

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА НА РАЗМЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

А. А. Галеев

В квазиклассическом приближении рассматривается высокочастотная часть спектра переходного излучения в случае, когда характерный размер a , на котором существенно меняются диэлектрические свойства среды, значительно больше длины волны $a \gg c/\omega \sqrt{\epsilon}$. Для таких частот излучение оказывается экспоненциально малым, аналогично явлению «надбарьерного» отражения в квантовой механике [5].

1. Введение

Гинзбург и Франк [1] показали, что заряд, движущийся со скоростью, меньшей фазовой скорости, в среде излучает не только тогда, когда его скорость меняется при движении, но и тогда, когда вдоль его пути меняются оптические свойства среды, а следовательно, меняется скорость увлекаемого им электромагнитного поля в среде. Этими авторами, а также в ряде других статей по переходному излучению рассматривался случай сред с резкой границей раздела. Это приближение хорошо описывает излучение с длинами волн λ , значительно большими размера a , на котором существенно меняются диэлектрические свойства среды. Но для коротковолновой части спектра переходного излучения очень важен учет размытости границы.

Естественно, что рассмотрение задачи в общем случае произвольных длин волн сложно ¹⁾, поэтому мы ограничимся расчетом переходного излучения в пределе длин волн излучения в среде λ значительно меньших размера неоднородности среды a . В этом пределе, служащем естественным дополнением к рассмотрению резких границ раздела, переходное излучение экспоненциально падает с уменьшением длины электромагнитной волны, и задачей является выделение этого экспоненциально малого эффекта аналогично тому, как такие эффекты выделяются в теории надбарьерного отражения в квантовой механике и в задачах о «несохранении» адиабатических инвариантов.

2. Основные уравнения

Рассмотрим среду, диэлектрические свойства которой меняются с координатой z . Для определения поля, создаваемого равномерно движущейся вдоль оси z частицей в неоднородной среде, воспользуемся уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -c^{-1} \partial \mathbf{H} / \partial t, \\ \operatorname{div} \hat{\epsilon} \mathbf{E} &= 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\epsilon} \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей; e — за-

¹⁾ Такое исследование было проведено Амануни и Корхмазяном [2] для одного частного вида зависимости электрической проницаемости от координат, допускающей точное решение.

ряд частицы; v — скорость частицы; c — скорость света в вакууме; $\hat{\epsilon}$ — «диэлектрическая постоянная», понимаемая в операторном смысле [3].

Введем векторный и скалярный потенциалы

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -c^{-1} \partial \mathbf{A} / \partial t - \text{grad } \varphi \quad (2)$$

и подчиним их дополнительному условию Лоренца в среде:

$$\text{div } \mathbf{A} + c^{-1} \partial \hat{\epsilon} \varphi / \partial t = 0. \quad (3)$$

Тогда первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. Далее полезно разложить потенциалы в интеграл Фурье по времени t и координатам x, y :

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \int \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}, z) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}r} d\mathbf{k} d\omega. \quad (4)$$

В результате из (1), используя (2) и (3), получаем уравнение для фурье-образа векторного потенциала \mathbf{A} :

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{dz^2} - \frac{\nabla \hat{\epsilon}}{\hat{\epsilon}} \text{div } \mathbf{A} + \left[\hat{\epsilon}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 \right] \mathbf{A} = -\frac{4\pi e}{c} \frac{\mathbf{v}}{v} e^{i\omega z/v}. \quad (5)$$

Векторный потенциал имеет лишь одну составляющую — в направлении движения частицы A_z , которая после замены

$$A = \tilde{A} \hat{\epsilon}^{1/2} \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dz^2} + \left[\hat{\epsilon}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \sqrt{\hat{\epsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\epsilon}}} \right)'' \right] \tilde{A} = -\frac{4\pi e}{c \sqrt{\hat{\epsilon}}} e^{i\omega z/v}. \quad (7)$$

Найдя фурье-образ векторного потенциала $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}, z)$, легко найдем из (3) скалярный потенциал $\varphi(\omega, \mathbf{k}, z)$, а из (2) — электрическое и магнитное поля излучения.

