

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ, С. С. МОЙСЕЕВ, Р. З. САГДЕЕВ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА
С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ**

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 11 V 1964)

В задаче на собственные колебания в средах с медленно меняющимися параметрами часто применяется метод геометрической оптики (ВКБ-приближение), хорошо разработанный для дифференциальных уравнений второго порядка. Часто, однако, в различных приложениях задача на собственные колебания приводит к необходимости исследования дифференциальных уравнений более высокого порядка. Классическим примером является известное в теории гидродинамической устойчивости уравнение Орра — Зоммерфельда⁽¹⁾, содержащее малый параметр при четвертой производной. Нас будет интересовать в случае слабонеоднородной среды дифференциальное уравнение

$$\alpha\beta^2\varphi^{IV} - \beta U_2(x, k, \omega)\varphi'' + U_1(x, k, \omega)\varphi = 0, \quad (1)$$

где k, ω — соответственно волновой вектор и частота волны; β — малый параметр «квазиклассичности», учитывающий слабую неоднородность по x ; α — малый параметр, связанный с конкретной постановкой задачи (в уравнении Орра — Зоммерфельда, например, α пропорционально вязкости); $U_2 \sim 1$ за исключением малых областей вблизи точек, где U_1 и U_2 обращаются в нуль. Отметим, что, как будет видно из дальнейшего, метод ВКБ нарушается не только вблизи точек, где $U_1 = 0$ (вблизи таких точек для двух из решений (1) волновой вектор становится малым), но также и вблизи точек, где $U_2 = 0$. В связи с этим возникает задача при учете указанных особенностей получить правила нахождения собственных частот («правила квантования») для финитных решений (1).

Для удобства выберем конкретный вид U_1, U_2 как показано на рис. 1. Решения (1) вдали от A, B, O_1, O_2 (точки поворота) отыскиваются в виде асимптотического ряда по малому параметру $\sqrt{\beta}$ и имеют

$$\varphi_{1,2} = \frac{\text{const}}{\sqrt{q_{1,2}}} \exp \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int q_{1,2}(x) dx, \quad (2)$$

$$\varphi_{3,4} = \frac{\text{const}}{\sqrt{q_{3,4}^5}} \exp \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int q_{3,4}(x) dx, \quad (3)$$

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} - \sqrt{\frac{U_2^2}{4\alpha^2} - \frac{U_1}{\alpha}}}, \quad q_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{U_2^2}{4\alpha^2} - \frac{U_1}{\alpha}}}. \quad (4)$$

* Здесь и далее для удобства обозначений выписан предэкспоненциальный множитель, действительный при $x > \sqrt{\alpha}$.

Для получения решения вблизи точек, где $U_2 = 0$, полагаем $U_2 = U_1(U - 1)$, $x = \beta y$. Это приводит к уравнению

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \varphi^{IV} - U y \varphi'' + U_1 \varphi = 0. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что вблизи точки, где $U_2 = 0$, существуют две точки, где соответственно $q_1 = q_3$, $q_2 = q_4$ (точки «пересечения» решений). Вблизи указанных точек строгое разделение «нормальных» решений (2) и (3) между собой, вообще говоря, невозможно — они «трансформируются» друг в друга.

Физическая картина решения задачи существенно зависит от величины параметра α/β^2 . Если $\alpha/\beta^2 \ll 1$, то, как видно из (4), расстояние между точками «пересечения» решений мало по сравнению с длиной волны пересекающихся решений. Отметим, что только этот случай исследовался при изучении пуазейлевского течения ⁽¹⁾, а также в связи с другими физическими задачами ⁽²⁾. При этом связь между решениями $\varphi_{1,2}$ и $\varphi_{3,4}$ осуществляется только в следующем порядке по α/β^2 * (слабая связь). Финитным решениям в рассматриваемом случае соответствуют следующие «правила квантования» ⁽⁴⁾:

$$\int_{0_1}^{0_2} \sqrt{\frac{U_2}{\alpha\beta}} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi; \quad \int_{0_2}^A \sqrt{\frac{U_1}{\beta U_2}} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi. \quad (6)$$

Качественно новая картина возникает при $\alpha/\beta^2 \gg 1$. В этом случае вокруг каждой точки «пересечения» решений всегда можно выделить такую

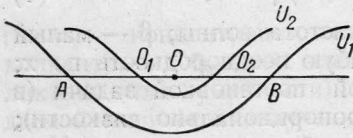


Рис. 1

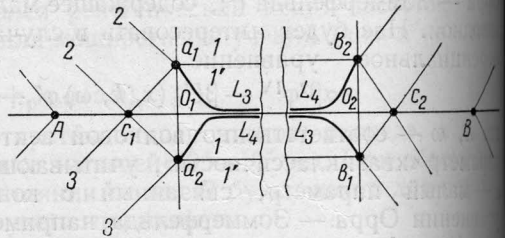


Рис. 2

область в комплексной x -плоскости, где справедливо «квазиклассическое» приближение (2), (3) для решения (5). Очевидно, что вблизи таких точек решение типа (2) может уже в нулевом приближении «трансформироваться» в решение типа (3) и наоборот (сильная связь).

