Доклады Академии наук СССР
1964. Том 159, № 2

ФИЗИКА

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ, Б. В. ЧИРИКОВ

О МЕХАНИЗМЕ УСКОРЕНИЯ ФЕРМИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 11 V 1964)

Для объяснения происхождения космических лучей Ферми ([1]) предложил статистический механизм ускорения частиц при столкновении их с макроскопическими космическими облаками по аналогии с молекулярными столкновениями. В последнее время ([2, 3]) рассматривается принципиальная возможность использования аналогичного механизма для ускорения космических ракет в гравитационном поле планет или звезд. Однако остается открытым вопрос о критериях стохастичности, т. е. условиях, при которых к механической системе, движущейся по вполне определенной траектории, применимы статистические законы (особенно, если система состоит из небольшого числа тел, например ракета в поле двойной звезды ([3])).

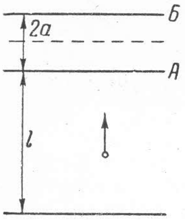

Рис. 1

В работе ([4]) исследовался простейший случай ускорения Ферми — движение легкой частицы между двумя параллельными плоскостями, одна из которых колеблется по определенному заданному закону. Численный расчет движения такой частицы привел к отрицательному результату: ускорения практически не наблюдалось. Скорость частицы иногда достигала 3—4 скоростей стенки и в большинстве случаев была порядка скорости стенки, в то время как согласно механизму Ферми средняя скорость частицы должна неограниченно расти пропорционально времени ([5]).

В настоящей работе получен критерий стохастичности и проведено детальное исследование механизма ускорения Ферми в одномерном случае.

Рассмотрим следующую динамическую систему: частица движется между двумя плоскими бесконечно тяжелыми стенками, с которыми она сталкивается по законам абсолютно упругого удара (рис. 1). Одна стенка неподвижна, другая колеблется строго периодически, причем в течение каждого полупериода скорость линейно меняется со временем. Движение частицы описывается следующей точной системой разностных уравнений:

$$v_{n+1} = \pm v_n + V(\psi_n - {}^1/_2); \tag{1}$$

$$\psi_{n+1} = {}^1/_2 - 2v_{n+1}/V + \sqrt{({}^1/_2 - 2v_{n+1}/V)^2 + 4\varphi_n v_{n+1}/V} \quad (v_{n+1} > V\psi_n/4); \tag{2}$$

$$\psi_{n+1} = 1 - \psi_n + 4v_{n+1}/V \quad (v_{n+1} \leqslant V\psi_n/4); \tag{3}$$

$$\varphi_n = \{\psi_n + [\psi_n(1-\psi_n) + l/4a]/(4v_{n+1}/V)\}; \tag{4}$$

v_n — скорость частицы; n — номер соударения с движущейся стенкой; $V/4$ — амплитуда скорости стенки; ψ_n — фаза колеблющейся стенки в момент удара, изменяющаяся от 0 до $^1/_2$ при движении стенки из положения A к $Б$ и от $^1/_2$ до 1 при обратном движении; скобки $\{\ldots\}$ означают дробную часть аргумента. Знак плюс в (1) соответствует формуле (2) на предыдущем шаге, знак минус — формуле (3).

Как будет видно из дальнейшего, интересен случай

$$l/a \gg 1, \quad v_n/V \gg 1. \tag{5}$$

Тогда система уравнений принимает вид:

$$\Delta v(n) \equiv v_{n+1} - v_n = V(\psi_n - {}^1/_2), \quad \psi_{n+1} \approx \varphi_n \approx \{\psi_n + lV/16av_{n+1}\}. \tag{6}$$

Если, кроме того,

$$lV/16av_{n+1} \ll 1, \tag{7}$$

то система (6) может быть приближенно заменена дифференциальными уравнениями

$$v'(n) = V(\psi(n) - 1/2), \quad \psi'(n) = lV/16av(n), \tag{8}$$

где штрих означает дифференцирование по n, играющему роль безразмерного времени. Систему (8) удобно исследовать с помощью так называемого фазового уравнения:

$$\Phi'' + \Omega^2\Phi = 0, \tag{9}$$

где $\Phi = \psi - 1/2$ и $\Omega^2 = lV^2/16av^2(n) \ll 1$.

Из (5) видно, что v изменяется незначительно и в первом приближении можно считать Ω постоянной. Тогда из (8), (9) следует, что скорость частицы совершает малые колебания с амплитудой $\sim v_0\sqrt{a/l}$ около начального значения v_0 и с частотой Ω. Заметим, что выполнение неравенства (7) соответствует адиабатическому колебанию стенки по отношению к колебанию частицы.

