

ВЛИЯНИЕ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. С. Мусеев и Р. З. Сагдеев

В приближении двухжидкостной гидродинамики при учете конечной проводимости показана неустойчивость равновесия плазмы, удерживаемой сильным магнитным полем. Оценка турбулентной „диффузии“, появляющейся вследствие этой неустойчивости, приводит к коэффициенту диффузии порядка $\frac{cT}{2\pi eH_0}$.

1. Сейчас хорошо известно, что эффекты конечного электрического сопротивления играют большую роль в устойчивости плазмы. Очень часто они приводят к дестабилизации удержания плазмы в магнитном поле [1]. Однако до сих пор, как правило, изучалась устойчивость так называемых „токовых“ систем [2] (предполагался начальный ток, текущий вдоль силовых линий магнитного поля, и это играло существенную роль в механизме возникновения неустойчивости).

Мы покажем, что эффекты конечного сопротивления приводят к неустойчивости и при отсутствии продольного тока. При этом мы ограничимся случаем однородной по длине плазменной трубки с прямыми силовыми линиями магнитного поля H_0 .

2. При исследовании устойчивости неоднородной плазмы мы используем систему уравнений двухжидкостной гидродинамики для электронов и ионов в сильном магнитном поле H_0 , направленном по оси z ($p^2 \ll \frac{H_0^2}{8\pi}$).

Мы будем исходить из предположения о квазинейтральности плазмы ($n_i = n_e$) и потенциальности электрических полей возмущений ($\frac{\omega}{k_{yz}} \ll \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}}$; ω — частота, \mathbf{k} — волновой вектор, $n_0(x)$ — плотность плазмы).

Для характерных частот задачи ($v_{t,e} \gg \frac{\omega}{k_z} \gg v_{t,i}$, где $v_{t,e}$, $v_{t,i}$ — тепловые скорости электронов, ионов) можно не учитывать движения ионов вдоль магнитных силовых линий, а также пренебречь инерцией электронов.

Возмущения выберем в виде $\exp(\omega t - k_z z - k_y y)$. В результате сделанных предположений линеаризованные уравнения для возмущенных величин в системе отсчета, где невозмущенное электрическое поле $\mathbf{E} = 0$, имеют вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

$$-ik_z(nT_{0e} + n_0T_e) - en_0E_z - 0.71ik_z n_0T_e - 0.51m_e n_0 v_{ze} = 0, \quad (3)$$

$$-\nabla_{\perp} p_e - en_0 \mathbf{E}_{\perp} - \frac{en_0}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}_0] - \frac{en}{c} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}_0] = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_0 \{i\omega T_e + v_{0e} T_e i k_y + v_{xe} T'_{0e}\} - T_{0e} \{i\omega n + i k_y v_{0e} n + v_{xe} n'\} = \\ = -k_z^2 x T_e + \frac{5}{2} \frac{c T_{0e}}{e H_0} i k_y (n T'_{0e} - T_e n'), \end{aligned} \quad (5)$$

$$i\omega n + c \frac{E_y}{H_0} n' = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} M n_0 \{i\omega \mathbf{v}_{i\perp} + (\mathbf{v}_{0i} \nabla) \mathbf{v}_{i\perp}\} = e n_0 \mathbf{E}_{\perp} + \frac{e}{c} n_0 [\mathbf{v}_i \times \mathbf{H}_0] + \\ + \frac{e}{c} n [\mathbf{v}_{0i} \times \mathbf{H}_0] - \nabla_{\perp} p_i - \text{div} \vec{\pi}_{\perp}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_0 \{i\omega T_i + v_{0i} T_i i k_y + v_{xi} T'_{0i}\} - T_{0i} \{i\omega n + i k_y v_{0i} n + v_{xi} n'\} = \\ = \frac{5}{2} \frac{c T_{0i}}{e H_0} (T_i n' - n T'_{0i}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\pi_{yy} = -\pi_{xx} = \frac{n T_i}{2\omega_{Hi}} \left(\frac{\partial v_{xi}}{\partial y} + \frac{\partial v_{yi}}{\partial x} \right),$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{n T_i}{2\omega_{Hi}} \left(\frac{\partial v_{xi}}{\partial x} - \frac{\partial v_{yi}}{\partial y} \right); \quad \omega_{Hi} = \frac{e H_0}{M c}.$$