Решения уравнения (5) получим, применяя метод Лапласа:

$$\varphi(y) = \int \frac{1}{t^2} \exp \left\{ yt - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{t^3}{3U} + \frac{1}{t} \frac{U_1}{U} \right\} dt, \quad (7)$$

где интеграл берется в плоскости комплексного переменного t по контуру, на концах которого функция $\exp \left\{ yt - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{t^3}{3U} + \frac{1}{t} \frac{U_1}{U} \right\}$ обращается в нуль.

Решение (7), как и само уравнение (5), справедливо в области $y < 1/\beta$. При

$$1 < y < 1/\beta. \quad (8)$$

для вычисления (7) можно воспользоваться методом перевала и получить следующие четыре линейно независимые решения:

$$\varphi_i(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{y \left(\frac{U_1}{U} \frac{1}{q_i^3} - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{1}{U} \right)}} \frac{1}{q_i^2} \exp \int \bar{q}_i(y) dy \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

* За исключением некоторой области комплексной x -плоскости (см. (3)).

$$\begin{aligned}\bar{q}_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{\beta^2 U}{\alpha}} \frac{U}{2} \sqrt{y - \sqrt{y^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U_2}}}, \\ \bar{q}_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{\beta^2 U}{\alpha}} \frac{U}{2} \sqrt{y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U_2}}}.\end{aligned}\quad (10)$$

Используя (10), получаем решения (9) в виде:

$$\Phi_{1,2} \sim (\bar{q}_i)^{-1/4} \exp \int^y \bar{q}_i(y) dy, \quad \Phi_{3,4} \sim (\bar{q}_i)^{-5/4} \exp \int^y \bar{q}_i(y) dy, \quad (11)$$

которые соответственно переходят в (2) и (3). Точкам «пересечения» решений соответствует

$$y_0 \equiv ia = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U^2}}. \quad (12)$$

Из (12) и (8) следует, что при $\alpha/\beta^2 \gg 1$, в согласии со сказанным ранее, точки y_0 всегда могут быть окружены областью, где можно воспользоваться решением (9), переходящим в «квазиклассические» решения (2) и (3).

Отметим, что в непосредственной близости от точек y_0 контуры в плоскости t , соответствующие линейно независимым решениям (5), сливаются и необходимо дополнительное исследование характера решений в точках y_0 . Нас, однако, этот вопрос интересовать не будет, поскольку для получения квазиклассических «правил квантования» достаточно знать правила обхода точек y_0 в комплексной x -плоскости.

Воспользуемся представлением:

$$\begin{aligned}\pm \sqrt{y - \sqrt{y^2 + a^2}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{y + ia} - \sqrt{y - ia}) & (y > 0), \\ &= \pm \frac{i}{\sqrt{2}} (\sqrt{|y| + ia} - \sqrt{|y| - ia}) & (y < 0); \\ \pm \sqrt{y + \sqrt{y^2 + a^2}} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{y + ia} + \sqrt{y - ia}) & (y > 0), \\ &= \pm \frac{i}{\sqrt{2}} (\sqrt{|y| + ia} + \sqrt{|y| - ia}) & (y < 0).\end{aligned}$$

После этого решения (2), (3) для (5) записываются в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_{1,2} &= (\omega_1 - \omega_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^y (\omega_1(y) - \omega_2(y)) dy \right\} & (y > 0), \\ &= (\omega_1 - \omega_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int^y (\omega_1(|y|) - \omega_2(|y|)) dy \right\} & (y < 0); \\ & & (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{3,4} &= (\omega_1 + \omega_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int^y (\omega_1(y) + \omega_2(y)) dy \right\} & (y > 0), \\ &= (\omega_1 + \omega_2)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^y (\omega_1(|y|) + \omega_2(|y|)) dy \right\} & (y < 0).\end{aligned}$$

$$\text{где } \omega_1 = \sqrt{\frac{\beta^2 U}{2\alpha}} (y - ia), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\beta^2 U}{2\alpha}} (y + ia).$$

