Доклады Академии наук СССР
1964. Том 154, № 3

ФИЗИКА

А. М. ФРИДМАН

О ЯВЛЕНИЯХ КРИТИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ И АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком Л. А. Арцимовичем 12 X 1963)

1. В ряде экспериментов по диффузии плазмы поперек магнитного поля при монотонном увеличении напряженности магнитного поля, начиная с некоторого значения ее, наблюдается появление «шумов», что говорит о наличии неустойчивости и увеличении диффузии.

В случае $\omega \ll \omega_{H_i}$ (ω — частота шумовых колебаний, ω_{H_i} — циклотронная частота ионов) это явление критического магнитного поля объясняется с помощью неустойчивости, связанной с «ветвью» колебаний, фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью электронов в магнитном поле за счет градиентов давления — «дрейфовыми» волнами (см., например, обзор [1]). Однако в промежутке частот $\omega_{H_i} \ll \omega \ll \omega_{H_e}$ «дрейфовые» волны должны затухать.

Исследование, проведенное в настоящей работе для данного промежутка частот, указывает на существование новой «ветви» колебаний — «антидрейфовых» волн, с помощью которых оказывается возможным оценить величину напряженности критического магнитного поля, получив хорошее согласие с данными эксперимента [2].

2. Рассмотрим слабоионизованную неоднородную плазму достаточной плотности, так что частые столкновения обеспечивают применимость гидродинамического описания движения электронной компоненты (о ионах будет сказано особо).

Пусть плотность заряженных частиц n зависит только от x, а магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$ направлено по оси z. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда температура электронов постоянна и много больше температуры ионов. Для электронов мы будем предполагать справедливость дрейфового приближения ($\omega \ll \omega_{H_e}$ и $\omega_{H_e}\tau_{en} \gg 1$, где ω — частота колебаний, ω_{H_e} — циклотронная частота электронов, τ_{en} — время между электрон-нейтральными столкновениями).

Что касается ионов, то для рассматриваемых здесь частот колебаний ($\omega \gg \omega_{H_i}$ и $\omega_{H_i}\tau_{in} \ll 1$, где ω_{H_i} — циклотронная частота ионов, τ_{in} — время между ион-нейтральными столкновениями) действием магнитного поля на них можно пренебречь.

Возмущение будем предполагать потенциальным ($\delta E_i = -ik_i\delta\varphi$, где E_i — i-я компонента напряженности электрического поля, k_i — i-я компонента волнового вектора, φ — потенциал, под δa подразумевается возмущение величины a) и выберем в виде $\delta a = \delta\tilde{a} \exp(ik_x x + ik_y y + ik_z z + i\omega t)$ (ниже невозмущенные величины будут отмечаться индексом 0). Тогда в предположении квазинейтральности ($n_e = n_i = n$, $\delta n_e = \delta n_i = \delta n$), аналогично [3], в системе координат, где $E_\perp^{(0)} = 0$, имеем следующую линеаризованную систему уравнений:

$$\frac{d}{dx}(T\,\delta n) - en_0\frac{d}{dx}\delta\varphi + \frac{e}{c}n_0\delta v_{ey}B + \ln' n(x)\,T\,\delta n = 0; \qquad (1)$$

$$ik_yT\,\delta n - ik_y en_0\delta\varphi - \frac{e}{c}n_0\delta v_{ex}B = 0; \qquad (2)$$

$$ik_zT\,\delta n - ik_z e n_0 \delta\varphi = -n_0 m_e(\nu_{ei}+\nu_{en})\,\delta v_{e_z} - n_0 m_e \nu_{ei}\delta v_{iz}; \tag{3}$$

$$i\omega\,\delta n + \operatorname{div}(\mathbf{v}_{e0}\,\delta n) + \operatorname{div}(\delta\mathbf{v}_e n_0) = 0; \tag{4}$$

$$i\omega m_i \delta v_{ix} + e\frac{d}{dx}\,\delta\varphi = 0; \tag{5}$$

$$\omega m_i \delta v_{iy} + e k_y \delta\varphi = 0; \tag{6}$$

$$\omega m_i \delta v_{iz} + e k_z \delta\varphi = 0; \tag{7}$$

$$i\omega\,\delta n + \operatorname{div}(n_0 \delta\mathbf{v}_i) + \operatorname{div}(\mathbf{v}_{i0}\delta n) = 0, \tag{8}$$

где T — температура электронов (в предположении, что $T_e \gg T_i$); e — заряд электрона; c — скорость света в вакууме; m_e, m_i — соответственно массы электрона и иона; ν_{ei}, ν_{en} — частоты соответственно электрон-ионных, электрон-нейтральных столкновений; $\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_i$ — направленные скорости соответственно электронов и ионов. В уравнениях (5) — (7) мы пренебрегли диссипативными членами ввиду условия $\omega \gg \nu_{in}$.