Здесь \mathbf{J} — плотность тока. В уравнение движения электронов [3] вдоль силовых линий включены „термосила“ и сила трения за счет соударений электронов с ионами с частотой соударений ν . Поскольку при наличии начального градиента температуры T'_{0e} возникает также возмущение температуры T_e , то в систему уравнений включено уравнение теплового баланса (5), где x — коэффициент электронной теплопроводности. Уравнение непрерывности (6) одинаково для электронов и ионов. Движение ионов поперек магнитного поля описывается уравнением (7), в котором мы удержали члены с „магнитной вязкостью“ (последний член в уравнении); (8) — уравнение теплового баланса для ионов; \mathbf{v}_{0i} , \mathbf{v}_{0e} — невозмущенные скорости ионов, электронов.

Условие разрешимости системы (1)–(8) приводит нас к следующему дисперсионному уравнению

$$1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{(1+\alpha)\omega_T}{\omega - \frac{2}{3}i\chi k_z^2} + i \frac{\omega + \omega_i}{\omega_s} = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\omega_e = \frac{k_y c T_0}{e H_0} \frac{n'}{n_0}; \quad \omega_T = k_y \frac{c T_0}{e H_0} \frac{T'_0}{T_0}; \quad \alpha = 0.71,$$

$$\chi = \frac{\nu}{n_0}; \quad \omega_s = \frac{v_A^2}{c^2} \frac{k_z^2}{k_y^2} 4\pi\sigma_{\parallel}; \quad \left(v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 M}}; \quad \sigma_{\parallel} = 1.96 \frac{e^2 n_0}{m\nu} \right).$$

Уравнение (9) получено нами в предположении длинноволновых возмущений ($k_y r_i \ll 1$).

Для бесконечно больших σ_{\parallel} (9) переходит в дисперсионное уравнение, полученное в [3] при учете конечной теплопроводности в двухжидкостной гидродинамической модели [напомним, что (9) записано

в системе отсчета, где $\mathbf{E}_0 = 0$]. При этом для случая малой теплопроводности ($\omega_{e, T} \gg k_z^2 \chi$) критерий неустойчивости имеет вид (3)

$$\frac{d \ln T_0}{d \ln n_0} < 0. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь случай постоянной температуры ($\omega_T = 0$). Решение дисперсионного уравнения (9) принимает следующий вид

$$\omega = -\frac{1}{2}(\omega_i - i\omega_s) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_i - i\omega_s)^2 - 4i\omega_s \omega_e}. \quad (11)$$

Отсюда мы видим, что существует неустойчивость в плазме переменной плотности с конечной проводимостью.

Из (11) имеем выражение для инкремента

$$\text{Im } \omega = \frac{1}{2} \left\{ \omega_s - \sqrt{\frac{V(\omega_i^2 - \omega_s^2) + 4\omega_s^2(2\omega_e + \omega_i)^2 - (\omega_i^2 - \omega_s^2)}{2}} \right\}.$$

В случае $\omega_i \ll \omega_e$, т. е. $T_{0i} \ll T_{0e}$, в хорошо проводящей плазме ($\omega_s \gg \omega_e$) неустойчивость носит колебательный характер с

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \omega &\sim \omega_e, \\ \text{Im } \omega &\sim \frac{\omega_e^2}{\omega_s}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В плазме с плохой проводимостью ($\omega_e \gg \omega_s$)

$$\text{Re } \omega \sim \text{Im } \omega \sim \sqrt{\omega_s \omega_e} \ll \omega_e. \quad (13)$$

Если $\omega_i \gg \omega_s$, то неустойчивость является аperiodической с инкрементом $\text{Im } \omega \sim \omega_s \frac{\omega_e}{\omega_i}$.

