Доклады Академии наук СССР
1964. Том 154, № 5

ФИЗИКА

А. А. ГАЛЕЕВ, В. Н. ОРАЕВСКИЙ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 28 X 1963)

В предыдущей работе ([1]) было показано, что альфвеновская волна конечной, но малой амплитуды ($\delta v \ll v_a$, где δv — амплитуда гидродинамической скорости альфвеновской волны, v_a — альфвеновская скорость) неустойчива в сжимаемой среде. Причина неустойчивости —наличие положительной обратной связи между малыми возмущениями альфвеновского и магнитозвукового типа.

Можно ожидать, что указанный выше механизм должен приводить к неустойчивости и альфвеновских волн не малой амплитуды. Однако естественные математические трудности не позволяют решить задачу для произвольного профиля исходной альфвеновской волны *. Поэтому здесь мы исследуем устойчивость альфвеновской волны с пилообразным профилем магнитных силовых линий. Задача устойчивости сводится к нахождению частот собственных колебаний среды в периодическом поле исходной альфвеновской волны. Перейдем в систему координат, движущуюся вместе с исходной волной. В нашем случае уравнения идеальной магнитной гидродинамики для малых возмущений имеют периодические по координатам коэффициенты, так что возмущения скорости $\mathbf{v}$, магнитного поля $\mathbf{h}$ и плотности ρ_1 представимы в виде:

$$\psi = u(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{pr} - i\omega t}, \tag{1}$$

где ψ — любая из величин $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$, ρ_1; $u(\mathbf{r})$ — периодическое (с периодом исходной альфвеновской волны) решение уравнений; ω — частота возмущений.

В областях, где магнитное поле постоянно, малые возмущения являются суперпозицией альфвеновской, магнитозвуковых и энтропийной волн. Кроме того, необходимо учитывать малое смещение границы между областями с постоянным магнитным полем. На самой границе должны выполняться условия непрерывности потока массы, энергии, импульса, нормальной к разрыву составляющей магнитного поля и тангенциальной составляющей электрического поля ([2]).

Выберем ось x вдоль направления невозмущенного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, а ось y — вдоль направления колебаний гидродинамической скорости альфвеновской волны $\delta\mathbf{v}$, распространяющейся вдоль $\mathbf{H}_0$. Тогда линеаризованные относительно малых возмущений условия непрерывности приводятся к виду **

$$\{\rho_1\} = 0,$$
$$\left\{v_{x,z} + \frac{h_{x,z}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}\right\} = 0, \quad \left\{v_y + \frac{h_y}{\sqrt{4\pi\rho_0}} + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0}\delta v\right\} = 0, \tag{2}$$
$$\{h_y \delta H + h_x H_0\} = 0,$$

* Известно, что альфвеновские волны произвольного профиля и произвольной амплитуды являются точными решениями идеальной магнитной гидродинамики.

** Условия (2) написаны нами для адиабатических возмущений, которые только и рассматриваются в дальнейшем. Кроме того, при получении (2) была использована связь возмущения скорости границы δD с ее смещением $\xi(y, z) \sim \exp\{ik_y y + ik_z z\}$; $\delta D = -i\omega\xi(y, z)$.

где ρ_1, $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$ — соответственно возмущения плотности, гидродинамической скорости и магнитного поля; $\delta H = -\sqrt{4\pi\rho_0}\delta v$ — магнитное поле альфвеновской волны; δD — возмущение скорости границы между областями с постоянным магнитным полем. Посредством фигурных скобок мы обозначили разность значений возмущенных величин с обеих сторон поверхности разрыва.

Для простоты рассмотрим случай, когда скорость и магнитное поле возмущений лежат в плоскости (x, y) (см. рис. 1). Тогда решения в областях с постоянным магнитным полем можно представить в виде суперпозиции медленных и быстрых магнитозвуковых волн. (Связь величин ρ_1, $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$ в волнах находится из магнитогидродинамических уравнений.) Пусть в интервале $-b < x < 0$ решение есть

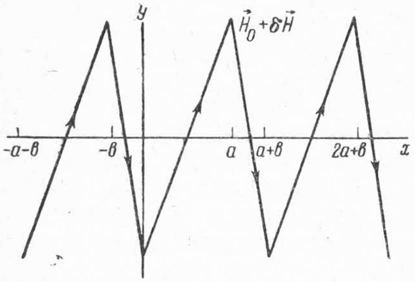

Рис. 1

$$\psi = (c_1 e^{ik_1^- x} + c_2 e^{i\tilde{k}_1^- x} + c_3 e^{ik_2^- x} + c_4 e^{i\tilde{k}_2^- x})\, e^{-i\omega t + ik_y y},$$

где $k_{1,2}^-$ — составляющие волновых векторов по оси x соответственно для медленной и быстрой магнитозвуковых волн; k и $\tilde{k}$ — соответствуют двум линейно независимым решениям с данной частотой ω.

