучковое распределение ионов с разностью скоростей между пучками, превышающей $\sqrt{\frac{T}{M}}$, то возникает неустойчивость относительно раскачки колебаний с волновым вектором, почти параллельным скорости пучка. В «боре» также имеет место неустойчивость сходной природы (встречные потоки); это просто неустойчивость тангенциального разрыва, возникающая при соприкосновении падающей струи с поверхностью покоившейся жидкости.

Если характерные размеры областей многопоточкового движения значительно превышают длины волн возникающих неустойчивостей, можно пользоваться результатами исследования устойчивости в однородной плазме. В случае, например, двух встречных ионных потоков, движущихся поперек магнитного поля со скоростями v_0 и $-v_0$, дисперсионное уравнение имеет вид [28]

$$\frac{2}{\omega_{H_i}\omega_{H_e}} = \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega + kv_0)^2}. \quad (82)$$

Максимальный инкремент неустойчивости по порядку величины равен $(\omega_{H_i}\omega_{H_e})^{1/2}$. Для $v_0 \lesssim \frac{H}{\sqrt{4\pi nM}}$ характерная длина волны неустойчивости имеет порядок $\frac{c}{\omega_0}$. Таким образом, многопоточковые движения поперек магнитного поля неустойчивы.

Если бы плазма была «горячей», т. е. нужно было бы учитывать разброс скоростей, то дисперсионное уравнение в форме (82) было бы непригодно. Для $v_{Ti} \sim \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}$ максимальный инкремент неустойчивости оказывается равным по порядку величины ω_{H_i} , а соответствующая длина волны $\frac{c}{\Omega_0}$. Следовательно, эта вели-

чина характеризует толщину фронта ударной волны в сильном магнитном поле¹.

6. Выше мы рассмотрели вопрос о бесстолкновительных турбулентных ударных волнах в плазме, распространяющихся поперек сильного магнитного поля. Магнитное поле, параллельное плоскости фронта волны, удерживает более «горячие» частицы, предотвращая расплывание переходной области между невозмущенной (холодной) плазмой (перед фронтом ударной волны) и нагретой плазмой за волной. В ряде работ обсуждалась возможность существования бесстолкновительных ударных волн и в плазме без магнитного поля. Здесь в качестве механизма, сдерживающего расплывание переходной области, указывалась так называемая «пучковая» неустойчивость двух взаимопроникающих плазм [30]. При таком подходе, однако, не учитывается тепловой разброс внутри каждого из «пучков». Но более строгое рассмотрение, учитывающее тепловое движение, не дает неустойчивости, вплоть до чисел Маха от единицы до приблизительно $(\frac{M}{m})^{1/2}$, если температуры электронов сравнимы с температурой ионов или меньше их (M — масса иона; m — масса электрона; см., например, работу [31]).

В неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$), как может показаться, такой проблемы не существует, так как там оказалось возможным построить ламинарную теорию. Однако и здесь при $M > 1,6$ из-за опрокидывания нужно искать другой выход. Оказывается, этот выход заключается в использовании хорошо известной анизотропной неустойчивости. Когда более быстрые ионы из области позади фронта попадают в невозмущенную плазму перед фронтом, распределение ионов по скоростям в ней становится неанізотропным. Такое состояние плазмы неустойчиво. Возникают хаотические флуктуации электрического и магнитного полей. Под толщиной фронта ударной волны тогда нужно понимать величину порядка длины свободного пробега ионов относительно рассеяния на таких неравновесных флуктуациях. С той степенью «строгости», которая считается допустимой в теории турбулентности, эта проблема была решена в работе [27]. Здесь мы приведем наглядные качественные оценки.

Пусть в невозмущенной плазме $H = 0$. Постараемся понять физический смысл анизотропной неустойчивости в этом случае.

¹ В работе [29] сообщается о численном расчете одномерной модели движения плазмы поперек магнитного поля при больших амплитудах, когда течение становится многопоточным (и неустойчивым). В частности, при $M = 5,8$ эффективная «длина размешивания» — толщина фронта оказалась $3,4 r_i$.

