К МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ИОНИЗОВАННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. Фридман (Новосибирск)

В гидродинамической теории устойчивости большую роль играет так называемый арадокс исчезающей диссипации: в ряде случаев лишь учет конечной вязкости приводит к неустойчивости течений.

В магнитной гидродинамике такую же большую роль играет конечное электрическое сопротивление. Учет даже малого электрического сопротивления повышает порядок дифференциальных уравнений линеаризованной теории устойчивости таким бразом, что возникает задача с малым параметром при старшей производной. Некоторый класс задач подобного типа рассмотрен в [1].

Однако в среде с достаточно хорошей проводимостью (какой, например, может быть олностью ионизованный разреженный газ) структура малого параметра при старшей производной определяется не диссипативными эффектами, а дисперсионными. последним относится, наряду с другими, так называемая «магнитная вязкость», оль которой в теории устойчивости определена уже достаточно полно [2].

В обобщенном законе Ома для ионизованного газа, наряду с обычным электрическим сопротивлением, приводящим к диссипации, имеется член, учитывающий инерцию электронов (член дисперсионной природы).

Ниже рассмотрим постановку задачи об устойчивости малых колебаний равновесия двукомпонентного газа в магнитном поле и покажем, что инерция электронов ожет играть роль, аналогичную электрическому сопротивлению (предположение о озможности такой аналогии было высказано в [1]).

Рассмотрим устойчивость одномерного плоского равновесия ионизованного газа а счет магнитного давления

$$-\nabla_x p = \nabla_x \frac{H^2}{8\pi} \qquad (p = nT) \tag{1}$$

Здесь p — давление, n — плотность заряженных частиц, T — температура, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, которое будем всюду считать направленным по оси z зависящим от координаты x. Температуру электронов для простоты будем считать остоянной и большей температуры ионов. (Такие условия часто осуществляются в азовых разрядах.) Изменение давления обязано изменению плотности частиц по оси x.

Невозмущенное значение скорости плазмы везде полагается равным нулю.

Пространственный вид $n(x)$ и $\mathbf{H}(x)$ не конкретизируем, так как исследование задачи на устойчивость, как это будет видно из дальнейшего, не требует знания их явного ида. Единственным требованием, предъявляемым к $n(x)$ и $\mathbf{H}(x)$, служит условие медленного изменения их на расстояниях порядка средних тепловых ларморовских радиусов ионов. Сформулируем кратко те приближения, которыми нам придется воспользоваться при построении линейной теории устойчивости и без которых решение адачи нам кажется проблематичным.

а) Давление газа считаем много меньшим магнитного давления $nT \ll {}^1/_8 H^2 / \pi$. то условие позволяет нам пренебрегать относительным изменением $H^{-1}dH / dx$ по равнению с $n^{-1}dn / dx$.

б) Рассматриваются не произвольные малые колебания среды около положения авновесия, а лишь такие, электрические поля которых можно считать потенциальными ot $\mathbf{E} = 0$), иначе говоря, считаем, что ионизованный газ при своих колебаниях не озмущает магнитное поле. (Как увидим ниже, это условие на самом деле не независимо условия (а), более того, в рассматриваемом случае окажется необходимым усилить еравенство (а): $nT \lll {}^1/_8 H^2 / \pi$.

Предполагаем квазинейтральность ионизованного газа в процессе развития возущений — это условие легко удовлетворяется, если дебаевский радиус мал по сравнию с характерными параметрами задачи (длиной волны возмущения).

Невозмущенные величины от возмущенных будем отличать индексом 0.

Введем обозначения: $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; φ — потенциал; — волновой вектор; $\mathbf{V}_e$, $\mathbf{V}_i$ — направленные скорости электронов и ионов соответственно; V_{Te}, V_{Ti} — тепловые скорости соответственно электронов и ионов; e — заяд электрона; c — скорость света в вакууме; m, M — массы электрона и иона оответственно; ν_e — частота электрон-ионных столкновений; ω_{He}, ω_{Hi} — ларморовкие частоты электронов и ионов соответственно; r_{He}, r_{Hi} — ларморовские радиусы оответственно электронов и ионов, измеренные при температуре электронов T_e;

$$\omega_n = k_y \ln' n_0 \frac{V_{Te}{}^2}{\omega_{He}} = k_y \ln' n_0 \frac{V^2{}_{Ti}}{\omega_{Hi}}$$

