

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев

(Новосибирск)

Рассматривается асимптотический метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя малыми параметрами. К уравнению такого типа часто сводятся различные задачи гидродинамической теории устойчивости, а также задачи трансформации колебаний в магнитной гидродинамике и плазме. В частности, исследуется характер особой области, где «пересекаются» различные решения геометрико-оптического приближения. Выясняются правила обхода особых точек и в различных случаях для финитных решений приводятся формулы для вычисления спектра колебаний. Предложенный метод может быть применен и к аналогичным дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Теория применяется к исследованию неустойчивости плазмы в поле тяжести.

### Обозначения

$\rho$ — амплитуда возмущения;	$L_i$ — контуры интегрирования в фазовом пространстве;
$\alpha, \beta$ — малые параметры;	$n_0$ — плотность среды;
$\xi$ — координата в направлении неоднородности;	$g$ — потенциал поля тяжести;
$x, y, z$ — безразмерные координаты в направлении неоднородности;	$c$ — скорость света;
$k$ — волновой вектор возмущения;	$T$ — температура;
$\omega$ — частота;	$e$ — заряд электрона;
$L$ — характерный размер;	$H$ — напряженность магнитного поля;
$P, P^0, q, Q^0, w$ — производные от фаз амплитуды возмущения;	$V$ — скорость;
$H_{1/8}^{(1)(2)}$ — функции Ганкеля 1-го и 2-го рода;	$q$ — тепловой поток;
	$E$ — напряженность электрического поля;
	$r_i$ — ларморовский радиус ионов;
	$\Pi$ — предэкспоненциальный множитель решения.

1. О состоянии задачи. Использование асимптотических методов в линейной гидродинамической теории устойчивости хорошо известно, например, в связи с задачей об устойчивости пуазейлевского течения (подробный обзор работ см. в [1]). Суть дела заключается в том, что необходимо построить решения и найти собственные значения  $\omega = \omega(k)$  при заданных граничных условиях уравнения

$$\alpha \frac{d^4 \psi}{d\xi^4} - U_2(\xi, k, \omega) \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + U_1(\xi, k, \omega) \psi = 0 \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  — малый параметр,  $\xi$  — координата (в случае пуазейлевского течения  $\alpha$  пропорционален вязкости). Наличие малого параметра  $\alpha$  обеспечивает возможность построения формального асимптотического ряда для решения по удачно выбранной степени  $\alpha$ .

В последнее время появилось большое число работ по исследованию устойчивости слабонеоднородной плазмы. В тех случаях, где проводилось детальное исследование, задача сводилась к уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - U(\xi, k, \omega) \psi = 0 \quad (1.2)$$

Для того чтобы ввести в (1.2) явно малый параметр  $\beta$ , характеризующий слабую неоднородность, введем безразмерную координату  $x = \xi/L$  ( $L$  — характерный размер задачи). Положим  $U = k_0^2 U$ , причем  $U \sim 1$  везде, за исключением области вблизи точки  $x_0$ , где  $U(x_0) = 0$ . Тогда имеем вместо (1.2)

$$\beta \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - U(x, k, \omega) \varphi = 0, \quad \beta = \frac{1}{k_0^2 L^2} \ll 1 \quad (1.3)$$

В работе [2] было предложено использовать малость  $\beta$  для построения асимптотических решений, хорошо известных в квантовой механике под названием «квазиклассических»<sup>1</sup>.

В ряде случаев возникает следующая ситуация: в рассматриваемой области существует точка, в которой  $U$  обращается в  $\infty$ . Это обстоятельство изучалось в связи с задачей о трансформации волн в плазме [5]. Полюс  $U$  в случаях, изучавшихся в [5], был фиктивным и исчезал при учете старшей производной с малым параметром типа  $\alpha$  при ней<sup>2</sup>. Для задач, связанных с трансформацией волн в плазме, использовался метод последовательных приближений [6].

Асимптотический метод, близкий, с одной стороны, к [6] и с другой — к [1], применялся в [7] для уравнения типа (1.1) при исследовании устойчивости неоднородной плазмы с учетом конечной проводимости. Этот метод, как будет видно в дальнейшем, имеет весьма ограниченную применимость.

Ниже рассматривается возможность единого асимптотического подхода к исследованию уравнения, которое моделирует приведенные выше задачи при условии слабой неоднородности среды.

**2. Постановка задачи.** Физические вопросы, рассмотренные во введении, приводят к необходимости исследовать уравнение

$$\alpha \beta^2 \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \beta U_2(x, k, \omega) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + U_1(x, k, \omega) \varphi = 0 \quad (\alpha, \beta \ll 1) \quad (2.1)$$

где  $x$  — безразмерная координата,  $k, \omega$  — параметры задачи,  $\alpha$  и  $\beta$  — малые параметры.

Обычно в физической постановке задачи параметр  $\alpha$  связан с учетом слабого диссипативного процесса, а  $\beta$  — параметр «квазиклассичности», представляющий собой отношение характерной длины изменения  $\varphi$  к характерной длине изменения  $U_1, U_2$ : в уравнении (2.1) функции  $U_1$  и  $U_2$  — безразмерные величины, причем

$$U_1, U_2 \sim 1 \quad (2.2)$$

за исключением точек, где они обращаются в нуль.

Решения, стремящиеся к нулю на  $\pm\infty$ , будем называть в дальнейшем финитными, или локальными. В противном случае решения будем называть нелокальными.

При  $\beta = 1$  в (2.1) исследование уравнения проводилось в работах Линь Цзя-Цзяо [1] и Вазова [8] в связи с задачей об устойчивости пуазейлевского течения. При  $\alpha = 0$  уравнение переходит в уравнение 2-го порядка, подробно исследованное в многочисленных работах, особенно в связи с квазиклассическим приближением в квантовой механике (см., например, [9]).

Решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$\varphi(x) = C \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x q(x) dx \right\}, \quad q(x) = q^{(0)}(x) + \sqrt{\beta} q^{(1)}(x) + \dots \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> Подробный обзор работ в этом направлении см. в [3, 4].

<sup>2</sup> Приведенные рассуждения несколько грубо передают обстановку, изучавшуюся в [5].

Подстановка (2.3) в (2.1) с учетом (2.2) дает

$$q^{(0)4} - \frac{U_2}{\alpha} q^{(0)2} + \frac{U_1}{\alpha} = 0 \quad (2.4)$$

$$4q^{(1)}q^{(0)3} + 6q^{(0)2} \frac{dq^{(0)}}{dx} - \frac{U_2}{\alpha} \left( \frac{dq^{(0)}}{dx} \right) + 2pq^{(1)}q^{(0)} = 0 \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.4) находим

$$q^{(0)} = \pm \left[ \frac{U_2}{2\alpha} \pm \left( \frac{U_2^2}{4\alpha^2} - \frac{U_1}{\alpha} \right)^{1/2} \right]$$

или, учитывая малость  $\alpha$ , имеем две пары значений

$$q_i^{(0)} = \pm \sqrt{U_1/U_2} \quad (i = 1, 2), \quad q_i^{(0)} = \pm \sqrt{U_2/\alpha} \quad (i = 3, 4) \quad (2.6)$$

Аналогично из (2.5) находим:

$$q_i^{(1)} = -\frac{1}{2} \frac{dq_i^{(0)}}{dx} \frac{1}{q_i^{(0)}} \quad (i = 1, 2), \quad q_i^{(1)} = -\frac{5}{2} \frac{dq_i^{(0)}}{dx} \frac{1}{q_i^{(0)}} \quad (i = 3, 4) \quad (2.7)$$

Формулы (2.6), (2.7) позволяют записать решение (2.4) для  $\varphi$  в виде (с точностью до следующих членов в разложении (2.3) для  $q$ )

$$\varphi_i = \frac{C}{\sqrt{p_i}} \exp \int p_i dx \quad (i = 1, 2) \quad (2.8)$$

$$\varphi_i = \frac{C}{\sqrt{p_i^5}} \exp \int p_i dx \quad (i = 3, 4) \quad \left( p_i = \frac{q_i^{(0)}}{\sqrt{\beta}} \right) \quad (2.9)$$

Полученное решение (2.8) будет асимптотическим, и справедливость его ограничена областью применимости разложения (2.3), которую будем в дальнейшем именовать внешней. Очевидно, что решение (2.8), (2.9) неприменимо в областях вблизи точек, где  $U_1$  и  $U_2$  обращаются в нуль; эти области в дальнейшем будем называть внутренними. Решение нужно искать отдельно. В связи с этим решение уравнения (2.1) при заданных граничных условиях сводится к следующим трем процедурам: 1) построить решения во внутренних и внешней областях; 2) указать условия сшивания решений (этот вопрос возникает в связи с наличием линий Стокса при использовании асимптотических выражений); 3) удовлетворить граничным условиям (это приводит также и к уравнению для собственных значений задачи). Заметим, что точка, где  $U_1 = 0$ , не заслуживает особого внимания, так как вблизи этой точки роль члена с  $\varphi^{IV}$  в (2.1) несущественна, и поведение решения вблизи этой точки определяется теорией, развитой для уравнения (2.1) с  $\alpha = 0$ .

В дальнейшем, без ограничения общности развешаемого ниже метода, выберем для удобства конкретный вид функций  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  (фиг. 1). На фиг. 2 области 1, 2 — внешние, область 3 — внутренняя.

Приведенные выше рассуждения заканчивают постановку задачи, решение которой будет осуществляться в п. 3—5.

**3. Слабый случай.** Для выбранного вида  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  (фиг. 1) величины  $U_1$ ,  $U_2$  обращаются в нуль соответственно в точках  $A$ ,  $B$  и  $O_1$ ,  $O_2$ . Будем предполагать<sup>1</sup>, что расстояние между  $B$  и  $O_2$  больше единицы. Вблизи точки  $O_2$  можно представить

$$U_2 = Ux, \quad x < 1, \quad U \sim 1 \quad (3.1)$$

а  $U_1$  считать постоянной величиной.

<sup>1</sup> Если проводимые рассуждения будут инвариантны относительно замены  $(O_1, A) \rightleftharpoons (O_2, B)$ , то будем говорить только о точках  $(O_2, B)$ .

На фиг. 3 изображены области применимости различных приближений. Разложение (3.1) справедливо на отрезке  $(O_2, 1)$ ; решения (2.8), (2.9) — соответственно на отрезках  $1$  и  $3$ .

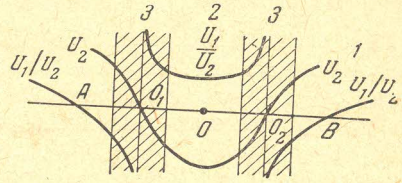
При  $x < 1$  уравнение (2.1) принимает

вид

$$\alpha\beta^2\varphi^{IV} - \beta Ux\varphi'' + U_1\varphi = 0 \quad (3.2)$$

Сделаем, как и в работе [1], замену  $x = \alpha^{1/3}y$  и рассмотрим решение получившегося уравнения

$$\beta \frac{d^4\varphi}{dy^4} - Uy \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{\alpha^{1/3}}{\beta} U_1\varphi = 0 \quad (3.3)$$



Фиг. 2

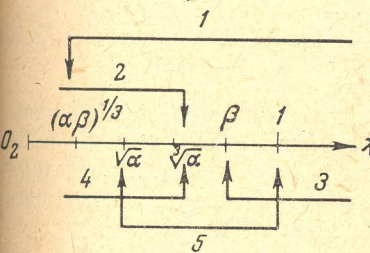
вблизи  $y \sim 1$ . В этом параграфе ограничимся случаем  $\alpha^{1/3}/\beta < 1$ . Тогда можно построить решение, аналогичное [1], в виде асимптотического ряда