В работе [6] исследовалась система, аналогичная (8), и было показано, что при условии

$$\Omega^2 \gg 1 \tag{10}$$

изменение v становится стохастическим. Применение критерия стохастичности (10) к исходной системе (6) затруднено критерием (7), который нарушается при выполнении критерия (10). Поэтому получим критерий стохастичности другим методом. Для этого рассмотрим корреляцию фаз ψ_n и ψ_{n+1}. Коэффициент корреляции определим по формуле:

$$\rho = \langle(\psi_{n+1} - 1/2)(\psi_n - 1/2)\rangle / \langle(\psi_n - 1/2)^2\rangle, \tag{11}$$

где $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по фазе (ψ_n). Учитывая (6), получим*

$$\rho = \int\limits_0^1 (\psi - 1/2)\left[\{\theta - k\psi\} - 1/2\right] d\psi \Bigg/ \int\limits_0^1 (\psi_n - 1/2)^2\, d\psi, \tag{12}$$

где $k = lV^2/16\,av^2 - 1 = \Omega^2 - 1$, $\theta = (lV/16av)\,(1 + V/2v)$.

При $\Omega^2 \ll 1$

$$\rho \approx 1 - 6\theta(1-\theta) \sim 1, \tag{13}$$

т. е. между соседними фазами имеется сильная корреляция и стохастичность отсутствует. При $\Omega^2 \gg 1$

$$\rho \approx \frac{1}{k}\left[1 - 6\theta(1-\theta)\right] \to 0. \tag{14}$$

В этом случае корреляции практически отсутствуют, а это значит, что v изменяется стохастически.

Проведенное рассмотрение показывает, что существуют три качественно различных области скоростей частицы: I. $v \lesssim 1/4\, V\sqrt{l/a}$. II. $1/4\, V\sqrt{l/a} < v < Vl/16a$. III. $v \gtrsim Vl/16a$. В области I действует механизм Ферми; в области III скорость частицы совершает устойчивые малые колебания; область II — промежуточная. В процессе движения частица может переходить из области I в II и обратно; область III полностью изолирована.

Рассмотрим подробнее область I. Так как движение частицы в I стохастическое, то можно ввести функцию распределения по скоростям $f(v)$ и записать для нее кинетическое уравнение. При малом изменении скорости частиц в результате столкновений ($V/v \ll 1$) кинетическое уравнение получено в [7]. В нашем случае, учитывая, что одна из «частиц» — стенка — бесконечно тяжелая, кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(D(v)\frac{\partial f(v,t)}{\partial v}\right), \tag{15}$$

* Вычисляя коэффициент корреляции по формуле (11), мы предполагаем эргодичность движения, т. е. равномерное распределение фаз ψ_n на интервале (0,1) и независимость его от скорости. В нашем случае эргодичность, по-видимому, имеет место при условии $\theta \gg 1$.

где $D(v)$ — коэффициент «диффузии», определяемый по формуле

$$D(v) = \langle (\Delta v)^2/\Delta t \rangle. \tag{16}$$

Здесь Δv — изменение скорости при ударе (6), а Δt — время между двумя соударениями. Из уравнений (2), (4)

$$\Delta t = 2l/v. \tag{17}$$

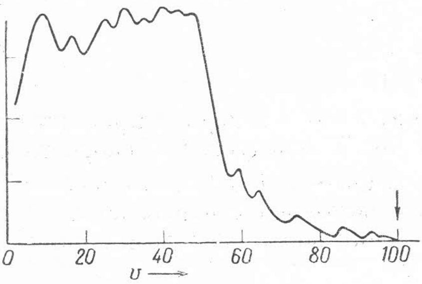

Рис. 2. $l/a \approx 10^4$

Случай (3) исключается вследствие неравенств (5). Подстановка (17), (6) в (16) дает

$$D(v) = vV^2/24l. \tag{18}$$

При решении уравнения (15) в качестве граничного условия примем

$$D(v)\, \partial f/\partial v\, |_{v=v_1} = 0. \tag{19}$$

Условие (19) означает отсутствие потока при $v = v_1$, т. е. прекращение дальнейшего ускорения частицы. В качестве границы естественно взять

$$v_1 \sim {}^1/_4 V \sqrt{l/a}, \tag{20}$$

поскольку вероятность проникновения частицы в область II мала из-за нарушения там стохастичности. Начальные условия примем в виде

$$f(v, 0) = \delta(v - v_0). \tag{21}$$

Решение уравнения (15) при условии (19), (21) есть

$$f(v, t) = \frac{1}{v_1} \sum_n e^{-\lambda_n \tau} J_0\left(2\sqrt{\lambda_n v_0}\right) J_0\left(2\sqrt{\lambda_n v}\right) / J_0^2\left(2\sqrt{\lambda_n v_1}\right), \tag{22}$$

где J —функция Бесселя; $\tau = Vt/48l$; λ_n — корни уравнения $J_1(2\sqrt{\lambda_n v_1}) = 0$. При $t \to \infty$

$$f(v, t) \approx \frac{1}{v_1}\left(1 + e^{-\lambda_1 t} \frac{J_0\left(2\sqrt{\lambda_1 v_0}\right) J_0\left(2\sqrt{\lambda_1 v}\right)}{J_0^2\left(2\sqrt{\lambda_1 v_1}\right)}\right), \quad \lambda_1 \approx \frac{3{,}68}{v_1} \tag{23}$$