А. Кантровицем и Г. Петчеком [7] развивается полупеномонологическая теория турбулентной структуры фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля. Авторы предполагают, что из-за какой-нибудь неизвестной неустойчивости в плазме с самого начала существует целый спектр колебаний, взаимодействие между различными гармониками которого определяет процессы переноса энергии и импульса.

Итак, пусть имеется плазма с различными средними энергиями частиц, скажем, в направлениях x и y [$\epsilon_{x,y} = M(\bar{v} - \bar{v})^2$, причем $\epsilon_y > \epsilon_x$]. Рассмотрим возмущение, имеющее вид сколь угодно малой флуктуации магнитного поля; направим его, например, по оси z (рис. 26). Неизотропия распределения может приводить к его нарастанию. Действительно, рассмотрим частицы, движущиеся по оси y вблизи точки x_0 , где магнитное поле меняет знак. На частицы действует сила Лоренца $F_x = \frac{e}{c} H v_y$. Частицы,

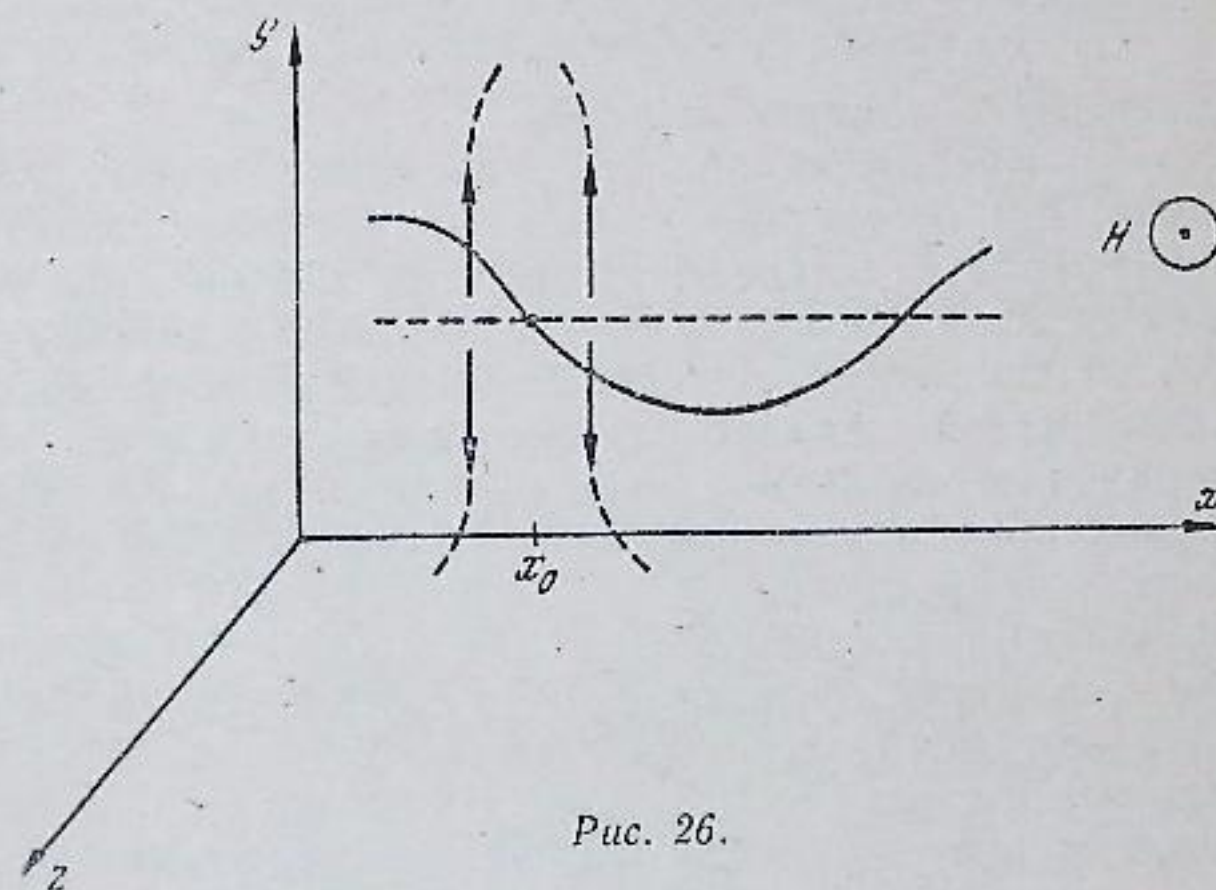


Рис. 26.

имеющие $v_y > 0$, она будет толкать в сторону к x_0 , частицы с $v_y < 0$ — в сторону от x_0 . Таким образом, вблизи x_0 стремятся сконцентрироваться частицы с $v_y > 0$. Это значит — появляется электрический ток j_y . Анализируя его направление, нетрудно убедиться в том, что он приводит к увеличению исходной флуктуации магнитного поля, т. е. к неустойчивости. Однако мы не учли стабилизирующую роль теплового движения по оси x , которое противодействует такой «конденсации» частиц с одинаковыми знаками v_y . Если $\epsilon_x = \epsilon_y$, то неустойчивости вообще нет. Если же $\epsilon_y > \epsilon_x$, то для достаточно длинных волн это противодействие не в состоянии погасить неустойчивость. Порядок длины волны таких возмущений легко оценить. Сравним две силы: силу Лоренца, стремящуюся вывести из равновесия, и противодействие, которое для оценки можно взять в виде градиента давления по x . Для неустойчивости необходимо

$$\frac{e}{c} v_y n_0 \delta H > \text{grad } M \bar{v}_x^2 \delta n, \quad (83)$$

где δH и δn — флуктуация магнитного поля и плотности. Величины δH и δn , с другой стороны, связаны уравнением Максвелла