Аналогично в интервале $0 < x < a$ имеем:

$$\psi = (c_5 e^{ik_1^+ x} + c_6 e^{i\tilde{k}_1^+ x} + c_7 e^{ik_2^+ x} + c_8 e^{i\tilde{k}_2^+ x})\, e^{-i\omega t + ik_y y}.$$

Решение в области $a < x < a + b$ получаем из условия периодичности (1):

$$\psi = (c_1 e^{ik_1^-(x-a-b)} + c_2 e^{i\tilde{k}_1^-(x-a-b)} + c_3 e^{ik_2^-(x-a-b)} + c_4 e^{i\tilde{k}_2^-(x-a-b)})\, e^{-i\omega t + ip(a+b) + ik_y y}.$$

Граничные условия (2) представляют собой систему 8 линейных уравнений для 8 коэффициентов $c_1, \ldots, c_8$. Из условия разрешимости этой системы получаем дисперсионное соотношение $\omega = \omega\,(p, k_y)$. В общем случае оно имеет довольно громоздкий вид. Поэтому мы приведем его для наиболее интересного случая волны большой амплитуды ($\delta v \gg v_a$), распространяющейся в среде малого давления ($c_s \ll v_a \ll \delta v_a$, c_s — скорость звука):

$$\sin\left(\frac{\omega c_s a}{v_a \delta v_a}\right) \sin\left(\frac{\omega c_s b}{v_a \delta v_a}\right) \Big[\cos p\,(a + b) - \cos k_2^- b \cos k_2^+ a + $$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{k_2^+}{k_2^-} + \frac{k_2^-}{k_2^+}\right) \sin k_2^- b \sin k_2^+ a\Big] = -6\,\frac{c_s v_a}{\omega \delta v_a} \sin\left(\frac{\omega c_s b}{v_a \delta v_a}\right) \times$$
$$\times \Big\{[k_2^- \cos k_2^+ a \sin k_2^- b + k_2^+ \sin k_2^+ a \cos k_2^- b] \cos\left(\frac{\omega c_s a}{v_a \delta v_a}\right) -$$
$$- k_2^+ \sin k_2^+ a \cos\left(\frac{\omega + k_y \delta v_a}{v_a}\, a - p\,(a + b)\right) - k_2^- \sin k_2^- b \cos\left(\frac{\omega + k_y \delta v_a}{v_a}\, a\right)\Big\} -$$
$$- 6\,\frac{c_s v_a}{\omega \delta v_a} \sin\left(\frac{\omega c_s a}{v_a \delta v_a}\right) \Big\{[k_2^- \cos k_2^+ a \sin k_2^- b + k_2^+ \sin k_2^+ a \cos k_2^- b] \cos\left(\frac{\omega c_s b}{v_a \delta v_a}\right) -$$
$$- k_2^+ \sin k_2^+ a \cos\left(\frac{\omega - k_y \delta v_a}{v_a}\, b\right) - k_2^- \sin k_2^- b \cos\left(\frac{\omega - k_y \delta v_a}{v_a}\, b - p\,(a + b)\right)\Big\}, \quad (3)$$

где $k_2^{\pm} = \dfrac{\omega}{\delta v_a}\sqrt{1 \pm k_y \dfrac{\delta v_a}{\omega}}$, $\delta v_a = -\delta v$.

В пренебрежении правой частью уравнение (3) имеет действительные корни. Корни, соответствующие первым двум сомножителям, относятся к медленной магнитозвуковой волне и имеют вид, напоминающий условия для волновых чисел в резонаторе $\left(\frac{\omega}{v_a}\frac{c_s}{\delta v_a} = \frac{\pi n}{a},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$. Третий сомножитель относится к быстрой волне и по форме совпадает с уравнением для энергии электрона в периодическом поле. Учет правой части дает поправку к частотам нулевого приближения. Если в нулевом приближении два корня (соответствующие медленной и быстрой волнам) совпадают, то квадрат поправки к частоте оказывается отрицательным. В этом случае инкремент раскачки малых возмущений, наложенных на исходную альфвеновскую волну, по порядку величины равен

$$\nu \simeq v_a / a. \tag{4}$$

Рассмотренная неустойчивость напоминает неустойчивость альфвеновской волны малой амплитуды по отношению к одновременному возбуждению медленной и быстрой магнитозвуковых волн ([1]).

Авторы выражают признательность акад. М. А. Леонтовичу за обсуждение результатов и Р. З. Сагдееву, советы и интерес к работе которого стимулировали ее выполнение.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
21 X 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, ДАН, **147**, 71 (1962). [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1959.