— так называемая «дрейфовая» частота; R — поперечный размер системы, γ — инкремент неустойчивости

$$\omega_{n0} = k_y \ln' n_0(x_0) \frac{V_{Te}^2}{\omega_{He}}$$

Выпишем теперь линеаризованные уравнения, описывающие малые колебания около положения равновесия:

уравнение движения электронов поперек магнитного поля

$$\nabla_\perp p_e + en_0 \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_e \mathbf{B}]_\perp\right) = 0 \tag{2}$$

Инерционный член здесь отсутствует, так как сильное магнитное поле подавляет инерцию электронов поперек своих силовых линий;

уравнение движения электронов вдоль магнитного поля

$$mn_0 \frac{\partial V_{ez}}{\partial t} + \nabla_z p_e + en_0 E_z = - n_0 m \nu_e V_{ez} \tag{3}$$

(Первый член уравнения описывает инерцию электронов; влияние его на устойчивость и исследуется в данной работе.)

уравнение движения ионов

$$- Mn_0 \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + en_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_i \mathbf{B})]\right) = 0 \tag{4}$$

уравнения непрерывности для электронов и ионов соответственно

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}_e) + \operatorname{div}(n \mathbf{V}_{e0}) = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n_0 \mathbf{V}_i) + \operatorname{div}(n \mathbf{V}_{i0}) = 0 \tag{5}$$

В этой линейной системе уравнений коэффициенты зависят только от x. Пространственную же зависимость в направлениях y и z, в которых система однородна, будем представлять в виде $\exp(ik_y y + ik_z z)$. Аналогично зависимость от времени представим в виде $\exp(i\omega t)$. Тогда задача исследования устойчивости сводится к задаче на отыскание собственных значений ω соответствующих собственных функций, исчезающих вне переходного слоя, где плотность неоднородна.

Последовательно исключая неизвестные из системы уравнений (2)—(5), нетрудно получить следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{r_{Hi}^2} \left[\frac{\omega_n - \omega}{\omega_n + \omega} \left(\frac{i\nu_e \omega - \omega^2}{k_z^2 V_{Te}^2} - 1\right) + r_{Hi}^2 k_y^2\right] \varphi = 0 \tag{6}$$

Если исследовать полученное дисперсионное уравнение (6) для случая, когда плотность ионизованного газа всюду однородна, то оказывается, что малые колебания, возбужденные в такой среде, со временем затухают. Поэтому, естественно, представляют интерес лишь решения уравнения (6) вблизи точки максимального градиента плотности. Подставляя

$$\ln' n_0(x) = \ln' n_0(x_0) \left(1 - \frac{(x - x_0)^2}{R^2}\right)$$

в формулу (6), в окрестности точки $x_0 = 0$ получаем дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\left(E - \frac{\Omega^2 x^2}{2}\right)\varphi = 0 \tag{7}$$

Здесь введены обозначения

$$E = \frac{1}{2r_{Hi}^2} \left(\frac{i\nu_e \omega - \omega^2}{k_z^2 V_{Te}^2} - 1\right)(\omega_{n0} - \omega) + \frac{1}{2} k_y^2 (\omega_{n0} + \omega) \tag{8}$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega_{n0}}{R^2 r_{Hi}^2} \left(\frac{i\nu_e \omega - \omega^2}{k_z^2 V_{Te}^2} + k_y^2 r_{Hi}^2 - 1\right) \tag{9}$$

Как видим, уравнение (7) в системе единиц, где $\hbar = \nu = 1$, имеет вид уравнения Шредингера для линейного осциллятора с комплексными частотой Ω и энергией E. Решение такого уравнения имеет вид

$$\varphi_n = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\frac{-\Omega x^2}{2} H_n(x\sqrt{\Omega}) \qquad \left(H_n(x\sqrt{\Omega}) - \text{функция Эрмита}\right) \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

Отметим, что исследование уравнения (6) в общем виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2V(x, \omega)\varphi = 0 \tag{11}$$

де $V(x, \omega)$ — некая функция переменных x и ω, называемая потенциалом, сопряжена большими трудностями. Однако здесь приходят на помощь следующие два обстоя-льства: 1) наличие малого параметра $1 / k_y R < 1$, появляющегося для возмущений поперечной длиной волны, существенно меньшей поперечного размера системы; собственные функции экспоненциально убывают. Учитывая это, а также факт ма-сти колебаний, представляется возможным записать потенциал $V(x, \omega)$ в виде ряда степеням x. Так мы приходим к уравнению (7).