В общем случае необходимо учитывать влияние теплопроводности на инкремент. Однако, как нетрудно видеть, в случае (13), если

$$\omega_s \gg k_z^2 \chi \quad (14)$$

этим влиянием можно пренебречь. Используя выражения для ω_s , σ_{\parallel} и χ , получим из (14)

$$k_y r_{Hi} \ll 1, \quad (15)$$

т. е. для длинноволновых возмущений теплопроводность мало меняет инкременты.

3. Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о существовании в данном случае финитных решений, т. е. решений, ограниченных в некоторой области пространства. Именно для таких решений справедливы рассуждения, использованные в предыдущем параграфе.

В неоднородной по x плазме мы должны искать решения вида $\varphi(x) \exp i(\omega t + k_z z + k_y y)$. Ограничиваясь для простоты случаем $\omega_T = 0$, $\omega_i \ll \omega_e$ и используя систему (1)–(8), легко получить следующее уравнение для φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_e}{\omega} \right] \right\} k_y^2 \varphi = 0. \quad (16)$$

(Заметим, что (16) можно непосредственно получить из (9) заменой $k_y \rightarrow k_y - \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$). Мы имеем одномерное уравнение типа уравнения Шредингера с комплексным потенциалом $U + iV$. В системе отсчета, где

$\mathbf{v}_{0i} = 0$, вводя $\omega = \Omega + i\nu$ и учитывая, что для нарастающих решений $\nu < 0$, а $\Omega > 0$, получим

$$U = 1 + \frac{\omega_s(x) |\nu| \left[1 - 2 \frac{\omega_s(x) \Omega}{\Omega^2 + \nu^2} \right]}{\Omega^2 + \nu^2}, \quad (17)$$

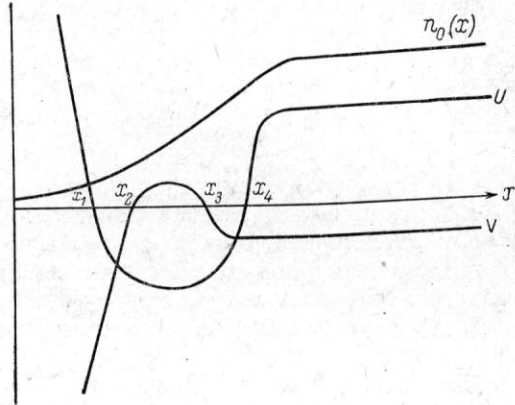
$$V = -\omega_s(x) \frac{\Omega - \frac{\Omega^2 - \nu^2}{\Omega^2 + \nu^2} \omega_s(x)}{\Omega^2 + \nu^2}. \quad (18)$$

Мнимая и действительная части потенциала для решений локализованных в ограниченной области пространства должны удовлетворять следующим интегральным условиям

$$\int |\varphi|^2 dx + \int U |\varphi|^2 dx = 0, \quad (19)$$

$$\int V |\varphi|^2 dx = 0.$$

Здесь интегрирование ведется по области, занятой плазмой. Из второго условия (19), в частности, следует, что если плотность плазмы меняется в пространстве не очень резко, то точки, в которых мнимая часть потенциала обращается в нуль („точки поворота“ мнимой части), должны лежать внутри области между „точками поворота“ действительной части.



Нетрудно видеть из (17) и (18), что если $\Omega > |\nu|$ и $|\Omega^2 - \nu^2| \ll \Omega^2$, то требуемое условие удовлетворяется и графики для U и V имеют вид, представленный на рисунке.