3. Решение уравнений

Наличие малого параметра $c\hat{\epsilon}'/\omega\hat{\epsilon}^{3/2} < 1$ позволяет решить уравнение (7) в «квазиклассическом приближении» (см., например, [4]). Функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 G(z, \xi)}{dz^2} + \left[\hat{\epsilon}(z, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \sqrt{\hat{\epsilon}} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{\epsilon}}} \right)'' \right] G(z, \xi) = -\delta(z - \xi), \quad (8)$$

очевидно имеет вид

$$G(z, \xi) = \begin{cases} \psi^-(\xi) \psi^+(z)/w(\xi), & z > \xi \\ \psi^-(z) \psi^+(\xi)/w(z), & z < \xi \end{cases}, \quad (9)$$

где $\psi^+(z)$ — решение однородного уравнения (8), имеющее при $z \rightarrow +\infty$ вид плоской волны, бегущей в положительном направлении оси z , а $\psi^-(z)$ соответственно при $z \rightarrow -\infty$ имеет вид волны, бегущей в отрицательном направлении оси z ; $w(z)$ — постоянный в нашем случае определитель Вронского.

Следует заметить, что решения ψ^+ и ψ^- нельзя определить просто как квазиклассические решения с соответствующей экспонентой [4]

$$\psi^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp \left\{ \pm i \int_z^z p dz \right\}, \quad (10)$$

где $p^2 = \varepsilon(z, \omega) \omega^2/c^2 - k^2 - \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon^{-1/2})''$,

так как в (10) не учитываются «надбарьерные» эффекты, определяющие в нашем случае переходное излучение. Надбарьерные эффекты можно учесть, пользуясь методом, развитым в работе Покровского и Халатникова [5], так как наше однородное уравнение (8) совпадает по форме с рассматриваемым там уравнением Шредингера. Для этого следует продолжить решение $\psi^+(z)$, имеющее при $z \rightarrow +\infty$ вид (10), в область $z \rightarrow -\infty$ не по действительной оси, а по так называемым линиям уровня, на кото-

рых фаза $\int_z^z p dz$ квазиклассической волновой функции действительна и оба

решения (10) имеют одинаковый порядок величины. Решения (10) несправедливы вблизи комплексных точек поворота $\zeta_1 = z_1 + i\eta_1$, где $p(\zeta_1) = 0$, а также вблизи полюсов $p(z)$. В этих точках асимптотические выражения (10) следует сшивать с точными решениями.

Правила обхода таких точек для типичных случаев сформулированы ранее [5]. В результате на ближайшей к действительной оси линии уровня, соединяющей $z \rightarrow -\infty$ и $z \rightarrow +\infty$ (например, на рис. 1 линия $L_1 + L_2$, проходящая через точку поворота ζ_1), мы получаем правильное решение однородного уравнения (8). Затем следует продолжить последнее с линии уровня на ось z . Тогда фурье-образ \tilde{A} можно записать в виде

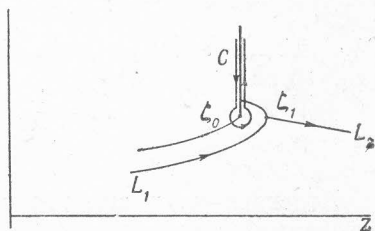


Рис. 1

$$\tilde{A}(\omega, k, z) = \frac{-4\pi e}{c} \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{\psi^-(\xi) \psi^+(z)}{w(\xi) \sqrt{\varepsilon}} e^{i\omega\xi/v} d\xi - \int_{\infty}^z \frac{\psi^-(z) \psi^+(\xi)}{w(\xi) \sqrt{\varepsilon}} e^{i\omega\xi/v} d\xi \right\}. \quad (11)$$

Эта формула малоприспособна для вычисления поля вблизи размытой границы, так как в этой области решения ψ^+ и ψ^- существенно отличаются от квазиклассических (10), и для того, чтобы учесть экспоненциально малый эффект переходного излучения, требуется очень аккуратное продолжение $\psi^+(\xi)$, $\psi^-(\xi)$ с линий уровня на ось z и вычисление интеграла от быстроосциллирующей функции. Поэтому мы рассмотрим поле $A(z)$ в зоне излучения, где среду можно считать уже полностью однородной, а диэлектрическую постоянную $\varepsilon(z, \omega)$ равной постоянным значениям, $\varepsilon^\pm(\omega)$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Тогда при $z \rightarrow +\infty$ получим

$$\begin{aligned} \tilde{A} = & \frac{2\pi e}{ic} \left\{ \psi^+(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi^-(\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i\omega\xi/v} d\xi - \right. \\ & \left. - \psi^+(z) \int_z^{\infty} \frac{\psi^-(\xi)}{\sqrt{\varepsilon^+}} e^{i\omega\xi/v} d\xi + \psi^-(z) \int_z^{\infty} \frac{\psi^+(\xi)}{\sqrt{\varepsilon^+}} e^{i\omega\xi/v} d\xi \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

где мы положили, согласно (10), $w = -2i$.