Чтобы убедиться, что собственные функции действительно убывают при удалении точки максимального градиента плотности, исследуем знак действительной части Ω. ак видно из (10), если $\operatorname{Re}\Omega > 0$, то получаем экспоненциально затухающие к гра-щам значения собственных функций (функция Эрмита есть степенной ряд).

Собственные значения ω уравнения (7) могут быть найдены из уравнения

$$E_n = (n + {}^1/_2)\Omega$$

дстановкой в него выражений (8) и (9). Полученные ω при подстановке в фо-мулу (9) определяют знак $\operatorname{Re}\Omega$, который оказывается положительным. Локаль-сть возмущения подтверждена.

Полученное решение уравнения (7) может быть записано в виде

$$\omega = \omega_{n0}(1 - k_y^2 r_{Hi}^2)\left(1 + k_y^2 r^2_{Hi} + i\frac{\nu_e + i\omega}{k_z^2 V_{Te}^2}(\omega_{n0} - \omega)\right)^{-1} \tag{12}$$

Если теперь в формуле (12) вместо суммы $\nu_e + i\omega$ (в знаменателе правой части) тавить лишь ν_e, то полученное выражение совпадает с аналогичным выражением для в работе [3], где родственная задача решалась в пренебрежении инерцией электро-в. Существенно здесь отметить два предельных случая: $\omega < \omega_n$ и $\omega > \omega_n$. Если при $< \omega_n$ в [3] дается инкремент неустойчивости $\gamma \sim -A$, то в рассматриваемом слу-е он больше, а именно

$$\gamma \sim -\frac{A}{1 - A} \tag{13}$$

$$A = \frac{\nu_e \omega_n F(\omega_{n0} - \omega)}{(2 - F)^2 k_z^2 V_{Te}^2}, \quad F(k_\perp^2) = I_0\left(\frac{k^2 T}{\omega_{Hi}^2 M}\right)\exp\frac{-k^2 T}{\omega_{Hi}^2 M} \tag{14}$$

Здесь I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Из (13) видно, что чем сильнее неравенство $k_z \ll k_y$, тем больше инкремент не-тойчивости γ.

Когда $\omega \gg k_z V_{Te}, \omega_{n0}, \nu_e$ (последнее неравенство как раз учитывает сильное влия-е инерционного члена), получаем инкремент неустойчивости в виде [1]

$$\gamma = -(\omega_{n0} k^2_z V_{Te}^2)^{1/3} \tag{15}$$

торый отсутствует в работе [3]. Из (15) имеем

$$\nu_{\max} \lesssim \omega_{n0} \tag{16}$$

Возвращаясь к условию (б), отметим, что для потенциальности возмущений необ-димо, чтобы фазовая скорость волны возмущения вдоль магнитного поля была мень-е характерной скорости магнитного возмущения $V_A = H / \sqrt{4\pi n M}$.

Поскольку $\omega / k_z \gg V_e$, необходимо $V_A \gg V_e$, что и приводит к отмеченным ранее раничению (а): $nT \ll {}^1/_8 H^2 / \pi$, и связи двух условий (а) и (б).

В разрядах с сильным магнитным полем условие (а) заведомо выполняется. Так, апример, в условиях опыта, описанного в [5], имеем ${}^1/_8 \pi n T H^{-2} \sim 10^{-4} - 10^{-6}$.

В работе [6] неустойчивость неоднородного ионизованного газа, помещенного магнитное поле, развивающаяся из-за конечного электрического сопротивления, спользовалась для объяснения так называемой «бомовской» аномальной диффузии. условиях эксперимента [5], когда, по-видимому, имела место турбулентная диффузия коэффициентом, близким к бомовскому, для типичных условий эксперимента $\nu_e < \omega_{n0}$; о находится вне рамок применения теории, развитой в [6].