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \frac{\alpha^{1/3}}{\beta} \varphi^{(1)} + \dots \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.3) дает

$$\beta \frac{d^4\varphi^{(0)}}{dy^4} - Uy \frac{d^2\varphi^{(0)}}{dy^2} = 0 \quad (3.5)$$

Область применимости решений уравнения (3.5) справа определяется значениями  $x \sim \alpha^{1/3}$  и на фиг. 3 обозначена отрезком  $2$  (или  $4$ ). Уравнение (3.5) имеет четыре решения [1]:



Фиг. 3

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = x \quad (3.6)$$

$$\varphi_3 = \int_0^y dy \int_0^y dy \sqrt{y} H_{1/3}^{(1)} \left[ \frac{2}{3} (iy)^{3/2} \left( \frac{U}{\beta} \right)^{1/2} \right]$$

$$\varphi_4 = \int_0^y dy \int_0^y dy \sqrt{y} H_{1/3}^{(2)} \left[ \frac{2}{3} (iy)^{3/2} \left( \frac{U}{\beta} \right)^{1/2} \right] \quad (3.7)$$

Здесь  $H^{(1)}, H^{(2)}$  — функции Ганкеля соответственно первого и второго рода. Учитывая, что аргумент функций Ганкеля в (3.7) велик, можно записать для решений  $\varphi_3, \varphi_4$ , обращаясь на  $+\infty$  в нуль

$$\varphi \sim x^{-5/4} \exp \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{U}{\alpha\beta} \right)^{1/2} x^{3/2} \right\} \quad (x > 0)$$

$$\varphi \sim |x|^{-5/4} \sin \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{U}{\alpha\beta} \right)^{1/2} (x)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (x < 0) \quad (3.8)$$

Если  $\varphi$  не должно обращаться на  $+\infty$  в нуль, то при  $x > 0$  решение состоит также и из растущей экспоненты, а решение при  $x < 0$  определяется по обычным правилам, учитывающим, что  $x = 0$  есть точка поворота [10]. Решения (3.8) переходят в решения, определяемые уравнением (2.9), и их, следовательно, можно шить. Возможность сшивки обеспечена тем, что отрезки  $1$  и  $2$  на фиг. 3 имеют общую часть, внутри которой и происходит сшивка. Совсем другая картина для решений (3.6) и (2.8), которые не переходят одно в другое и поэтому непосредственно несшивае-

мы. Это связано со следующим обстоятельством. Пара решений (3,6) принципиально не имеет квазиклассического вида и для нее

$$k_y^2 \equiv \varphi^{-1} d^2 \varphi / dy^2 = 0 \quad (3.9)$$

На самом деле равенство (3.9) определено с точностью  $\alpha^{1/2} \beta^{-1} \ll 1$ . Это неравенство означает, что области применимости решений (2.8) и (3.6) (на фиг. 3 — это соответственно отрезки 3 и 4) не перекрываются.

Для устранения указанной трудности рассмотрим уравнение

$$\beta U x \varphi'' - U_1 \varphi = 0 \quad (3.10)$$

справедливое как нулевое приближение в области  $\sqrt{a} < x < 1$ . (отрезок 3 на фиг. 3). Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \sqrt{x Z_1} (-2\sqrt{U_1 x / U \beta}) \quad (3.11)$$

где  $Z_1$  — одна из двух линейно независимых цилиндрических функций (например,  $I_1$  и  $N_1$ ). При малых значениях аргумента в (3.11) имеем  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = x$ , т. е. (3.11) переходит в (3.6). При больших значениях аргумента асимптотика  $Z_1$  совпадает с (2.8). Это заканчивает первую процедуру, указанную в п. 2. Ответ на вторую часть задачи, указанную там же, содержится в теоремах Вазова [8], которые в рассматриваемом случае сохраняют свою силу.

Уравнения для собственных значений в случае локальных решений легко записать сразу, поступая так же, как и в квазиклассическом приближении для уравнения второго порядка [9] при выводе «правил квантования»:

$$\int_{0_1}^{0_2} \sqrt{\frac{U_2}{\alpha \beta}} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad \int_{0_2}^A \sqrt{\frac{U_1}{\beta U_2}} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad (3.12)$$

Выражения (3.12) дают два независимых решения для собственных значений. Это соответствует тому, что на  $+\infty$  (или  $-\infty$ ) имеем два линейно независимых решения, определяемых (2.8) или (2.9), которые в дальнейшем «протягиваются» на  $-\infty$  (или  $+\infty$ ) каждое независимо (связь возникает лишь в следующем порядке по  $\alpha / \beta^2$ ).

**4. Классификация.** В уравнении (3.2), справедливом при  $x < 1$ , сделаем замену

$$x = \beta y \quad (4.1)$$

Это дает

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{d^4 \varphi}{dy^4} - U y \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + U_1 \varphi = 0 \quad (4.2)$$

Решение этого уравнения получаем, применяя метод Лапласа

$$\varphi(y) = \int \frac{1}{t^2} \exp \left\{ yt - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{t^3}{3U} + \frac{1}{t} \frac{U_1}{U} \right\} dt \quad (4.3)$$

где интеграл берется в плоскости комплексного переменного  $t$  по контуру, на концах которого функция

$$\exp \left\{ yt - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{t^3}{3U} + \frac{1}{t} \frac{U_1}{U} \right\}$$