$$\text{rot } \delta H \sim \frac{4\pi}{c} e v_y \delta n. \quad (84)$$

Представляя δH и δn в виде $\sim e^{ikx}$, с помощью уравнения (84) перепишем условие (23)

$$\frac{\Omega_0^2}{c^2} v_y^2 > k v_x^2,$$

откуда, считая v_x^2 и v_y^2 величинами одного порядка, получим характерное k

$$k^2 < \frac{\Omega_0^2}{c^2}. \quad (85)$$

где $\Omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{M}$. Разумеется, весь эффект связан с ионами, т. е. ионы несут основную энергию.

Итак, пусть в некоторой области разреженной плазмы возникло возмущение. При отсутствии какого-либо сдерживающего механизма возмущение с течением времени расплылось бы в связи с постепенным уходом более быстрых частиц. На самом деле при приходе частиц в новые области там возникает анизотропия распределения по скоростям и связанная с этим неустойчивость; возникшее беспорядочное магнитное поле, очевидно, должно рассеивать частицы, имитируя «столкновения». Таким образом, создается возможность распространения нерасплывающего возмущения, имеющего характер ударной волны, как в обычной газодинамике.

Оценим амплитуду пульсаций δH в нелинейном режиме развивающейся неустойчивости. Можно было бы ожидать, что флуктуация магнитного поля будет нарастать до тех пор, пока почти весь избыток энергии ионов $n\Delta\varepsilon$ (за счет неустойчивости) не перейдет в энергию магнитного поля $\frac{(\delta H^2)}{8\pi}$ (для простоты будем считать, что $\Delta\varepsilon \sim \varepsilon \sim T$). Однако электроны, которые до сих пор можно было не учитывать, оказывают гасящее действие, «замораживая» $(\delta H)^2$ на гораздо меньшем уровне. Действительно, как только средний ларморов радиус электронов становится порядка $\lambda \sim \frac{1}{k}$ — длины волны возмущений, которая характеризует пространственную неоднородность магнитного поля, электроны «вмораживаются» в магнитное поле. Дальнейший рост магнитного поля должен сопровождаться огромным увеличением энергии электронов в силу сохранения адиабатического инварианта $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2H}$. Итак, разумно