Пользуясь формулами (13), можно построить картину линий уровня ω_1, ω_2 для каждой из точек пересечения решений отдельно (рис. 2)*. Правила сшивания решений (13) вблизи точки O_1 получим следующим образом. Из (13) видно, что можно обходить отдельно в комплексной y -плоскости вокруг точек $a_1 = ia$ и $a_2 = -ia$. При обходе вокруг a_1 пары решений (Φ_1, Φ_4) и (Φ_2, Φ_3) , а при обходе вокруг a_2 пары (Φ_1, Φ_3) и (Φ_2, Φ_4) ведут себя независимо. Обозначим через A_i, B_i, C_i, D_i систему коэффициентов решения при $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ соответственно вблизи линий с номером i , выходящих из:

* Смысл всех обозначений и букв, не оговариваемых в тексте, ясен из рис. 2.

точек a_1, a_2 . Пользуясь при обходе вокруг каждой точки в отдельности правилами типа (9), получаем после одновременного обхода a_1, a_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + iD_1, & B_2 &= B_1 + iD_1, & C_2 &= iA_1 + iB_1 + C_1 - D_1, & D_2 &= D_1, \\ A_3 &= A_2 + iC_2, & B_3 &= B_2 + iC_2, & C_3 &= C_2, & D_3 &= iA_2 + iB_2 - C_2 + D_2, \\ A'_1 &= A_3 + iD_3, & B'_1 &= B_3 + iD_3, & C'_1 &= iA_3 + iB_3 + C_3 - D_3, & D'_1 &= D_3, \\ & & A'_1 &= -B_1, & B'_1 &= -A_1, & C'_1 &= -D_1, & D'_1 &= -C_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Слева от точки A запишем произвольное решение, обращающееся на $-\infty$ в нуль:

$$\begin{aligned} \varphi &= |\omega_1 - \omega_2|^{-1/2} \exp \left\{ -i \int_A^y \omega_1(y) dy + i \int_A^y \omega_2(y) dy \right\} + \\ &+ D |\omega_1 + \omega_2|^{-1/2} \exp \left\{ \int_A^y \omega_1(y) dy + \int_A^y \omega_2(y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (13) — (15) и требуя финитность решения на $+\infty$, получаем следующие «правила квантования»:

$$\begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, & \Phi_1 &= i \int_{L_1} p_1 dz - i \int_{L_2} p_2 dz, \\ \Phi_2 &= \int_{L_3} p_1 dz + \int_{L_4} p_2 dz, & \Phi_3 &= -i \int_{L'_1} p_1 dz + i \int_{L'_2} p_2 dz, \end{aligned} \quad (16)$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{2x} (U_2 - \sqrt{4U_1\alpha/\beta^2})}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{\beta^2}{2x} (U_2 + \sqrt{4U_1\alpha/\beta^2})}.$$

Здесь контуры L_1, L_2 начинаются из точки A , идут вдоль действительной оси и заканчиваются: контур L_1 в точке a_1 , а L_2 — в точке a_2 . Контуры L_3, L_4 начинаются соответственно в точках a_1, a_2 , затем спускаются на действительную ось, идут вдоль нее и заканчиваются соответственно в точках b_1, b_2 . Контуры L'_1, L'_2 аналогичны контурам L_1, L_2 с заменой a_1, a_2 на b_1, b_2 и A на B . Выражения для p_1, p_2 вблизи точек O_1, O_2 переходят соответственно в ω_1, ω_2 .

Нетрудно убедиться в том, что определенные в (18) величины Φ_1, Φ_2, Φ_3 чисто действительные. Рассмотрим, например, Φ_2 . Учитывая, что на действительной оси L_3 и L_4 совпадают, имеем: $\int_{O_1}^{O_2} (p_1 + p_2) dy$ чисто действительный. Кроме того,

$$\int_{a_2}^{O_1} \sqrt{z + ia} dz = (ia)^{3/2}, \quad \int_{a_1}^{O_1} \sqrt{z - ia} dz = (-ia)^{3/2}.$$

откуда сразу следует высказанное утверждение.

Выражаем благодарность А. А. Галееву, И. Б. Хриповичу, В. Н. Орловскому за ценные дискуссии.

Новосибирский
государственный университет

Поступило
23 IV 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., 1958.
² В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., 1960.
В. В. Железняков, Е. Я. Злотник, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 5, 644 (1962); D. Tidman, Phys. Rev., 117, 366 (1960).
³ W. Wasow, Ann. Math., 49, 852 (1948).
⁴ Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, Докл. на II Всесоюз. съезде механиков, М., 1964.
⁵ W. H. Furry, Phys. Rev., 71, 360 (1947).