Доклады Академии наук СССР
1964. Том 159, № 4

ФИЗИКА

В. В. ЯКИМЕЦ

ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ АМОРФНЫХ ТЕЛАХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 16 VI 1964)

Различные эффекты влияния среды на тормозное излучение ультрарелятивистских электронов были рассмотрены в ряде работ ([1-7]). В частности, в работе В. М. Галицкого и автора ([7]) был развит общий метод учета влияния среды на потери энергии частиц в веществе и дано количественное рассмотрение влияния поглощения квантов на тормозное излучение электронов высоких энергий для случая, когда частота кванта ω гораздо меньше начальной энергии электрона E. Целью настоящей работы является квантовомеханическое обобщение указанного метода с единственным условием ω, $E \gg 1$*. Далее, как показал А. Б. Мигдал ([5]), при достаточно больших энергиях квантов следует учитывать эффект многократного рассеяния в образовании пар. Оказывается, появляющаяся в результате зависимость сечения рождения пар от ω приводит к тому, что интервал частот, в котором существенно поглощение, сильно сдвигается в классическую область $\omega \ll E$, и средние дифференциальные потери энергии электрона приобретают дополнительную зависимость от плотности и частоты.

Рассмотрим систему, состоящую из среды, электрона и электромагнитного поля. Полный гамильтониан системы в шредингеровском представлении запишем в виде

$$H = H_e + H_r + H^I. \tag{1}$$

Здесь $H_e = H_{0e} + \sum_m V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_m)$ включает взаимодействие электрона со всеми рассеивающими центрами; H_r описывает среду, свободное электромагнитное поле и их взаимодействие между собой; $H^I = j_i A_i$ представляет взаимодействие электрона с электромагнитным полем и будет рассматриваться как возмущение. В первом порядке по теории возмущений получаем

$$ic_s^{(1)} = \int_0^t dt_1\,(\psi_s \cdot \varphi_s,\ \ e^{i(H_e+H_r)t_1} j_k A_k e^{-i(H_e+H_r)t_1} \psi_0 \cdot \varphi_0), \tag{2}$$

причем $\psi_s \cdot \varphi_s$ — собственные функции системы в представлении взаимодействия

$$H_e\psi_s = E_s^e\psi_s, \quad H_r\varphi_s = E_s^r\varphi_s.$$

Полные потери энергии электрона в единицу времени определяются вероятностью перехода $|c_s^{(1)}|^2$ в единицу времени, просуммированной по

---

* В работе использована система единиц $h = m = c = 1$.

всем конечным состояниям системы с $E_s^e > 0$:

$$W = \sum_{E_s^e > 0} \frac{d}{dt} | c_s^{(1)} |^2 = 2\mathrm{Re} \int_0^t dt_1 (\psi_0 \cdot \varphi_0, \ e^{iH_e t_1} j_k \widetilde{A}_k K e^{iH_e (t-t_1)} j_i A_i e^{-iH_e t} \psi_0 \cdot \varphi_0). \tag{3}$$

где $\widetilde{A}_k = e^{iH_r t} A_k e^{-iH_r t}$ и K — проекционный энергетический оператор. Разлагая $\widetilde{A}_i$ в интеграл Фурье по координатам

$$\widetilde{A}_i (\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} \, \widetilde{A}_i (\mathbf{k}, t) \, e^{i\mathbf{kr}}, \quad d\mathbf{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{4}$$

и вводя обозначение

$$I_{ki} = \frac{1}{e^2} (\psi_0, \ e^{iH_e t_1} j_k e^{i\mathbf{kr}} K e^{iH_e (t-t_1)} j_i e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} e^{-iH_e t} \psi_0), \tag{5}$$

найдем

$$W = e_2 \cdot 2\mathrm{Re} \int_0^t dt_1 \int d\mathbf{k} \, d\mathbf{k}_1 \, (\varphi_0, \ \widetilde{A}_k(t_1) \, \widetilde{A}_i^+ (t) \, \varphi_0) \cdot I_{ki}. \tag{6}$$

Подынтегральная функция $(\varphi_0, \widetilde{A}_k \widetilde{A}_i^+ \varphi_0)$ непосредственно связана с функцией Грина электромагнитного поля в среде

$$(\varphi_0, \ \widetilde{A}_k (t_1) \, \widetilde{A}_i^+ (t) \, \varphi_0) = - iD_{ik}^+ (\mathbf{k}, \ \mathbf{k}_1; \ t, \ t_1), \quad t_1 < t.$$

