Доклады Академии наук СССР
1964. Том 157, № 5

ФИЗИКА

А. А. ГАЛЕЕВ, В. И. КАРПМАН, Р. З. САГДЕЕВ

ОБ ОДНОЙ РЕШАЕМОЙ ПРОБЛЕМЕ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПЛАЗМЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 28 II 1964)

В последние годы в ряде работ по теории турбулентности плазмы наметился существенный прогресс. Оказалось, что в тех случаях, когда спектр турбулентных пульсаций плазмы представляет собой совокупность плазменных волн, картина турбулентности может быть описана замкнутой системой интегро-дифференциальных уравнений для усредненной функции распределения частиц плазмы (так называемое квазилинейное кинетическое уравнение ([1, 2])) и для спектральных плотностей энергий различных плазменных волн (кинетические уравнения для взаимодействующих волн ([3])). Эта замкнутая система легко получается при переходе от динамического описания плазмы и самосогласованных электромагнитных полей к статистическому описанию, если воспользоваться гипотезой случайных фаз и теорией возмущений — разложением по малому параметру ν/ω (ν, ω — мнимая и действительная части частоты). В сущности, такое разложение является разложением по малости отношения энергии взаимодействия волн к их полной энергии. Важнейшим приложением получающейся на таком пути теории турбулентности является построение схемы явлений переноса в турбулентной плазме. При этом наиболее трудной частью задачи оказывается отыскание спектра турбулентных пульсаций. Трудность проистекает из-за нелинейности интегрального кинетического уравнения для спектральной плотности энергии волн. Все сделанные до сих пор попытки ([4–9]) представляют собой лишь достаточно грубые оценки.

В этой связи нам представляется важным исследование частных классов задач, допускающих аналитическое решение. Оказывается, что одной из решаемых задач такого типа является задача о нелинейной эволюции во времени спектра ленгмюровских электронных колебаний в однородной плазме без магнитного поля. Как будет видно ниже, эта задача является весьма поучительной еще по одной причине: в нелинейной релаксации электронных колебаний главную роль играют ионы, что, на первый взгляд, могло бы показаться пародоксальным.

Поскольку вывод исходных интегральных уравнений достаточно прост, мы воспроизведем его полностью. При этом мы будем пользоваться методом асимптотической теории возмущений ([1, 2]) (громоздкость других методов ([10, 11]) не представляется нам достаточно оправданной).

Итак, будем исходить из кинетических уравнений для функций распределения ионов и электронов и уравнения Пуассона для потенциала φ электрического поля колебаний:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla f_j - \frac{e_j}{m_j}\nabla\varphi\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \Delta\varphi = -4\pi\sum_j e_j\int f_j(\mathbf{v})\,d\mathbf{v}. \qquad (1)$$

Разобьем функцию распределения частиц $f_j(\mathbf{v}, t)$ на медленно меняющуюся $f_{0j}(\mathbf{v}, t)$ и быстро осциллирующую части $f_j^{(1)}$ ([1, 2]). Потенциал электрического поля колебаний представляем в виде

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k},\,\omega} \varphi_{\mathbf{k}\omega} e^{-i(\omega t - \mathbf{k},\,\mathbf{r})}, \qquad \varphi_{\mathbf{k}\omega} = \varphi_{\mathbf{k}} \delta_{\omega,\,\omega_{\mathbf{k}}} + \varphi'_{\mathbf{k}\omega}, \tag{2}$$

где $\varphi_{\mathbf{k}}$ — амплитуда собственного колебания, реальная часть частоты которого ω_k связана с волновым вектором $\mathbf{k}$ дисперсионным соотношением; $\varphi'_{\mathbf{k}\omega}$ — амплитуда «вынужденного» колебания.