Из анализа поведения ω [см. (9)] следует, что указанные условия для ν и Ω выполняются, если $\omega_s \ll \omega_e$. Это, однако, еще не является полностью убедительным доказательством нужного поведения ν и Ω по следующей причине. По существу дисперсионное уравнение (9) эквивалентно требованию одновременного обращения в нуль действительной и мнимой частей потенциала.

Но как мы видели, „точки поворота“ для U и V могут и не совпадать. Если теперь учесть, что в точках поворота мнимой части потенциала $U \sim k_x^2$ ($k_x^2 > 0$, поскольку внутри „ямы“ решение не затухает), то легко показать, во-первых, выполнение условий для ν и Ω , указанных выше, также и при учете сделанного уточнения и, во-вторых, возможность достаточно сблизить между собой „точки поворота“ для U и V при изменении ν и Ω .

В общем случае строгое решение дифференциального уравнения типа (16) требует точного знания профиля плотности. Мы здесь ограничимся случаем, когда $\omega_i \ll \omega_e$, а плотность меняется настолько медленно, что ω_s можно считать постоянной. Вблизи точки, где $\frac{n_0}{n_0}$ максимально, ω_e можно представить в виде

$$\omega_e = \omega_{e0} - \beta_e x^2. \quad (20)$$

Используя (20) имеем для (16)

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \left\langle \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_{e0}}{\omega} \right] \right\} - i \frac{\omega_s}{\omega^2} \beta_e x^2 \right\rangle k_y^2 \varphi = 0, \quad (21)$$

$$E = - \left\{ 1 - i \frac{\omega_s}{\omega} \left[1 - \frac{\omega_{e0}}{\omega} \right] \right\} k_y^2, \quad (22)$$

$$k = -i \frac{\omega_s \beta_e}{\omega^2} k_y^2. \quad (23)$$

Решение уравнения (21) вполне аналогично решению уравнения Шредингера для линейного гармонического осциллятора. В результате имеем для собственных значений и собственных функций

$$\frac{E}{\gamma^2} = 2n + 1, \quad (24)$$

$$\varphi(x) \sim e^{-\gamma^2 x^2} H_n(\gamma x). \quad (25)$$

Здесь $H_n(\gamma x)$ — полиномы Эрмита, а

$$\gamma^2 = k_y \frac{\sqrt{\omega_s \beta_e}}{\Omega^2 + \nu^2} \frac{1}{\sqrt{2}} [(\Omega + |\nu|) - i(\Omega - |\nu|)]. \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует существование фанитных решений.

4. Развитие неустойчивости должно приводить к возникновению „турбулентного“ режима в плазме и появлению турбулентной диффузии. Проведем размерностные оценки возникающей диффузии, так как это делается обычно в теории турбулентности.

Коэффициент диффузии можно записать в виде

$$D \sim v_n^2 \tau. \quad (27)$$

Здесь v_n — пульсационная скорость плазмы; τ — характерное время исчезновения корреляций. В данном случае $\tau \sim \frac{1}{|\nu|}$, поскольку здесь нет другого времени, характеризующего необратимость „турбулентного“ режима. Амплитуду пульсаций определим из следующих соображений. С одной стороны, неустойчивость приводит к нарастанию амплитуды пульсаций $\frac{\partial v_n}{\partial t} \sim \nu v_n$; с другой стороны, нелинейные члены типа $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ приводят к перекачке энергии в коротковолновую часть спектра, где флуктуации затухают. Из условия баланса между этими двумя процессами и определяется стационарное значение амплитуды пульсаций

$$|\nu| v_n \sim \frac{v_n^2}{\lambda_x}, \quad (28)$$

где λ_x — характерный размер турбулентных пульсаций в направлении оси x .