В дальнейшем мы ограничимся случаем однородной среды. Тогда, переходя в (6) к интегрированию по $\tau = t - t_1$ и доразлагая D-функцию в интеграл Фурье по времени, получим после несложных преобразований

$$W = - e^2 \cdot 4\mathrm{Re} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^t d\tau \, e^{i\omega\tau} \int d\mathbf{k} \ \mathrm{Im} \, D_{ik} (\mathbf{k}, \ \omega) \cdot I_{ki}. \tag{7}$$

Благодаря тому что в задаче существенны большие длины, влияние вещества на электромагнитное поле может учитываться феноменологически введением диэлектрической постоянной среды $\varepsilon = \varepsilon^I + i\varepsilon^{II}$:

$$\varepsilon^{\mathrm{I}} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon^{\mathrm{II}} = \frac{n\sigma}{\omega} = \frac{1}{L\omega}, \tag{8}$$

где $\omega_0^2 = 4\pi n e^2$, n — ядерная плотность, σ — интегральное сечение образования пар, L — радиационная длина. Поэтому, выбирая калибровку с равным нулю скалярным потенциалом, мы можем написать (см., например, [8]):

$$\mathrm{Im} \, D_{ik} = - \frac{4\pi\varepsilon^{\mathrm{II}}}{\omega^2 |\varepsilon|^2} \left\{ \frac{k_i k_k}{k^2} + |\varepsilon|^2 \omega^4 \ \frac{\delta_{ik} - k_i k_k / k^2}{|k^2 - \varepsilon\omega^2|^2} \right\}. \tag{9}$$

Для рассматриваемых энергий и частот первый член в (9) оказывается несущественным. Принимая во внимание, что $j_i = e\alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$, после усреднения по координатам рассеивающих центров мы придем к следующему выражению для средних дифференциальных потерь энергии электрона в единицу времени:

$$\dot{Q}_\omega = \frac{e^2\omega^3}{2\pi^3} \mathrm{Re} \int_0^i dt \, e^{i\omega\tau} \int \frac{\varepsilon^{\mathrm{II}} \, d^3k}{|k^2 - \varepsilon\omega^2|^2} \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) \cdot \overline{I_{ki}}, \tag{10}$$

$$I_{ki} = (\psi_0, \ e^{iH_e t_1} \alpha_k e^{i\mathbf{kr}} K e^{iH_e \tau} \alpha_i e^{-i\mathbf{kr}} \, e^{-iH_e \tau} e^{-iH_e t_1} \psi_0). \tag{11}$$

Усреднение матричного элемента (11) может быть выполнено методом, разработанным Мигдалом (см. ([5])), с тем отличием, что теперь ω и k не связаны обычным соотношением (см. ([7])). Получающийся результат удобно представить в виде двух слагаемых — потерь на тормозное излучение и образования пар электроном в среде:

$$\dot{Q}_\omega = \dot{Q}^{\text{т}}_\omega + \dot{Q}^{\text{п}}_\omega; \tag{12}$$

$$\dot{Q}^{\text{т}}_\omega = \frac{e^2\omega^3}{\pi^2}\int \frac{\varepsilon^{II}(k)\,dk}{|k^2-\varepsilon\omega|^2}\left\{2\left[1+\left(1-\frac{\omega}{E}\right)^2\right]\left[\frac{Bk}{E(E-\omega)}\right]^{1/2} F(s) + \frac{k^3}{E^3(E-\omega)}G(s)\right\} \tag{12^{I}}$$

$$\dot{Q}^{\text{п}}_\omega = \frac{e^2\omega^3}{\pi}\int \frac{\varepsilon^{II}(k)\,dk}{|k^2-\varepsilon\omega^2|^2}\left\{-8s\left[1+\left(1-\frac{\omega}{E}\right)^2\right]\left[\frac{Bk}{E(E-\omega)}\right]^{1/2}\theta(-s-1) + \right.$$
$$\left. + \frac{k^3}{E^3(E-\omega)}\theta\left(-s-\frac{1}{2}\right)\right\}, \tag{12^{II}}$$

где $F(s) = \frac{1}{6s}[\theta(s+1)\Phi(s) + \theta(-s-1)\Phi(-s)]$; $G(s) = \frac{1}{48s^2}\left[\theta\left(s+\frac{1}{2}\right)G(s) + \theta\left(-s-\frac{1}{2}\right)G(-s)\right]$; $\theta(s)$ — единичная функция; $\Phi(s)$ и $G(s)$ — функции, введенные Мигдалом в ([4,5]);

$$s = \frac{1}{4}\left[\omega - k\left(1-\frac{1}{2E(E-\omega)}\right)\right]\left[\frac{E(E-\omega)}{Bk}\right]^{1/2}, \quad B = 4\pi n Z^2 e^4 \ln(191 Z^{-1/3}).$$