В дальнейшем нам будет удобно представить медленную зависимость амплитуды $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ от времени в экспоненциальном виде и включить ее в частоту ω. Для колебаний малой амплитуды уравнение (1) для быстро осциллирующей части функции распределения $f_j^{(1)}(\mathbf{v}, t)$, представленной в виде (2), будем решать методом последовательных приближений. Тогда с учетом членов третьего порядка по амплитудам $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ имеем

$$f^j_{\mathbf{k},\,\omega} = \mu^j_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v})\,\varphi_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{\omega',\,\omega'',\,\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\,\mathbf{k}''\omega''} \varphi_{k'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} e^{-i(\omega'+\omega''-\omega)t} +$$
$$+ \sum_{\omega',\,\omega'',\,\omega''',\,\mathbf{k}'+\mathbf{k}''+\mathbf{k}'''=\mathbf{k}} \mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\,\mathbf{k}''\omega'',\mathbf{k}'''\omega'''} \varphi_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi_{\mathbf{k}''\omega''} \varphi_{\mathbf{k}'''\omega'''} e^{-i(\omega'+\omega''+\omega'''-\omega)t}, \tag{3}$$

где

$$\mu^j_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = -\frac{e_j}{m_j} \frac{\mathbf{k}\, df_{0j}/d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0}.$$

$$\mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\,\mathbf{k}''\omega''} = \frac{e_j^2}{2m_j^2} \frac{1}{\omega' + \omega'' - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \Big[\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega'' + \mathbf{k}''\mathbf{v} + i0} k'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} +$$
$$+ \mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\Big] f_{0j}(\mathbf{v}), \tag{4}$$

$$\mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\,\mathbf{k}''\omega'',\mathbf{k}'''\omega'''} = -\frac{e_j^3}{2m_j^3} \frac{1}{\omega' + \omega'' + \omega''' - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega'' + \omega''' - (\mathbf{k}'' + \mathbf{k}''',\,\mathbf{v}) + i0} \times$$
$$\times \Big[\mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega''' - \mathbf{k}'''\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}''' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{k}''' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\Big] f_{0j}(\mathbf{v}).$$

Предполагая распределение фаз колебаний случайным, можно провести усреднение по ним в уравнении Пуассона, где плотность заряда вычисляется согласно (3). В результате для амплитуд колебаний получаем уравнение:

$$\mathrm{Im}\Big\{\varepsilon^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) - \sum_{k',\,\omega'} \frac{\varepsilon^{(2)}_{k'k''}(\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\, \varepsilon^{(2)}_{\mathbf{k},\,-\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}})}{\varepsilon^{(1)}(\omega_k - \omega_{k'},\, \mathbf{k} - \mathbf{k}')} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 +$$
$$+ \sum_{k'} \varepsilon^{(3)}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k},\,-\mathbf{k}'}(\omega', \omega, -\omega')\,|\varphi_{\mathbf{k}'}|^2\Big\} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 -$$
$$- \mathrm{Im} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \frac{|\varepsilon^{(2)}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})|^2}{\varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''},\, \mathbf{k})} |\varphi_{k'}|^2 |\varphi_{k''}|^2 = 0. \tag{5}$$

До сих пор мы включали медленное изменение амплитуды колебаний в мнимую часть частоты. Теперь удобно перейти к действительным частотам, а амплитуды $\varphi_{\mathbf{k}}$ считать медленно зависящими от времени. Этот переход легко осуществляется с помощью замены

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})\,|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \to -\frac{\partial \varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial i\omega_{\mathbf{k}}} \frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} + \mathrm{Im}\,\varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})\,|\varphi_{\mathbf{k}}|^2. \tag{6}$$

При этом следует помнить, что полюса в интегралах, определяющих диэлектрическую проницаемость, обходятся согласно указанным в (4) правилам. Связь $\varepsilon^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$, $\varepsilon^{(2)}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \ldots}$ с $\mu^j_{\mathbf{k}\omega}$, $\mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'', \ldots}$ очевидна.