Определяя из (28) $v_n \sim \nu \lambda_x$, получим для D

$$D \sim |\nu| \lambda_x^2. \quad (29)$$

Из (16) вытекает, что для рассматриваемой нами задачи в случае $\omega_e \gg \omega_s$, пользуясь (13), имеем

$$D \sim \frac{\sqrt{\omega_s \omega_e}}{k_y^2}. \quad (30)$$

Нас интересует максимальный коэффициент диффузии и потому мы возьмем минимально допустимые $k_y \sim \frac{2\pi}{r}$, где r — характерный поперечный размер системы. В $\sqrt{\omega_s}$ еще входит отношение $\frac{k_x}{k_y}$, которое также

должно быть взято максимальным; из (13) имеем предельно допустимое значение для $\frac{k_z}{k_y}$

$$\left(\frac{k_z}{k_y}\right)_{\max} \leq \frac{c\sqrt{\omega_e}}{V_A} \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_{\parallel}}}. \quad (31)$$

Окончательно получаем

$$D_{\max} \sim \frac{cT}{2\pi eH_0} \cdot^1 \quad (32)$$

Заметим, что коэффициент диффузии, принятый в гипотезе Бома, имеет такой же порядок величины [4]. Необходимо при этом иметь в виду следующее. С ростом магнитного поля $\left(\frac{k_z}{k_y}\right)_{\max}$, согласно (31), будет уменьшаться. При этом может оказаться, что при $k_y \sim \frac{2\pi}{r} k_z$ станет порядка $\frac{2\pi}{L_{\parallel}}$ (L_{\parallel} — продольный размер системы). Поскольку дальнейшее уменьшение k_z невозможно, для еще больших магнитных полей минимальное k_y получим из (31), где теперь $k_z \sim \frac{2\pi}{L_{\parallel}}$. Тогда выражение для коэффициента диффузии принимает вид

$$D \sim \frac{L_{\parallel}^{2/3} \rho^{1/3} c^{2/3}}{r^{1/3} \sigma^{1/3} H^2 (2\pi)^{2/3}} \left(\frac{cT}{e}\right)^{1/3}. \quad (33)$$

Изменение характера диффузии плазмы происходит при магнитных полях

$$H \sim \frac{L_{\parallel}^{2/3} c^{2/3} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/3} \left(\frac{cT}{e}\right)^{1/3}}{r^{4/3}} (2\pi)^{1/3}. \quad (34)$$

Так, при $L_{\parallel} = 1$ м, $r = 1$ см, $n \sim 10^{14}$ см⁻³, $T \sim 5$ эв ($2 \cdot 10^{14}$ сек.⁻¹) имеем $H \sim 10^4$ гс.

Укажем теперь на возможное отклонение от формулы (32) в системах настолько длинных, что продольные размеры не накладывают ограничений на k_z . В таком случае отклонение возможно из-за нарушения условия потенциальности

$$\frac{\omega}{k_z} \leq V_A \quad (35)$$

[как показывают оценки, нарушение (35) оказывает стабилизирующее действие на рассмотренную неустойчивость].

Учитывая, что для максимального коэффициента диффузии $\omega \sim \omega_e$, а k_z определяется из (31), где $k_y \sim \frac{2\pi}{r}$, имеет вместо (35) соответствующее условие

$$\frac{\sigma_{\parallel} \omega_i^2}{c^2} \leq \omega_H. \quad (36)$$

Мы видим, что с ростом проводимости плазмы турбулентная диффузия уменьшается.

Литература

[1] H. P. Furth, J. Killen, M. N. Rosenbluth. Finite-Resistivity instabilities of a sheet pinch. *Physics of Fluids*, 6, 459, 1963. — [2] Б. Б. Кадомцев. *ЖТФ*, XXXI, 1209, 1961. — [3] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. Э. Сагдеев. Препринт, Новосибирск, 1962. — [4] A. Cuthrie, P. K. Wakerling. *The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields*, № 4, 1949.

Поступило в Редакцию
18 января 1963 г.

¹ Идея вывода формулы (32) кратко изложена нами в *ЖЭТФ*, 44, 763, 1963.