оценить δH из условия $r_{He} \sim \frac{1}{k}$, что дает

$$\frac{(\delta H^2)}{8\pi} \sim \frac{m}{M} nT. \quad (86)$$

Рассеяние ионов в таком магнитном поле будет носить диффузионный характер. Коэффициент диффузии (в скоростном пространстве) теперь нетрудно оценить

$$D \sim \frac{e^2}{M^2 c^2} \cdot \frac{(\delta H)^2}{k} v_i. \quad (87)$$

Отсюда найдем время «рассеяния» иона $r \sim \frac{v_i^2}{D}$ и соответствующую длину свободного пробега $l \sim r \cdot v_i \sim \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{\Omega_0}$. Это и будет определять по порядку величины толщину фронта ударной волны

$$\Delta \sim \frac{M}{m} \cdot \frac{c}{\Omega_0}. \quad (88)$$

«Строгая» теория приводит к следующему результату:

$$\Delta \sim \frac{c}{\Omega_0} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{1}{(\alpha M - 1)^2} \text{ при } M - 1 < 1, \quad (89)$$

в котором учитывается также зависимость от амплитуды волны.

Аналогичное рассмотрение можно было бы проделать и для плазмы, в которой с самого начала имеется слабое магнитное поле ($\frac{H^2}{8\pi} \ll nT$). Оказывается, начиная с $H \sim \delta H$ фронт ударной волны с ростом H сужается [27, 32].

7. Можно надеяться, таким образом, что представления об ударных волнах применимы значительно дальше рамок обычной газодинамики, основанной на понятии длины свободного пробега по отношению к парным столкновениям, так как в разреженной плазме главную роль начинают играть коллективные процессы — плазменные колебания. Единой теории толщины фронта в плазме, из которой автоматически получались бы различные частные случаи, в настоящее время еще не существует. Слишком велико разнообразие явлений, связанных с коллективными процессами. Выше были просуммированы лишь различные предельные случаи и подходы, которые позволяют понять то новое, что появляется здесь по сравнению с обычной газодинамикой: дисперсионными эффектами, микроскопическими неустойчивостями, бесстолкновительным затуханием и т. д. Соответственно в различных предельных случаях появляются самые разные длины, характеризующие толщину фронта волны (дебаевский радиус, ларморовский радиус, $\frac{c}{\Omega_0} \frac{M}{m}$ и т. п.).

К сожалению, сейчас почти не ставят систематических лабораторных экспериментов по ударным волнам в редкой плазме. Тем не менее отдельные эффекты, использующиеся при построении теории ударных волн, в последнее время находят экспериментальное подтверждение.

Косвенным подтверждением теории может служить явление так называемого внезапного начала геомагнитных бурь. Еще в 1955 г. Т. Гойлд сделал заключение, что быстрое нарастание земного магнитного поля (несколько минут) в первой фазе магнитной бури можно объяснить только тем, что солнечные вспышки генерируют ударные волны по межпланетному газу. Приняв