В классической области $\omega \ll E$ (12^{I}), (12^{II}) очевидным образом переходят в формулы, найденные в ([7]). С другой стороны, в отсутствие поглощения ($\varepsilon^{II} \to 0$) $\dot{Q}^{\text{п}}_\omega$ исчезает, а в (12^{I}) появляется функция $\delta(k - \omega\sqrt{\varepsilon^{I}})$, и $\dot{Q}_\omega$ переходит в выражение для тормозного излучения, полученное в работе Мигдала ([5]).

Поглощение квантов влияет на тормозное излучение, когда ширина резонансного знаменателя в (12^{I}) становится больше ширины функций $F(s)$ и $G(s)$. Это осуществляется в интервале частот $L\omega_0^2 \ll \omega \ll E^2/(64BL^2 + E)$. Радиационная длина L не зависит от ω и равна $L_0 = 9E_s^2/28B$ * до энергий квантов $\lesssim 7L_0/18E_s^2$ ($E_s = (4\pi/e^2)^{1/2}$ — радиационная энергия). В общем случае функция $L(\omega)$ имеет сложный вид. Она существенно упрощается в пределе больших частот

$$L(\omega) = \frac{E_s^2}{3\pi}\sqrt{\frac{\omega}{B}}, \quad \omega \gg \frac{7}{18}\frac{L_0}{E_s^2} = \frac{1}{8B}. \tag{13}$$

Следовательно, учет эффекта многократного рассеяния в образовании пар квантом приводит к тому, что указанный интервал сильно сдвигается в классическую область и при $E \gg 28L_0/27\pi$ описывается неравенствами

$$L_0\omega_0^2 \ll \omega \ll \frac{3\pi}{8}\frac{E}{E_s^2}, \quad E \gg \frac{28}{27\pi}L_0, \tag{14}$$

причем

$$\dot{Q}^{\text{т}}_\omega = \frac{16\xi e^2}{\pi^2}\frac{B\omega}{E^2}L(\omega), \quad \xi = 2\ln(2\operatorname{sh}\pi) \approx 2\pi. \tag{15}$$

Прежний результат для средних потерь ([7]) сохраняется при выполнении условий

$$L_0\omega_0^2 \ll \omega \lesssim \frac{7}{18}\frac{L_0}{E_s^2}, \quad \dot{Q}^{\text{т}}_\omega = \frac{144\xi}{7\pi^2}\frac{\omega}{E^2}. \tag{16}$$

---

* Для свинца $\omega_0 \approx 60$ эв, $L_0\omega_0^2 \approx 1{,}2\cdot 10^8$ эв.

Формула (15) принимает снова простой вид в интервале частот

$$\frac{7}{18}\frac{L_0}{E_s^2} \ll \omega \ll \frac{3\pi}{8}\frac{E}{E_s^2}, \qquad \dot{Q}_\omega^{\text{т}} = \frac{64\xi}{3\pi^2}\frac{\omega}{E^2}\sqrt{B\omega}. \tag{17}$$

Это выражение по сравнению с (16) содержит дополнительную зависимость от плотности и частоты $(n\omega)^{1/2}$. В конечной части спектра $3\pi E/8E_s^2 \ll \ll \omega \lesssim E$ интенсивность излучения определяется формулой Мигдала ([5]).

Для получения величины потерь на образование пар электроном в квантовой области $\omega \sim E$ необходимо учитывать пространственную дисперсию диэлектрической постоянной $\varepsilon^{II}(k)$.

В заключение выражаю благодарность В. М. Галицкому за ценные советы и постоянный интерес к работе.

Поступило
4 V 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН, **92**, № 3, 535 (1953). [2] Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН, **92**, № 4, 735 (1953). [3] М. Л. Тер-Микаэлян, ДАН, **94**, № 6, 1033 (1954). [4] А. Б. Мигдал, ДАН, **96**, № 1, 49 (1954). [5] A. B. Migdal, Phys. Rev., **103**, 1811 (1956). [6] V. M. Galitsky, I. I. Gurevich, Nuovo Cim., **32**, № 2, 396 (1964). [7] В. М. Галицкий, В. В. Якимец, ЖЭТФ, **46**, 1066 (1964). [8] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.