Поскольку в области интегрирования в двух последних интегралах можно считать, что $\varepsilon = \varepsilon^+ = \text{const}$, $p = p^+ = \text{const}$, то это выражение можно переписать в виде ²⁾:

$$\tilde{A} = \frac{2\pi e}{ic} \psi^+(z) \int_{L_1+L_2} \frac{\psi^-(\xi)}{\sqrt{\varepsilon(\xi)}} e^{i\omega\xi/v} d\xi - \frac{4\pi e}{c} \frac{e^{i\omega z/v}}{\sqrt{\varepsilon^+} (\omega/v)^2 - p_+^2}.$$

Здесь мы сместили линию интегрирования в первом интеграле с действительной оси на ближайшую линию уровня $L_1 + L_2$ (см. рис. 1). Отметим, что в двух последних интегралах в (12) надбарьерные эффекты взаимно компенсируются и остаток описывает излучение равномерно движущегося заряда в однородной среде [3]. В дальнейшем эту часть излучения мы будем опускать.

Итак, все переходное излучение описывается интегралом

$$\tilde{A} = \frac{2\pi e}{ic} \psi^+(z) \int_{L_1+L_2} \frac{\psi^-(\xi)}{\sqrt{\varepsilon(\xi)}} e^{i\omega\xi/v} d\xi, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Совершенно аналогично в области $z \rightarrow -\infty$ имеем

$$\tilde{A} = \frac{2\pi e}{ic} \psi^-(z) \int_{L_1+L_2} \frac{\psi^+(\xi)}{\sqrt{\varepsilon(\xi)}} e^{i\omega\xi/v} d\xi. \quad (13a)$$

Подстановка в эти интегралы квазиклассических решений дала бы неправильный результат. Это следует из того, что сам интеграл экспоненциально мал, в то время как подынтегральное выражение на линиях уровня отнюдь не мало и быстро осциллирует, так что малая ошибка в асимптотических решениях меняет порядок интеграла. Мы обойдем эту трудность, если сместим путь интегрирования таким образом, чтобы по возможности уменьшить экспоненциальный множитель. При смещении контура в верхнюю полуплоскость ξ подынтегральное выражение всюду экспоненциально падает из-за обрезающего множителя $\exp(-\omega v^{-1} \text{Im} \xi)$. Однако возможность такого смещения ограничена необходимостью обходить особые точки подынтегрального выражения, т. е. решений $\psi^+(\xi)$ и $\psi^-(\xi)$. Поскольку от вида и взаимного расположения особых точек зависит оценка интегралов (13), то рассмотрение задачи разумно разбить на вычисление интегралов (13) в нескольких типичных случаях.

а) Пусть диэлектрическая постоянная очень мало меняется по величине, т. е.

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\max \varepsilon(z, \omega) - \min \varepsilon(z, \omega)}{\min \varepsilon(z, \omega)} < 1; \quad (14)$$

тогда, очевидно, вся область резкого изменения функции $p^2(\xi)$ сосредоточена вблизи особенностей $\varepsilon(\xi, \omega)$. Пусть такой особенностью является простой полюс $\varepsilon(\xi)$ в точке ξ_0 с вычетом ε_r . Точка ξ_0 является особой точкой уравнения (8) и, следовательно, точкой ветвления решений $\psi^\pm(\xi)$. Поэтому из ξ_0 следует провести разрез. Далее деформируем линию интегрирования $L_1 + L_2$ в выражении (13) в контур C , обходящий разрез от точки $\xi = \xi_0$ (рис. 1). Для нерелятивистских скоростей $v < c/\sqrt{\varepsilon}$ подынтегральное выражение на контуре C быстро падает при удалении от полюса ξ_0 , так что существенна лишь область интегрирования $\xi \sim v/\omega$.

²⁾ Везде далее мы будем считать $\omega > 0$, так что применима лемма Гордана. Для отрицательной частоты $\omega < 0$ в силу действительности $A(\mathbf{r}, t)$ имеем $A(-\omega) = A^*(\omega)$.