Систему уравнений (1)—(8) можно привести к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\delta\varphi}{dx^2} + \left\{ \frac{ik_z^2 \dfrac{\omega^2}{\nu_{en}} \dfrac{m_i}{m_e} + \dfrac{\nu_{en}}{\nu_{en}+\nu_{ei}}\,\omega k_z^2}{i\,\dfrac{k_z^2}{\nu_{en}}\,\dfrac{T}{m_e} - \omega + \dfrac{\omega^2}{\omega_{H_i}}\,\dfrac{\ln' n}{k_y}} - k_y^2 \right\} \delta\varphi = 0. \tag{9}$$

Возникает задача на отыскание собственных значений соответствующих собственных функций, исчезающих вне переходного слоя, где плотность неоднородна.

3. Эффект неоднородности плазмы дают члены, имеющие множитель $\ln' n$. Дисперсионное уравнение (9) для однородной плазмы имеет корни, соответствующие затухающим решениям. Поэтому естественно искать решение вблизи точки максимального градиента плотности.

Подставляя $\ln' n = \ln' n_0\,(1 - x^2/R^2)$ в форму (9), получаем дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{d^2\delta\varphi}{dx^2} + 2\left(E - \frac{\tilde{\omega}^2 x^2}{2}\right)\delta\varphi = 0, \tag{10}$$

где

$$E = \frac{ik_z^2 \dfrac{\omega^2}{\nu_{en}} \dfrac{m_i}{m_e} + \dfrac{\nu_{en}}{\nu_{en}+\nu_{ei}}\,\omega k_z^2}{2\left(i\,\dfrac{k_z^2}{\nu_{en}}\,\dfrac{T}{m_e} - \omega + \dfrac{\omega^2}{\omega_{H_i}}\,\dfrac{\ln' n_0}{k_y}\right)} - \frac{k_y^2}{2}; \tag{11}$$

$$\tilde{\omega}^2 = -\frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_{H_i}}\,\dfrac{\ln' n_0}{k_y}\,\dfrac{1}{R^2}\left(ik_z^2 \dfrac{\omega^2}{\nu_{en}} \dfrac{m_i}{m_e} + \dfrac{\nu_{en}}{\nu_{en}+\nu_{ei}}\,\omega k_z^2\right)}{\left(i\,\dfrac{k_z^2}{\nu_{en}}\,\dfrac{T}{m_e} - \omega + \dfrac{\omega^2}{\omega_{H_i}}\,\dfrac{\ln' n_0}{k_y}\right)^2}\,. \tag{12}$$

Легко видеть, что уравнение (10) в системе единиц, где $h = \mu = 1$ имеет вид уравнения Шредингера для линейного осциллятора с комплексными частотой $\tilde{\omega}$ и энергией E.

Решение такого уравнения, как известно, имеет вид:

$$\delta\varphi_{\tilde{n}} = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^{\tilde{n}}\tilde{n}!}} e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}x^2} H_{\tilde{n}}(x\sqrt{\tilde{\omega}}), \tag{13}$$

где $H_{\tilde{n}}(x\sqrt{\tilde{\omega}})$ — функция Эрмита, $\tilde{n} = 0, 1, 2, \ldots$

Поведение функции $\delta\varphi_{\tilde{n}}$ на бесконечности зависит от знака $\operatorname{Re}\tilde{\omega}$, который определяется из уравнения

$$E_{\tilde{n}} = (\tilde{n} + {}^1/_2)\,\tilde{\omega} \tag{14}$$

подстановкой в него выражений (11) и (12). После простых вычислений получим $\operatorname{Re}\tilde{\omega} > 0$. Последнее обстоятельство говорит о локальном характере возмущений, что подтверждает коорректность изложенного подхода к задаче.

Частоту ω удобно представить в виде

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega, \tag{15}$$

где $\Delta\omega/\omega \ll 1$.