плотность ионов в межпланетной плазме $n \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$ из формулы (88) можно получить толщину фронта ударной волны порядка $10^9 - 10^{10} \text{ см}$, что при скорости 10^8 см/сек дает характерное время 1 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. М., Физматгиз, 1961.
2. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Усп. физ. наук», 73, 701 (1961).
3. Landau L. D. J. Phys. USSR, 10, 25 (1946).
4. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. «Ядерный синтез», 1, 82 (1961).
5. Drummond W. E., Pines D. Salzburg Conference, Paper CN-10/134 (1961).
6. Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1, 123 (1961).
7. Samas M., Kantrowitz A. R., Litvak M. M., Patrick R. M., Petschek H. E. Salzburg Conference, Paper CN-10/132 (1961).
8. Галеев А. А., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 44, 592 (1963).
9. Карпман В. И. «Докл. АН СССР», 152, 587 (1953).
10. Frieman E., Bodner S., Rutherford P. Phys. Fl., 6, 1298 (1963).
11. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 2234 (1962).
12. Adlam J., Allen J. Phil. Mag., 3, 448 (1958).
13. Сагдеев Р. З. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958.
14. Gardner C., Goertzel H., Grad H., Morawetz C., Rose M., Rubin H. Paper No. 374, Geneva Conference (1958).
15. Davies L., Lüst R., Schlüter A. Z. Naturforsch., 13a, 916 (1958).
16. Захаров В. Е., Карпман В. И. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 490 (1962).
17. Sagdeev R. Z. Proceedings of the Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma, Polytechnic Institute of Brooklyn, Apr. 4-6 (1961).
18. Vineman O. Preprint, Stanford University (1961).
19. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 32, 1291 (1962).
20. Шафранов В. Д. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2. М., Госатомиздат, 1963, стр. 3.
21. Галеев А. А., Ораевский В. Н. «Докл. АН СССР», 147, № 1 (1962).
22. Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 31, 1955 (1961).
23. Сагдеев Р. З. Ударные волны в разреженной плазме. Доклад на IV конференции по ионизационным явлениям. Уппсала, 1959.
24. Завойский Е. К. «Атомная энергия», 14, 57 (1963).
25. Карпман В. И. «Ж. техн. физ.», 33, 959 (1963).
26. Карпман В. И., Сагдеев Р. З. «Ж. техн. физ.», 33 (1963).
27. Moiseev S. S., Sagdeev R. Z. J. Nucl. Energy, Part C 5, 43 (1963).
28. Кадомцев Б. Б. В сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. IV. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 364.
29. Auer P. L., Hugwittz H., Kilb R. W. Phys. Fl., 4, 1105 (1961).
30. Parker E. Phys. Rev., 112, 1429 (1958); Kahn F. D., Rev. Mod. Phys., 30, 1069 (1958).
31. Noerdlinger P. Astrophys. J., 133, 1034 (1961).
32. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. «Докл. АН СССР», 146, 329 (1962).

КУЛОНОВСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Д. В. Сивухин

§ 1. Трудности теории кулоновских столкновений

Построение последовательной теории столкновений в плазме наталкивается на большие трудности, связанные с медленным убыванием кулоновских сил с увеличением расстояния между взаимодействующими частицами. В любой момент времени каждая частица плазмы подвергается воздействию громадного числа окружающих частиц, и все эти воздействия должны быть как-то учтены. Вместо простой задачи двух тел мы приходим к труднейшей задаче многих тел. В строгой постановке такая задача вряд ли разрешима. Чтобы сделать решение возможным, необходимо ввести некоторые упрощения. Простейшим является *приближение парных столкновений*, в котором взаимодействие плазменных частиц сводится к независимым и мгновенным взаимодействиям пар частиц. В этом приближении непрерывный процесс взаимодействия каждой частицы с другой частицей плазмы, длящийся бесконечное время, заменяется мгновенным актом столкновения этих частиц, приводящим к тем же окончательным изменениям их энергий и импульсов, что и при действительном процессе за бесконечное время взаимодействия. Благодаря этому при вычислении различного рода величин получаются расходящиеся интегралы. Их расходимость устраняется искусственным обрезанием радиуса действия кулоновских сил. Это приводит к результатам, согласующимся во всех существенных чертах с результатами, к которым приводят другие, более последовательные, хотя и не лишённые принципиальных недостатков, методы учета взаимодействия многих частиц. В настоящей статье мы ограничимся приближением парных столкновений и поэтому начнем изложение с рассмотрения вопроса о столкновении двух частиц. В § 19 будет показано, что учет конечности времени взаимодействия в схеме парных взаимодействий приводит к тем же результатам, которые дает идеализированная схема парных столкновений, где взаимодействия