В этой работе мы ограничимся случаем, когда вычет в полюсе не очень мал, так что в большей части области интегрирования применимо квазиклассическое приближение для «поля» $\sim \omega^2 \varepsilon_r / c^2 \zeta$:

$$\omega^2 \varepsilon_r / c^2 \gg \omega / v. \tag{15}$$

Оценивая по порядку величины $\varepsilon_r \sim a \Delta \varepsilon$ (a — характерный размер, на расстоянии которого существенно меняется $\varepsilon(z)$), переписываем неравенство (15) в виде

$$\omega a \Delta \varepsilon / c \gg c / v.$$

При этом условии можно пренебречь членом $\sqrt{\varepsilon} (\varepsilon^{-1/2})''$ в однородном уравнении (8) и переписать его приближенно в виде

$$A'' + k_0^2 \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_0} A = 0; \tag{16}$$

$$k_0^2 = c^{-2} \omega^2 \varepsilon(\zeta_0) - k^2, \quad \zeta_0 - \zeta_1 = \omega^2 \varepsilon_r / k_0^2 c^2.$$

Заменой переменных

$$\xi = -2ik_0 (\zeta - \zeta_0), \quad \lambda = \frac{1}{2} ik_0 (\zeta_0 - \zeta_1) \tag{17}$$

уравнение (16) сводится к уравнению Уиттекера

$$W'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\xi} + \frac{1/4 - \mu^2}{\xi^2} \right) W = 0.$$

В работе Покровского и Халатникова [5] показано, что в качестве нужных нам решений мы можем выбрать функции Уиттекера [6]:

$$\psi^\pm(\xi) = k_0^{-1/2} \exp\left\{\mp \lambda \ln \frac{\pm \lambda}{e}\right\} W_{\pm\lambda, 1/2}(\pm \xi). \tag{18}$$

На обоих берегах разреза на контуре C функции $W_{\pm\lambda, 1/2}(\pm \xi)$ связаны формулой [8]

$$W_{\lambda, \mu}(e^{-2\pi i} \xi) = e^{-2\pi i \lambda} W_{\lambda, \mu}(\xi) - \frac{2\pi i e^{-i\pi \lambda}}{\Gamma(1/2 + \mu - \lambda) \Gamma(1/2 - \mu - \lambda)} W_{-\lambda, \mu}(-\xi), \tag{19}$$

так что интеграл по контуру C сводится к интегралу по ξ от 0 до ∞ от функции Уиттекера, степенной функции и экспоненты. В результате получаем

$$I^\pm \equiv \int_C \frac{\psi^\pm(\xi)}{\sqrt{\varepsilon}} e^{i\omega \zeta / v} d\xi = \frac{\exp(i\omega \zeta_0 / v + 3\pi i / 4 \mp \lambda \ln \pm \lambda / e)}{2^{3/2} k_0^2 \varepsilon_r^{1/2}} \times \\ \times \left\{ (1 - e^{\mp 2\pi i \lambda}) \frac{4\Gamma(5/2) \Gamma(3/2)}{(\omega/k_0 v \pm 1)^{5/2} \Gamma(5/2 \mp \lambda)} F\left(\frac{5}{2}, 1 \mp \lambda, \frac{5}{2} \mp \lambda; \frac{2\omega \mp k_0 v}{2\omega \pm k_0 v}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2\pi i e^{\mp i\pi \lambda}}{\Gamma(1 \mp \lambda) \Gamma(\mp \lambda)} \frac{4\Gamma(5/2) \Gamma(3/2)}{(\omega/k_0 v \mp 1)^{5/2} \Gamma(5/2 \pm \lambda)} F\left(\frac{5}{2}, 1 \pm \lambda, \frac{5}{2} \pm \lambda; \frac{2\omega \pm k_0 v}{2\omega \mp k_0 v}\right) \right\}, \tag{20}$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Более простые выражения для I^\pm мы можем получить, если частица нерелятивистская: $v \ll c/\sqrt{\varepsilon}$. Действительно, тогда основной вклад в интеграл дает область $\xi \sim \lambda (v \sqrt{\varepsilon}/c)^2 \ll \lambda$. Кроме того, согласно (15),

$\lambda \gg 1$, и в этой области изменения λ , ξ мы воспользуемся асимптотическими выражениями $W_{\lambda, \mu}(\xi)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ [6]. Для ситуации, изображенной на рис. 1, когда $\arg \lambda < \pi/2$ имеем

$$I^+ = I_0 \{ [D_{-7/2}(-iv) + iD_{-7/2}(iv)] e^{-i\pi\lambda} - iD_{-7/2}(iv) e^{i\pi\lambda} \},$$

$$I^- = I_0 \{ D_{-7/2}(iv) + iD_{-7/2}(-iv) \} e^{i\pi\lambda},$$
(21)

где

$$v^2 = \frac{2i\omega v \varepsilon_r}{c^2}, \quad I_0 = \frac{e^{i\omega \xi_0/v}}{2\sqrt{-2iv\varepsilon_r}} \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) e^{v^2/4},$$

а $D_p(v)$ — функция параболического цилиндра.