Подставив выражение (15) в уравнение (10), находим

$$\omega = \frac{k_y\omega_{H_i}}{\ln' n_0} + i\frac{k_z^2\omega_{H_i}^2}{\ln'^2 n_0 \nu_{en}}\frac{m_i}{m_e}(1 - r_i^2(T_e)\ln'^2 n_0) - \frac{\omega_{H_i}^2}{\ln'^2 n_0}\tilde{n}\frac{2}{R}\sqrt{-i\frac{k_z^2}{\omega_{H_i}\nu_{en}}\frac{\ln' n_0}{k_y}\frac{m_i}{m_e}}. \tag{16}$$

Из (16) находим, что неустойчивость развивается при условии, когда $r_i^2 \ln'^2 n_0 \gtrsim 1$ *. При увеличении k_z и $\ln' n_0$ растет и инкремент, пока не достигнет своей максимальной величины $\sim\omega$.

Легко видеть, что полученное нами выражение для частоты ω (16) коренным образом отличается от соответствующих выражений, например, в работах ([1,4]). Назовем полученную «ветвь» колебаний антидрейфовыми волнами.

4. Как уже упомянуто, появился ряд экспериментальных работ по определению величины напряженности критического магнитного поля B_c. Оценим критическое поле для нашей модели. При малых H появляется стабилизирующий эффект, связанный с ростом диффузии плазмы поперек магнитного поля. Этот эффект становится существенным, когда

$$\nu \sim \omega > \frac{D}{\lambda_\perp^2} \sim k_y^2 r_e^2 \nu_{en}, \tag{17}$$

где D — коэффициент диффузии, $\lambda_\perp$ — поперечная длина волны возмущения.

Из уравнения (10) при $\nu \to 0$ имеем

$$\omega \sim k_y R \omega_{H_i}. \tag{18}$$

Из условия малости ион-нейтральных столкновений ($\nu_{in} < \omega$) с учетом (18) получаем оценку для k_y:

$$k_y > \frac{\nu_{in}}{\omega_{H_i} R}. \tag{19}$$

---

* Если касаться условий, дающих неустойчивое решение, то следует упомянуть присутствие диссипативного члена в уравнении (3), ибо решение однородной системы уравнений (3) — (8) в пренебрежении малым членом $i\frac{T}{m_e}k_x \ln' n$ дает ионный звук: $\omega^2 = \frac{T}{m_i}k^2$.

Соотношения (17), (18), (19) дают условие неустойчивости

$$(R\omega_{H_i})^2 > r_e^2 \nu_{en} \nu_{in}. \quad (20)$$

Из последнего соотношения определяем величину напряженности критического магнитного поля B_c:

$$B_c \sim \frac{c}{e} \sqrt[4]{T \frac{m_e m_i^2}{R^2} \nu_{en} \nu_{in}}. \quad (21)$$

Для верхнего порога частот $\nu_{en} \sim 170 \cdot 10^7$ сек$^{-1}$ ($\nu_{en}/\nu_{in} \sim 10$, $R \sim 2$ см, $T \sim 1$ эв) напряженность критического поля $B_c \sim 210$ гаусс, для нижнего порога частот $\nu_{en} \sim 10^7$ сек$^{-1}$ (при неизменных остальных параметрах) $B_c \sim 30$ гаусс. Вычисленные порядки величин B_c совпадают с данными в работе ([2]).

Зависимость напряженности критического поля от давления плазмы имеет вид

$$B_c \sim k \sqrt{n_n} \quad (22)$$

(где $k \ll 1$ — постоянный коэффициент), т. е. мало отличается от линейной, что также отмечено в работе ([2]). (Точки, вычисленные по формуле (23), легли на соответствующие кривые графика ([2]).)

В заключение автор выражает благодарность А. А. Галееву и Р. З. Сагдееву за полезные советы и плодотворное обсуждение результатов работы.

Новосибирский
государственный университет

Поступило
12 X 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, Препринт Инст. ядерн. физ. Сибирск. отд. АН СССР, Новосибирск, 1963. [2] R. Geller, Phys. Rev. Lett., September, 15 (1962). [3] С. И. Брагинский, Препринт Инст. атомн. энергии АН СССР, М., 1962. [4] Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ДАН, **138**, 581 (1961); Доклад на конференции по физике плазмы, Зальцбург, сентябрь 1961.