обращается в нуль. Решение (4.3), в соответствии с (4.1) и (3.1), справедливо в области  $y < 1 / \beta \gg 1$ . Ограничимся рассмотрением области

$$1 < y < 1 / \beta \gg 1, \quad \text{или} \quad \beta < x < 1 \quad (4.4)$$

В рассматриваемой области  $y > 1$ , поэтому для вычисления интеграла в (4.3) можно воспользоваться методом перевала. Имеем четыре перевальных точки

$$t_0 \equiv q_i^\circ(y) = \pm \left( \frac{\beta^2}{2\alpha} U \right)^{1/2} \left( y \pm \left( y^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Это определяет четыре контура, интегрирование по которым дает четыре линейно-независимые решения. Выбирая соответствующим образом контуры, получаем решения

$$\Phi_i(y) \sim \sqrt{\pi} \left[ y \left( \frac{U_1}{U} \frac{1}{q_i^{\circ 3}} - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{q_i^\circ}{U} \right) \right]^{-1/2} \frac{1}{q_i^{\circ 2}} \exp \int q_i^\circ(y) dy \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.6)$$

Определяя

$$q_i^\circ = \pm \left( \frac{\beta^2 U}{2\alpha} \right)^{1/2} \left( y - \left( y^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (i = 1, 2) \quad (4.7)$$

$$q_i^\circ = \pm \left( \frac{\beta^2 U}{2\alpha} \right)^{1/2} \left( y + \left( y^2 - \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{4U_1}{U^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (i = 3, 4)$$

получаем из (4.6) <sup>4</sup>

$$\Phi_i(y) \sim (q_i^\circ)^{-1/2} \exp \int q_i^\circ(y) dy \quad (i = 1, 2) \quad (4.8)$$

$$\Phi_i(y) \sim (q_i^\circ)^{-3/2} \exp \int q_i^\circ(y) dy \quad (i = 3, 4)$$

При больших значениях  $y$  решения (4.8), как нетрудно убедиться, переходят в соответствующие решения во внешней области (2.8), (2.9).

Рассмотрим значение  $y$ , обращающее в нуль внутренний корень в (4.7)

$$y_0 \equiv +ia = \pm 2\sqrt{(\alpha/\beta^2)U_1/U} \quad (4.9)$$

(при рассматриваемом виде функций  $U_1(x)$  и  $U_2(x)$  в точках  $y_0$  величина  $U_1 < 0$  и  $y_0$  — чисто мнимое). Точки  $y_0$  будем в дальнейшем называть точками ветвления. Учитывая (2.2) и (4.1), видим, что значение в точках ветвления  $x \sim \sqrt{\alpha}$  и расстояние между точками ветвления  $\sim \sqrt{\alpha}$ . Из (4.9) сразу же следует, что

$$a < 1 \quad (\alpha/\beta^2 < 1), \quad a > 1 \quad (a/\beta^2 > 1) \quad (4.10)$$

В случае  $a < 1$  точки ветвления не попадают в область (4.4), где справедливо решение (4.8), и на них можно не обращать внимания. В случае  $a > 1$  это не так и, как увидим в дальнейшем, учет точек ветвления существенно меняет все рассмотрение и может привести к качественно новой физической картине процесса. Случай  $a < 1$  будем называть слабым, случай  $a > 1$  — сильным.

Решение задачи, проведенное в п. 3, было справедливо при  $\alpha/\beta^2 < \beta < 1$ , поэтому его справедливо отнести к слабому случаю.

Если ввести понятие длины волны

$$\lambda \sim \Phi / \frac{d\Phi}{dx}$$

то в сильном случае между точками ветвления «укладывается» много длин волн, чего нет в слабом случае. Таким образом, классификация проведена по числу длин

<sup>4</sup> Здесь и далее для простоты записи предэкспоненциальный множитель обозначен той же буквой, что и подынтегральное выражение в фазе; в действительности они отличаются членами  $\sim \alpha$ , несущественными при  $x > \sqrt{\alpha}$ .

волн, которое помещается между точками ветвления (т. е. по соотношению между параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ ), хотя расстояние между точками ветвления в обоих случаях одно и то же ( $\sim \sqrt{\alpha}$ ).

**5. Сильный случай.** Как уже отмечалось, необходимость учета точек ветвления  $a_1, a_2, b_1$  и  $b_2$  (фиг. 4) совсем меняет правила перехода из, например, области  $x < O_1$  в область  $x > O_1$ .

Чтобы получить эти правила для (4.8), определим ветви корней в (4.7) следующим образом (вблизи точки  $O_1$ ):

$$\pm \sqrt{y - \sqrt{y^2 + a^2}} \begin{cases} \pm^{1/2} \sqrt{2} (\sqrt{y + ia} - \sqrt{y - ia}) & (y > 0) \\ \pm^{1/2} i \sqrt{2} (\sqrt{|y| + ia} - \sqrt{|y| - ia}) & (y < 0) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\pm \sqrt{y + \sqrt{y^2 + a^2}} \begin{cases} \pm^{1/2} \sqrt{2} (\sqrt{y + ia} + \sqrt{y - ia}) & (y > 0) \\ \pm^{1/2} i \sqrt{2} (\sqrt{|y| + ia} + \sqrt{|y| - ia}) & (y < 0) \end{cases} \quad (5.2)$$

После этого решения (4.8) записываются в виде

$$\Phi_{1,2} = \begin{cases} (q_1^\circ)^{-1/2} \exp \left\{ \pm \int (w_1(y) - w_2(y)) dy \right\} & (y > 0) \\ (q_1^\circ)^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int (w_1(|y|) - w_2(|y|)) dy \right\} & (y < 0) \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\Phi_{3,4} = \begin{cases} (q_3^\circ)^{-5/2} \exp \left\{ \pm \int (w_1(y) + w_2(y)) dy \right\} & (y > 0) \\ (q_3^\circ)^{-5/2} \exp \left\{ \pm i \int (w_1(|y|) + w_2(|y|)) dy \right\} & (y < 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$w_1 = \sqrt{1/2 \beta^2 U / \alpha \sqrt{y - ia}}, \quad w_2 = \sqrt{1/2 \beta^2 U / \alpha \sqrt{y + ia}} \quad (5.5)$$

В выражениях (5.3), (5.4) экспонента факторизована по обеим точкам ветвления, что позволит в дальнейшем воспользоваться правилами типа [10].