---

1 Заметим, что эта «ветвь» колебаний указана в работе [4], где решается отличная т данной задача.

Рассмотрение, проведенное в настоящей статье, охватывает и этот предельный случай. Результаты эксперимента в этой связи нам кажутся более понятными.

Конечно, сейчас картина возникновения неустойчивостей нелинейного режима далеко неясна. Обычно оценка нелинейных переносов делается, исходя из предположения, что вследствие нелинейных взаимодействий энергия длинноволновых возмущений переносится в коротковолновую часть спектра. Такая картина принята и в [6]. Однако, как показывает линейная теория устойчивости, наиболее неустойчивыми оказываются возмущения, в которых $k_\parallel \ll k_\perp$, т. е. возмущения носят почти двумерный характер. Не исключено, что картину возникновения нелинейного режима можно представить на языке двумерной турбулентности, когда главную роль играет тенденция к слиянию мелкомасштабных вихрей в большие.

Автор благодарит А. А. Галеева, С. С. Моисеева, Р. З. Сагдеева за внимание, проявленное к работе.

Поступила 15 V 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N. Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch. Phys. Fluids, 1963, v. 6, No. 4.
2. Rosenbluth M., Rostoker N., Krall N., Finite Larmor radius stabilization of «weakly» instable confined plasmas. Nuclear Fusion, 1962, Supplement Part I.
3. Фридман А. М. К теории устойчивости неоднородной плазмы в магнитном поле, ПМТФ, 1964, № 1.
4. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. «Универсальная» неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле, Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 903.
5. Stodiek W., Ellis R. A., jr, Gorman I. G. Loss of charged particles in a stellarator. Nuclear Fusion, 1962, supplement, Part I.
6. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы. Атомная энергия, 1963, т. 15, № 6.

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

И. П. Семенова (Москва)

Установившееся течение проводящей жидкости между параллельными пластинами в однородном поперечном магнитном поле (обобщенное течение Гартмана) рассматривалось ранее с учетом эффекта Холла [1-3] и проницаемости стенок [4, 5]. Ниже построено решение, учитывающее одновременно анизотропию проводимости и поперечное течение жидкости, вызванное отсосом на одной пластине и вдувом на другой.

1. Направим оси x и y параллельно плоскостям пластин, ось z — перпендикулярно к ним. Будем считать, что основное течение происходит вдоль осей x и y под действием постоянных градиентов давления $p_x = \partial p / \partial x$ и $p_y = \partial p / \partial y$ в присутствии внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. Пусть, кроме того, через нижнюю пластину ($z = -a$) жидкость вдувается, а через верхнюю ($z = a$) отсасывается с постоянной скоростью w_0, так что расход жидкости в основном течении не зависит от x, y. Если предположить, что все величины, кроме давления, зависят только от поперечной координаты z, то из уравнений $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует, что во всем потоке $w = w_0 = \text{const}$, $B_z = B_0 = \text{const}$. Из условия стационарности задачи следует, что $E_x = E_{x0} = \text{const}$, $E_y = E_{y0} = \text{const}$. Будем считать, что пластины $z = \pm a$ являются диэлектриками. Тогда из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ следует, что $j_z = 0$, и векторы скорости, магнитной индукции, электрического поля и плотности электрического тока имеют соответственно вид

$$\mathbf{V}\,(u,\ v,\ w_0), \qquad \mathbf{B}\,(B_x,\ B_y,\ B_0), \qquad \mathbf{E}\,(E_{x0},\ E_{y0},\ E_z), \qquad \mathbf{j}\,(j_x,\ j_y,\ 0)$$

Система уравнений, которым удовлетворяют u, v, B_x, B_y, j_x, j_y, имеет вид

$$\rho w_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -p_x + \frac{1}{c} j_y B_0 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \rho w_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -p_y - \frac{1}{c} j_x B_0 + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{c}(j_x B_y - j_y B_x), \qquad j_x = \sigma\,[E_{x0} + c^{-1}(vB_0 - w_0 B_y)] - \alpha j_y B_0$$