Для медленно меняющейся под действием колебаний усредненной функции распределения $f_{0j}(\mathbf{v}, t)$, следуя общим правилам ([1], [2]), получаем с учетом взаимодействия колебаний

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{0j}}{\partial t} = {} & \frac{e_j^2}{m_j^2} \sum_{\mathbf{k}} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\nu_{\mathbf{k}}}{(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 + \nu_{\mathbf{k}}^2} \mathbf{k} \frac{d f_{0j}}{d \mathbf{v}} - \\
& - \operatorname{Im} \frac{e_j}{m_j} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \sum_{\mathbf{k}'} \mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\, \mathbf{k}-\mathbf{k}',\, \omega-\omega'} \frac{\varepsilon^{(2)}_{\mathbf{k},\, -\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'})}{\varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'},\, \mathbf{k} - \mathbf{k}')} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 + \right. \\
& + \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \frac{\mu^{\mathbf{k}j*}_{\mathbf{k}'\omega',\, \mathbf{k}''\omega''} \varepsilon^{(2)}_{\mathbf{k}',\, \mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})}{\varepsilon^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''},\, \mathbf{k})} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}''}|^2 - \\
& \left. - \sum_{\mathbf{k}'} \mu^{\mathbf{k}j}_{\mathbf{k}'\omega',\, \mathbf{k}''\omega'',\, -\mathbf{k}''',\, -\omega'''}(\mathbf{v}) |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \right\}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Уравнения (5), (7) представляют собой полную систему уравнений, описывающих турбулентную кинетику разреженной плазмы без магнитного поля, с точностью до членов, квадратичных по энергии колебаний. Перейдем теперь непосредственно к вопросу о нелинейной релаксации электронных плазменных колебаний.

Для продольных электронных колебаний невозможно удовлетворить «распадным» условиям ($\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$), поэтому резонансный переход энергии только между волнами невозможен и взаимодействие между двумя волнами осуществляется лишь при участии части «фона». Последние могут интенсивно взаимодействовать лишь с вынужденными колебаниями, частота которых равна разности собственных частот колебаний $\omega = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}$.

Как показали Драммонд и Пайнс на примере одномерного спектра ([2]), в первом неисчезающем порядке по отношению r_D/λ $\left(r_D \simeq \sqrt{T/4\pi e^2 n}\right.$ — дебаевский радиус, λ — длина волны колебаний$\left.\right)$ единственным эффектом взаимодействия колебаний является перекачка энергии из коротковолновых масштабов в длинноволновые. Эффекты затухания одномерного пакета, появляющиеся в более высоких порядках по отношению r_D/λ, были рассмотрены В. И. Карпманом ([7]) *. Однако в этих работах пренебрегали влиянием ионов, которое, вообще говоря, в ряде случаев становится существенным.

В качестве примера рассмотрим изотропный (трехмерный) волновой пакет. Оказывается, что если ширина его удовлетворяет условию

$$
r_D \Delta k \lesssim \left(\frac{1}{k r_D} \frac{V_{Ti}}{V_{Te}} \right)^{2/3}, \qquad (8)
$$

где $V_{Ti,e} = \sqrt{2T_{i,e}/m_{i,e}}$ — тепловые скорости частиц, то в (5) следует учесть взаимодействие вынужденных колебаний лишь с ионами. Сохраняя главные по отношению r_D/λ члены как в перекачке энергии, так и в затухании колебаний, можно записать (5) с учетом (6) в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = {} & \omega |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^2}{k^2} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 / 16\pi n_0 T \times \\
& \times \operatorname{Im} \frac{1 + 4(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})/\omega}{2 - i\sqrt{\pi} \dfrac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| V_{Ti}} w\left(\dfrac{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| V_{Ti}} \right)}, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

где $w(z) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{z - t} dt$, $T_i = T_e$. Из этого выражения следует, что, как и в одномерном случае, эффекты затухания меньше, чем передача энер-

* Величина затухания, приведенная в этой статье, оказалась численно завышенной из-за допущенного при вычислениях чрезмерного огрубления.