Слева от точки  $A$  запишем произвольное решение<sup>1</sup>, обращающееся на  $-\infty$  в нуль

$$\begin{aligned} \varphi = & |q_1^\circ|^{-1/2} \exp \left( -i \int_A^y w_1(y) dy + i \int_A^y w_2(y) dy \right) + \\ & + D |q_3^\circ|^{-5/2} \exp \left( \int_x^y w_1(y) dy + \int^y w_2(y) dy \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Справа от точки  $A$  второй член в (5.6) не меняется, а первый преобразуется согласно правилам (5.1). Это дает

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & |q_1^\circ|^{-1/2} \left[ \exp \left( -i \frac{\pi}{4} + i \int_A^y q_1^\circ dy \right) + \exp \left( i \frac{\pi}{4} - i \int_A^y q_1^\circ dy \right) \right] + \\ & + D |q_3^\circ|^{-5/2} \exp \left( \int^y w_1(y) dy + \int^y w_2(y) dy \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Учитывая формулы (5.3) — (5.5), можно построить картину линий уровня для каждой из точек ветвления отдельно (фиг. 4). Линии уровня от двух соседних точек ветвления пересекаются на действительной оси

<sup>1</sup> Смысл обозначений и букв, не оговоренных в этом параграфе, пояснен на фиг. 4.

в точках  $C_1, C_2$ . Тогда решение (5.7) можно переписать в следующем виде для  $A < y < C_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & \frac{1}{|\bar{q}_1^\circ|^{1/2}} e^{i\varphi_1} \exp\left(-\int_y^{a_1} w_1(y) dy + \int_y^{a_2} w_2(y) dy\right) + \\ & + \frac{1}{|\bar{q}_1^\circ|^{1/2}} e^{-i\varphi_1} \exp\left(\int_y^{a_1} w_1(y) dy - \int_y^{a_2} w_2(y) dy\right) + \\ & + D |\bar{q}_3^\circ|^{-5/2} \exp\left(\int_y^{a_1} w_1(y) dy + \int_y^{a_2} w_2(y) dy\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

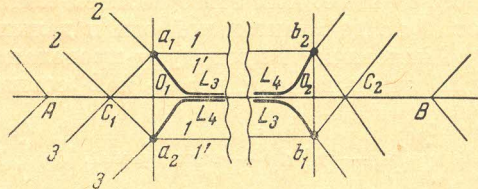
$$\begin{aligned} i\varphi_1 = & \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}} \left\{ \int_{L_1} \sqrt{U_2(z) - \sqrt{4U_1(z)\alpha/\beta^2}} dz - \right. \\ & \left. - \int_{L_2} \sqrt{U_2(z) + \sqrt{4U_1(z)\alpha/\beta^2}} dz \right\} - i\frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Интегралы в (5.8) берутся из точки ветвления  $a_1(a_2)$  по линии, где  $w_1(w_2)$  — чисто мнимое, до точки  $C_1$  и далее по действительной оси. Контуры  $L_1$  и  $L_2$  в (5.9) начинаются в точке  $A$ , идут вдоль действительной оси до точки  $C_1$  и дальше по линиям, где  $w_1$  и  $w_2$  — соответственно чисто мнимые, до точек ветвления  $a_1, a_2$ . При написании (5.9) учтено также, что вблизи точки  $O_1$ , где  $U_2 = 0$ , выражения под знаком интеграла переходят соответственно в

$$\begin{aligned} p_1^\circ &= \sqrt[4]{1/2(\beta^2 U / \alpha)} (z - ia) \\ p_2^\circ &= \sqrt[4]{1/2(\beta^2 U / \alpha)} (z + ia) \end{aligned}$$

Разрезы выбраны по линиям 1. Нетрудно убедиться, что определенная выражением (5.9) величина  $\varphi_1$  — чисто действительная.

Для того чтобы решение (5.8), определенное слева от точки  $O_1$ , записать справа от  $O_1$ , воспользуемся правилами обхода, приведенными в приложении. Удобно ввести обозначения:



Фиг. 4

$$p_1 = \sqrt[4]{1/2(\beta^2 / \alpha)} (U_2 - \sqrt{4U_1\alpha / \beta^2}), \quad p_2 = \sqrt[4]{1/2(\beta^2 / \alpha)} (U_2 + \sqrt{4U_1\alpha / \beta^2})$$

Тогда для  $O_1 < y < O_2$  имеем с точностью до постоянного множителя

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & ie^{i\varphi_1} |p_1 + p_2|^{-5/2} \exp\left(i \int_{a_1}^y p_1(z) dz + i \int_{a_2}^y p_2(z) dz\right) - \\ & - (ie^{i\varphi_1} + D) |p_1 + p_2|^{-5/2} \exp\left(-i \int_{a_2}^y p_1(z) dz - i \int_{a_2}^y p_2(z) dz\right) + \\ & + e^{i\varphi_1} |p_1 - p_2|^{-1/2} \exp\left(i \int_{a_1}^y p_1(z) dz - i \int_{a_2}^y p_2(z) dz\right) + \\ & + (2 \cos \varphi_1 - iD) |p_1 - p_2|^{-1/2} \exp\left(-i \int_{a_1}^y p_1(z) dz + i \int_{a_2}^y p_2(z) dz\right) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь интегрирование производится из  $a_1, a_2$  соответственно по линиям  $L_3, L_4$  (Фиг. 4), спускающимся на действительную ось и идущими по ней



до точки  $y$ . Транспортируя решение (5.11) к точке  $O_2$ , переписываем его в виде