Первые два члена в выражении для I^+ (21) соответствуют квазиклассическому решению $p^{-1/2} \exp(i \int pd\xi)$ на обоих берегах разреза, а третий возникает из-за наличия на левой стороне разреза примеси экспоненты $p^{-1/2} \exp(-i \int pd\xi)$, появляющейся при пересечении линии Стокса. Для I^- примеси «посторонней» экспоненты $\exp(i \int pd\xi)$ не появляется, так как мы нигде не пересекаем линий Стокса для решения $\psi^-(\xi)$.

Если расстояние между точкой поворота ξ_1 и полюсом ξ_0 настолько велико, что приближенное уравнение (16) несправедливо, то для релятивистских скоростей $v < c/\sqrt{\varepsilon}$ вычисление интегралов I^\pm требует знания не только полюсной части, но и всего поведения диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ вблизи полюса. В нерелятивистском же пределе достаточно знание вычета в полюсе ε_r . При этом в формулах (21) следует заменить выражение интеграла

$$\int_{\xi_1}^{\xi_0} pd\xi = -\pi\lambda,$$

верное только для уравнения (16), на общее выражение

$$\int_{\xi_1}^{\xi_0} \sqrt{\varepsilon(\xi) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2} d\xi.$$

Кроме того, при $\text{Im } \lambda \gg 1$ всегда можно пренебречь в I^+ (21) последним членом, возникающим из-за явления Стокса.

б) В качестве второго примера рассмотрим случай, когда ближайшей к действительной оси особенностью является точка ветвления функции $\varepsilon(z, \omega)$. Причем $\varepsilon(z, \omega)$ при этом обращается в нуль согласно закону:

$$\varepsilon(z, \omega) = \left[\frac{\xi - \xi_0}{a(\omega)} \right]^\alpha. \quad (22)$$

Вблизи этой точки ($|\xi - \xi_0| \ll a$) основной вклад дает слагаемое $\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon^{-1/2})^\alpha$ и волновое уравнение (8) принимает вид

$$A'' + \left[\left(\frac{\xi - \xi_0}{a} \right)^\alpha \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \frac{1 - (1 + \alpha)^2}{4(\xi - \xi_0)^2} \right] A = 0.$$

Пренебрегая в окрестности ξ_0 первым членом в квадратной скобке, заменой переменных

$$\xi = 2k(\xi - \xi_0), \quad (1 + \alpha)/2 = \mu \quad (23)$$

сводим это уравнение к уравнению (17). Так что нужные нам решения, переходящие в решения (10) с нижним пределом интегрирования $\zeta_1 = \zeta_0 - 1/2 i \sqrt{[(1 + \alpha)^2 - 1] k^{-2}}$ (расположение линий уровня дано на рис. 2), выражаются через цилиндрические функции $K_\mu(\xi/2)$ мнимого аргумента [6]:

$$\begin{aligned} \psi^\pm(\zeta) &= K^{-1/2} \exp\left(i \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu^2 - 1/4}\right) W_{0, \mu}(\pm \xi) = \\ &= K^{-1/2} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu^2 - 1/4}\right) (\pm \xi/\pi)^{1/2} K_\mu(\pm \xi/2). \end{aligned} \quad (24)$$

Вычисление интегралов I^\pm по контуру C легко произвести, используя связь цилиндрических функций на обоих берегах разреза, выходящего из точки ζ_0 [6]:

$$K_\mu(e^{m\pi i} z) = e^{-m\pi i} K_\mu(z) - i\pi \frac{\sin m\mu\pi}{\sin \mu\pi} I_\mu(z).$$

Мы приведем результат лишь для наиболее интересного случая нерелятивистских скоростей и простого нуля $\varepsilon(z)$ ($\alpha = 1$):

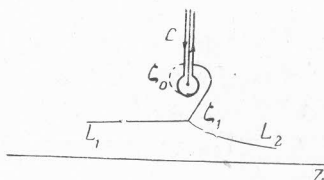


Рис. 2

$$I^\pm = \frac{\sqrt{8\pi a}}{k} \exp\left[i \frac{\omega}{v} \zeta_0 \pm i \frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{4} - i \frac{\pi}{4}\right]. \quad (25)$$

Для произвольных v и α результат выражается через гипергеометрические функции (см. (20)).