гии по спектру, причем, ввиду узости максвелловского распределения для ионов, взаимодействуют между собой лишь волны с очень близкими значениями модуля волнового вектора в интервале $\delta k r_D < \sqrt{m_e/m_i} \ll \Delta k r_D$. Последнее обстоятельство позволяет воспользоваться разложением подынтегрального выражения в ряд по малой разности $(k'^2 - k^2)\, r_D^2$ в результате чего интегро-дифференциальное уравнение (9) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \tau} - E_k \frac{\partial E_k}{\partial \chi} = -\gamma E_k^2, \tag{10}$$

где $E_k = \frac{4\pi k^3}{3} \frac{k^2 |\varphi_k|^2}{4\pi n T}$, $\tau = \frac{\pi m_e}{6\gamma m_i} \omega t$, $\chi = \frac{k^2}{\Delta k \cdot k_0}$, $\frac{\gamma}{6} = (\sqrt{\Delta k k_0} r_D)^2 \lesssim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$,

Δk — характерная ширина пакета, k_0 — среднее волновое число пакета волн.

Решение этого уравнения имеет вид

$$E_k = e^{\gamma\chi} f\left(\frac{1 - e^{-\gamma\chi} + \tau\gamma e^{-\gamma\chi} E_k}{\gamma}\right), \tag{11}$$

где $f\,((1 - e^{-\gamma x})/\gamma)$ — распределение энергии в пакете в начальный момент времени. Отсюда следует, что основным эффектом временной эволюции пакета является его сужение. Однако само уравнение (10) справедливо лишь при условии, что разброс фазовых скоростей в пакете волн значительно больше теплового разброса скоростей ионов $(\Delta k \cdot r_D \geqslant \sqrt{m_e/m_i})$.

Как только пакет стал достаточно узким, мы не может представить его эволюцию аналитическим образом. Однако физическая картина по-прежнему ясна. Пакет продолжает сужаться до тех пор, пока не скажется четырехплазменное взаимодействие *. Время уширения пакета за счет четырехплазменного взаимодействия легко оценить, зная $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$. По порядку величины оно дается выражением

$$\tau \sim \omega^{-1} (\Delta k r_D)^2 (W/nT)^{-2}, \tag{12}$$

где $W = \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{\mathbf{k}}^2$ — полная энергия пакета волн. Сравнивая его с характерным временем сужения, можно найти установившуюся квазистационарную ширину Δk:

$$\Delta k r_D \sim (W/nT)^{1/3} (m_e/m_i)^{1/6} \leqslant \sqrt{m_e/m_i}. \tag{13}$$

Установление узкого квазистационарного пакета происходит настолько быстро, что затухание $\left(\text{или нарастание при другом знаке } \left.\frac{df}{dv}\right|_{v=\Delta\omega/\Delta k}\right)$ в течение процесса установления можно было не учитывать.

Новосибирский государственный университет

Поступило 20 II 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961). [2] W. Drummond, D. Pines, Доклад № 134, представленный на конференцию по физике плазмы и контролируемым термоядерным реакциям, Зальцбург, сентябрь 1961 г. [3] M. Camac et al., Ядерный синтез, Дополнение 1962, кн. 2, 423 (1962). [4] А. А. Галеев, В. И. Карпман, ЖЭТФ, 44, 592 (1963). [5] А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, Препринт Инст. ядерн. физ. Сибирск. отд. АН СССР, 1963. [6] А. А. Галеев, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ, 45, 547 (1963). [7] В. И. Карпман, ДАН, 152, 587 (1963). [8] Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ, 45, 1230 (1963). [9] В. И. Карпман, Прикл. мех. и техн. физ., № 6, 34 (1963). [10] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962). [11] В. П. Силин, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 1, 31 (1964).

* С помощью квазилинейных уравнений (7) легко показать, что время установления «плато» на функции распределения всегда значительно больше (12).