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & i e^{i\varphi_1} \frac{\Phi}{|p_1 + p_2|^{5/2}} \exp \left( -i \int_y^{b_1} p_1(z) dz - i \int_y^{b_2} p_2(z) dz \right) - \\ & - \frac{i e^{i\varphi_1} + D}{\Phi} |p_1 + p_2|^{-5/2} \exp \left( i \int_y^{b_1} p_1(z) dz + \int_y^{b_2} p_2(z) dz \right) + \\ & + \frac{e^{i\varphi_1} \Psi^*}{|p_1 - p_2|^{1/2}} \exp \left( -i \int_y^{b_1} p_1(z) dz + i \int_y^{b_2} p_2(z) dz \right) + \\ & + \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} |p_1 - p_2|^{-1/2} \exp \left( i \int_y^{b_1} p_1(z) dz - i \int_y^{b_2} p_2(z) dz \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Интегралы от  $y$  до  $b$  понижаются в том же смысле, что и от  $y$  до  $a$ . Кроме того, положим:

$$\Phi \equiv e^{i\varphi_2} = \exp \left( i \int_{L_3} p_1(z) dz + i \int_{L_4} p_2(z) dz \right) \quad (5.13)$$

$$\Psi^* = \exp \left( -i \int_{L_3} p_1(z) dz + i \int_{L_4} p_2(z) dz \right) \quad (5.14)$$

Контуры  $L_3$  и  $L_4$  обозначены на фиг. 4. Легко убедиться в том, что показатель экспоненты в (5.14) чисто действительный, а  $\varphi_2$  в (5.13) — чисто мнимое. Для этого изогнем контур  $L_3$  так, чтобы он шел из  $a_1$  в  $O_1$  потом по действительной оси и дальше из  $O_2$  в  $b_1$ .

Аналогичную процедуру сделаем и с  $L_4$ . Тогда, согласно (5.10), в действительной оси, где  $L_3$  и  $L_4$  совпадают, имеем

$$\int_{O_1}^{O_2} (p_1 - p_2) dy \text{ — чисто мнимый,} \quad \int_{O_1}^{O_2} (p_1 + p_2) dy \text{ — чисто действительный}$$

Учитывая, что

$$\int_{a_2}^{O_1} \sqrt{z + ia} dz = (ia)^{3/2}, \quad \int_{a_1}^{O_1} \sqrt{z - ia} dz = (-ia)^{3/2}$$

приходим сразу к высказанному выше утверждению.

Справа от точки  $O_2$ , используя снова правила обхода (см. приложение), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & |p_1 + p_2|^{-5/2} \left( i \Phi e^{i\varphi_1} - i \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} \right) \exp \left( \int_{b_1}^y p_1(z) dz + \int_{b_2}^y p_2(z) dz \right) + \\ & + |p_1 + p_2|^{-5/2} \left( \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} - \frac{i e^{i\varphi_1} + D}{\Phi} \right) \exp \left( \int_{b_1}^y p_1(z) dz + \int_{b_2}^y p_2(z) dz \right) + \\ & + |p_1 - p_2|^{-1/2} \left( -e^{i\varphi_1} \Phi + e^{i\varphi_1} \Psi^* - \frac{e^{i\varphi_1} - iD}{\Phi} + \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} \right) \times \\ & \times \exp \left( - \int_{b_1}^y p_1(z) dz + \int_{b_2}^y p_2(z) dz \right) + |p_1 - p_2|^{-1/2} \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} \times \\ & \times \exp \left( \int_{b_1}^y p_1(z) dz - \int_{b_2}^y p_2(z) dz \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Условие отсутствия на  $+\infty$  нарастающих решений дает

$$e^{i\varphi_1} \Phi \Psi = 2 \cos \varphi_1 - iD$$

$$(\Psi - \Phi) e^{i\varphi_1} - \frac{e^{i\varphi_1} - iD}{\Phi} + \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} = e^{2i\varphi_1} \frac{2 \cos \varphi_1 - iD}{\Psi} \quad (5.16)$$

$$i\varphi_3 = - \int_{L_1'} p_1(z) dz + \int_{L_2'} p_2(z) dz \quad (5.17)$$

Здесь контуры  $L_1'$  и  $L_2'$  аналогичны контурам  $L_1$ ,  $L_2$  и берутся соответственно от  $b_1$ ,  $b_2$  через точку  $C_2$  до  $B$ . Заметим, что  $\varphi_3$ , как и  $\varphi_2$ , чисто действительное и положительное. Решая систему (5.16), находим

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)} = \pm 1, \quad \text{или} \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = n\pi \quad (5.18)$$

Отсюда (5.19)

$$i \int_{L_1} p_1 dz - i \int_{L_2} p_2 dz + \int_{L_3} p_1 dz + \int_{L_4} p_2 dz - i \int_{L_1'} p_1 dz + i \int_{L_2'} p_2 dz = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

Уравнение (5.19) представляет собой обобщенное «правило квантования» для сильного случая. Левая часть (5.19) представляет собой полный набег фазы, состоящий из трех частей: 1) набег фазы в области  $AO_1$ ; 2) набег фазы в области  $O_1O_2$ ; 3) набег фазы в области  $O_2B$ .

Длина волн в этих областях

$$\lambda_x \sim \left(\int \sqrt{U_1/\beta U_2} dx\right)^{-1} \quad \text{в } AO_1 \text{ и } O_2B, \quad \lambda_x \sim \left(\int \sqrt{U_2/\alpha\beta} dx\right)^{-1} \quad \text{в } O_1O_2$$

Такое сильное «сцепление» колебаний характерно для сильного случая, и в этом смысле условие (5.19) выражает этот факт.