и функция распределения стремится к постоянному значению $1/v_1$ с временем релаксации

$$t_r = 13\, l v_1/V^2. \tag{24}$$

При $t \ll t_r$ условие (19) несущественно и решение с $v_0 = 0$

$$f(v, t) = e^{-v/\tau}/\tau \tag{25}$$

совпадает с полученным в ([5]) при дополнительном условии $v \gg V$. В частности, среднее значение скорости

$$\bar{v} = \tau, \ t \ll t_r; \quad \bar{v} = v_1/2, \ t \gg t_r. \tag{26}$$

Для проверки высказанных предположений система (1) — (4) решалась на электронной вычислительной машине при следующих значениях параметров: $a = 1$, $V \approx 4$, $v_0 = 0$. Было сосчитано несколько вариантов с различными l, ψ_0 по $N = 10^5$ столкновений в каждом. Для уменьшения ошибок, связанных с конечным числом разрядов машины, мантиссы величин l и V выбирались в виде набора случайных чисел. Результатом расчета являлась функция распределения $F(v, t)$, определенная как доля полного времени движения t, проводимого частицей в заданном интервале скорости. Связь между f и F дается формулой

$$F(v, t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(v, t)\, dt. \tag{27}$$

На рис. 2 приведена типичная функция распределения $F(v)$ для $t \gg t_r$. Плоская (с точностью до флуктуации) часть функции распределения соответствует области I. По оси абсцисс отложена скорость частицы в единицах максимальной скорости стенки. Стрелкой отмечена максимальная скорость, достигнутая частицей за 10^5 соударений. Флуктуации функции распределения в области I определяются числом n независимых прохождений частицы через всю область ускорения. Последнее приблизительно равно отношению полного времени ускорения $t \approx 2lN/v_1$ к времени релаксации (24). Для флуктуаций получаем оценку

$$|\Delta f/f| \sim 1/\sqrt{n} \sim \sqrt{l/3aN}. \tag{28}$$

При $l/a = 10^4$ (рис. 2) $|\Delta f/f| \sim 1/_6$.

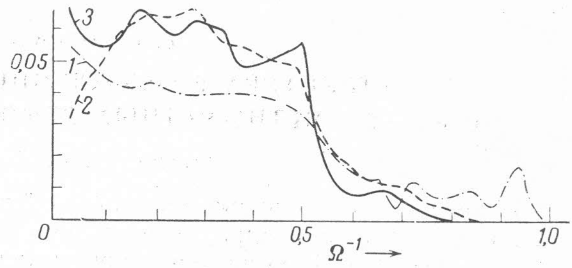

Рис. 3. *1* — $l/a \approx 400$; *2* — $l/a \approx 10^4$; *3* — $l/a \approx 4 \cdot 10^4$

Рис. 3 иллюстрирует выполнение критерия стохастичности (10). Как видно из графиков, граница между областями I и II лежит при $\Omega^{-1} = 4(v_1/V)\sqrt{a/l} = 1/_2$, что соответствует оценке (20). Отметим, что частица проникает довольно далеко (особенно при малых l) в глубь области II, но не доходит до области III, граница которой $\Omega_{III}^{-1} \sim 1/_4\,(l/a)^{3/2} \sim 2000$ ($l = 400$) лежит при очень больших скоростях.

Отсутствие ускорения, полученное в ([4]), объясняется, по-видимому, тем, что авторы взяли малое отношение l/a, что приводит лишь к незначительному превышению скорости частицы над скоростью стенки (20).

В заключение отметим, что случай двух (и большего числа) измерений принципиально отличается от одномерного, как это продемонстрировано на примере в работе ([8]). Отличие связано с тем, что в случае нескольких степеней свободы стохастичность движения частицы может устанавливаться в результате перераспределения энергии между степенями свободы. Тогда $V \sim \Delta v \sim v$ (рассеяние на большой угол) и, следовательно, критерий стохастичности (10), по-видимому, всегда выполняется, и стационарное распределение отсутствует.

Пользуемся случаем выразить благодарность М. К. Фаге за полезные советы.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
23 IV 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Fermi, Phys. Rev., **75**, 1169 (1949). [2] S. M. Ulam, On the Possibility of Extracting Energy from Gravitational Systems by Navigating Space Vehicles, Los Alamos, MS-2219, 1958. [3] K. W. Ford, Transfere of Energy from Astronomical Bodies to Space Vehicles, T-Division Report, Los Alamos, 1959. [4] S. Ulam, Proc. 4-th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probabil., **3**, Berkeley — Los Angeles., 1961, p. 315; Сборн. пер. Математика, 7, 5, 137 (1963). [5] J. M. Hammersley, Proc. 4-th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probabil., Berkeley — Los Angeles, **3**, 1961, p. 79; Сборн. пер. Математика, **7**, 5, 143 (1963). [6] Б. В. Чириков, Атомная энергия, **6**, 630 (1959); Б. В. Чириков, Диссертация, Новосибирск, 1959. [7] Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **7**, 203 (1937). [8] Я. Г. Синай, Вестн. Моск. унив., сер. 1, № 5, 6 (1963).