**6. Замечания.** 1. Согласно классификации, проведенной в п. 4, при  $\alpha/\beta^2 < 1$  имеем слабый случай. Решение, проведенное в п. 3, справедливо при  $\alpha/\beta^2 < \alpha$ . Таким образом, для слабого случая остается нерассмотренной область  $\beta \leq \alpha/\beta^2 < 1$ . Решение, данное в п. 3, как указывалось, является обобщением известного решения [1] на квазиклассический случай. Можно, однако, построить решение при  $\alpha/\beta^2 < 1$ , включающее в себя, как частный случай  $\alpha/\beta^2 < \beta$ . Для этого обратимся к формулам (4.6)–(4.9). Решения (4.8) являются искомыми для  $\alpha/\beta^2 < 1$ . Правила сшивки для них те же, что и в п. 3, поскольку точки ветвления (4.9) не лежат в области справедливости (4.8). «Правила квантования» (3.12) остаются прежними.

Приведенные рассуждения унифицируют метод, развитый в п. 4, 5. Чисто техническое отличие связано с тем, что построенные асимптотические решения (4.8) имеют разную структуру линий Стокса в зависимости от того, попадают или нет точки ветвления (4.9) в область, где справедливо решение (4.8).

2. Приведенный асимптотический метод легко обобщается на тот случай, когда поведение  $U_2(x)$  вблизи нуля  $U_2$  имеет вид  $U_2 \sim U_2 x^m$ . При этом естественно, что условия сшивки решений меняются, однако уравнения (3.12) и (5.18) остаются прежними. Случай  $m = 2$  для слабой связи был рассмотрен в [7]. Например, «гравитационная мода», найденная в [7], получается сразу из второго условия (3.12).

3. Как известно [5, 6, 11] наличие неоднородности в среде может приводить к тому, что один тип колебаний в некоторой области рождает новый тип колебаний (эффект «трансформации» волн). Подробная физическая картина этого явления имеется в [7]. Развитый выше метод может быть применен к этому явлению. Эффект трансформации уже содержится в решении. Так, например, в сильном случае (п. 5) наличие осциллирующего решения  $\varphi_{3,4}$  в области  $O_1O_2$  приводит к появлению осциллирующего решения  $\varphi_{1,2}$  в области  $AO_1$ . Можно сказать, что точками, приводящими к трансформации, являются точки ветвления. Коэффициент трансформации получается как отношение амплитуд  $\varphi_1$  к  $\varphi_3$ . Естественно, что в слабом случае эффект трансформации мал, так как «рождение» нового решения происходит по малому параметру  $\alpha/\beta^2$ . Существенным в сильном случае является сильная трансформация. Коэффициент трансформации может быть при этом  $\sim 1$ .

**7. О некоторых особенностях неустойчивости плазмы в поле тяжести.** В качестве примера применения изложенной выше теории рассмотрим особенности стабилизации так называемой «желобковой» неустойчивости плазмы при учете конечности ларморовского радиуса ионов [12].

Дифференциальное уравнение для возмущенных величин в интересующем нас случае имеет, как известно [3], вид

$$\beta \varphi'' - \left\{ 1 - \frac{G}{r(r-1)} \right\} \varphi = 0 \quad (7.1)$$

$$\beta = \frac{1}{(k_y L)^2}, \quad r = \frac{\omega}{\omega_2}, \quad \omega_i = \frac{cT}{eH_0} k_y \frac{n_0'}{n_0}, \quad G = \frac{g}{\omega_i^2} \frac{n_0'}{n_0}, \quad n_0' = \frac{dn_0}{dx}$$

Здесь  $L$  — характерный размер,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $n_0$  — плотность,  $T$  — температура,  $H_0$  — напряженность магнитного поля. При этом неустойчивость стабилизируется, если  $G \lesssim 1$ , а рассмотрение можно считать корректным, когда показано существование финитных решений. Однако, как следует из (7.1), в точке, где  $r = 1$ , коэффициент при  $\varphi$  терпит разрыв, и необходимо обосновать существование финитных решений. Будем поэтому исходить из более широких предположений при выводе уравнения для возмущенных величин и учтем возмущение температуры  $T$ , удовлетворяющей в квазиклассическом приближении уравнению

$$\frac{3}{2} n_0 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}_{0i} \nabla) T \right) + n_0 T_0 \operatorname{div} \mathbf{V}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i$$

$$\mathbf{q}_i = \frac{5}{2} \frac{cn_0 T_0}{eH_0} [\mathbf{h} \nabla T] \quad \left( \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}_0}{H} \right) \quad (7.2)$$

Здесь  $\mathbf{V}_{0i}$ ,  $T_0$  — соответственно невозмущенные скорость и температура ионов. Электроны для простоты будем считать холодными. Выбираем возмущение в виде  $\varphi(x) \exp(iy k_y + i\omega t)$  и проводя стандартные простые вычисления, отличающиеся от вывода (7.1) лишь учетом возмущения температуры, получим в системе координат, где ионы покоятся, уравнение

$$\varphi^{IV} - \left\{ \frac{2}{\beta} + (r-1) \left[ 3rR^2 - \frac{G}{\beta(r-1)^2} \right] \right\} \varphi'' +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{\beta^2} + \frac{(r-1)}{\beta} \left[ 3rR^2 - \frac{G}{\beta(r-1)^2} \right] - 3 \frac{R^2 G}{\beta} \right\} \varphi = 0 \quad \left( R = \frac{L}{r_1} \right) \quad (7.3)$$

Здесь  $r_i$  — ларморовский радиус ионов.

Рассмотрим для простоты случай слабой связи, соответствующий двум отдельным уравнениям для нахождения собственных частот (3.12). При этом второе из уравнений (3.12) соответствует случаю обычных желобковых возмущений, причем роль второй «точки поворота» играет точка, где  $U_2 = 0$ , а финитные решения существуют, если вне промежутка между «точками поворота» потенциал  $U_1/U_2$  приводит к затухающим решениям. Если

$$rR^2 \gg \frac{G}{\beta(r-1)^2} \quad (G \lesssim 1)$$

то из (7.3) получим результат, соответствующий (7.1), т. е. стабилизации неустойчивости. Рассмотрим теперь, к чему приводит второе уравнение для собственных частот, т. е.

$$\int_{O_2}^{O_2} \sqrt{U_2} dx = (n + 1/2) \pi$$

Качественно правильный результат получим уже из условия  $U_2 \approx 0$ . Используя  $U_2$  из (7.3) в случае, когда  $r = 1 + r_1$  ( $r_1 \ll 1$ ), найдем, что

$$r_1 = {}^{2/3} \sqrt{(k_y r_i)^2} \pm \sqrt{{}^{1/9} (k_y r_i)^4 + (k_y r_i)^2 G} \quad (7.4)$$

Из (7.4) видим, что учет возмущений температуры приводит к неустойчивости, если

$$|G| > k_y^2 r_i^2 \quad (7.5)$$

и стабилизация неустойчивости налагает более жесткие условия на ларморовский радиус, чем это требуется согласно анализу уравнения (7.1).

Расстояние между точками «пересечения» решений в данном случае

$$x \sim k_y r_i L \quad (7.6)$$

и проведенное рассмотрение справедливо, если  $L r_i^{-1} (k_y r_i)^{3/2} \ll 1$ .

8. Приложение. Выведем правила шивки решений для  $\varphi_i$  при обходе вокруг точек ветвления; для конкретности возьмем точки  $a_1, a_2$  на фиг. 4. Начнем с линии  $L$ , выходящей из точки  $a_1$ . На этой линии решение запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(y) = & A_1 \Pi_1 \exp\left(i \int^y (w_1(z) - w_2(z)) dz\right) + B_1 \Pi_2 \exp\left(-i \int^y (w_1(z) - w_2(z)) dz\right) + \\ & + C_1 \Pi_3 \exp\left(i \int^y (w_1(z) + w_2(z)) dz\right) + D_1 \Pi_4 \exp\left(-i \int^y (w_1(z) + w_2(z)) dz\right) \end{aligned} \quad (8.1)$$

где предэкспоненты  $\Pi_i$  определяются из (4.6). Имеем

при обходе вокруг точки  $a_1$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \exp\{-1/2 \ln(w_1 - w_2)\}, \quad \Pi_3 = \Pi_4 = \exp\{-5/2 \ln(w_1 + w_2)\},$$

при обходе вокруг точки  $a_2$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \exp\{-1/2 \ln(w_2 - w_1)\}, \quad \Pi_3 = \Pi_4 = \exp\{-5/2 \ln(w_2 + w_1)\}$$

Из (8.1) видно, что можно обход осуществлять в отдельности вокруг точек  $a_1$  и  $a_2$ . При этом для обхода вокруг каждой точки ветвления в отдельности получаются те же правила шивки, что и в работе [10] (следует отметить, что в [13] дан другой метод одновременного обхода точек пересечения решений).

Заметим, что вокруг точки  $a_1$  независимо осуществляется обход пары решений при  $A_1$  и  $D_1$ ; вокруг точки  $a_2$  — аналогично независимо обход пары решений при  $A_1$  и  $C_1$  и пары решений при  $B_1$  и  $D_1$ . Обозначим через  $A_i, B_i, C_i, D_i$  систему коэффициентов решения вблизи линий с номером  $i$ , выходящих из точек  $a_1, a_2$ . Тогда результат одновременного обхода вокруг  $a_1, a_2$  дает искомые формулы шивки

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + iD_1, & B_2 &= B_1 + iD_1, & C_2 &= iA_1 + iB_1 + C_1 - D_1, & D_2 &= D_1 \\ A_3 &= A_2 + iC_2, & B_3 &= B_2 + iC_2, & C_3 &= C_2, & D_3 &= iA_2 + iB_2 - C_2 + D_2 \\ A_1' &= A_3 + iD_3, & B_1' &= B_3 + iD_3, & C_1' &= iA_3 + iB_3 + C_3 - D_3, & D_1' &= D_3 \\ A_1' &= -B_1, & B_1' &= -A_1, & C_1' &= -D_1, & D_1' &= -C_1 \end{aligned} \quad (8.2)$$

При написании последней строки в (8.2) учитывается, что решение уравнения (2.1) должно быть аналитическим в комплексной плоскости  $y$ .

Авторы благодарят И. Б. Хрипловича, А. А. Галеева, В. Н. Ораевского за ценные дискуссии.

Поступила 27 V 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., М., 1958.
2. Рудаков Л. И., Сагдеев Р. З. О неустойчивости неоднородной разреженной плазмы в сильном магнитном поле. Докл. АН СССР, 1961, т. 138, стр. 581.
3. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы. Атомная энергия, 1963, т. 15, стр. 451.
4. Силин В. П., Рухадзе А. А. Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы. Успехи физ. наук, 1964, т. 82, стр. 499.
5. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, М., 1960.
6. Денисов Н. Г., Дис. Горьк. гос. ун-та, 1954; Железняков В. В., Злотник Е. А. О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотропной плазме. Изв. высш. учебн. завед. (Радиофизика), 1962, т. 5, стр. 644.
7. Furth H., Killen I., Rosenbluth M. Finite resistivity instabilities of a sheet pichn. Phys. fluids, 1963, vol. 6, 459.
8. Wasow M. The complex asymptotic theory of a fourth order differential equation of hydrodynamics. Ann. Math., 1948, vol. 49, p. 852.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Физматгиз, М., 1963.
10. Furry. Two notes on phase-integral methods. Phys. Rev., 1947, vol. 71, p. 360.
11. Tidman D. A. Radio emission by plasma oscillations in nonuniform plasmas. Phys. Rev., 1960, vol. 117, p. 366.
12. Rosenbluth M., Krall N., Rostoker N. Finite Larmor radius stabilization. Nuclear fusion, 1962, Supplement, 1, 143.
13. Stueckelberg E. C. Theorie der unelastischen Stösse zwischen Atomen. Helv. Phys. Acta, 1932, vol. 5, p. 369.