в) Если же ближайшей к действительной оси особенностью является точка ветвления ζ_0 функции $\varepsilon(\zeta)$, причём

$$\varepsilon(\zeta) \approx \varepsilon_0 + \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{a(\omega)}\right)^\alpha,$$

то провести вычисления I^\pm в общем виде указанным выше способом не удастся, так как вблизи ζ_0 наличие слагаемого $\sqrt{\varepsilon}(\varepsilon^{-1/2})'$ в «потенциале» приводит к особенности типа

$$\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{a}\right)^\alpha \frac{1}{(\zeta - \zeta_0)^2},$$

и решить волновое уравнение становится затруднительно.

Однако если почти во всей области интегрирования $\Delta\zeta \sim v/\omega$ применимо квазиклассическое приближение, что справедливо при

$$\left|\varepsilon_0 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right| \gg \left(\frac{c}{v}\right)^2 \left(\frac{v}{\omega a}\right)^\alpha, \quad (26)$$

то интеграл по контуру C , охватывающему разрез из точки ζ_0 , можно легко оценить для нерелятивистских скоростей по методу Лапласа [7]:

$$\begin{aligned} I^\pm &= \left(\frac{v}{\omega}\right)^{1+\alpha} a^{-\alpha} \frac{\Gamma(1 + \alpha) (2\varepsilon_0 - k^2 c^2/\omega^2)}{\sqrt{\omega \varepsilon_0^3/c \cdot (\varepsilon_0 - k^2 c^2/\omega^2)^{3/4}}} e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \times \\ &\times \exp\left(i \frac{\omega \zeta_0}{v} \pm i \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} p d\zeta\right). \end{aligned} \quad (27)$$

Итак, три рассмотренных нами случая отличаются предэкспоненциальными множителями в выражениях для векторного потенциала

(см. (23), (25), (27)):

$$A = A(\omega, k) \frac{e^{i\omega\zeta_0/v}}{\sqrt{\varepsilon(\zeta, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}} \times \\ \times \exp \left\{ \pm i \int_{\bar{\zeta}}^{\zeta} \sqrt{\varepsilon(\zeta, \omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \sqrt{\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)''}} d\zeta \right\} \sqrt{\varepsilon}, \quad z \rightarrow \pm \infty, \quad (28)$$

где

$$A(\omega, k) = \frac{\pi e}{c} \left(\frac{v}{\omega} \right)^2 \frac{\Gamma(7/2)}{\sqrt{-2iv\varepsilon_r}} e^{v^2/4} [D_{-7/2}(\mp iv) + iD_{-7/2}(\pm iv)], \quad \bar{\zeta} = \zeta_0,$$

если ζ_0 — полюс $\varepsilon(\zeta)$ (см. (24));

$$A(\omega, k) = \frac{e}{c} \frac{\sqrt{32\pi^3 a}}{k} \exp \left[i \frac{\omega}{v} \zeta_0 \pm \frac{i\pi(\sqrt{3}-1)}{4} - i \frac{\pi}{4} \right], \quad \bar{\zeta} = \zeta_1,$$

если ζ_0 — простой нуль $\varepsilon(\zeta)$ (см. (25));

$$A(\omega, k) = \frac{2\pi e}{c} \left(\frac{v}{\omega} \right)^{1+\alpha} \alpha^{-\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha) (2\varepsilon_0 - k^2 c^2 / \omega^2) e^{i\pi\alpha/2}}{\sqrt{\omega\varepsilon_0^3/c} (\varepsilon_0 - k^2 c^2 / \omega^2)^{3/4}} (1 - e^{-2\pi i\alpha}), \quad \bar{\zeta} = \zeta_0,$$

если ζ_0 — точка ветвления $\varepsilon(\zeta)$ (см. (27))³⁾.

В тех случаях, когда $\varepsilon(\zeta)$ имеет несколько особенностей указанного вида, дающих одинаковый вклад и находящихся на расстоянии значительно большем длины волны, в выражении (28) нужно просуммировать все вклады. Зависимость эффекта от удаления ближайшей особенности $\varepsilon(z)$ от действительной оси одинакова и носит экспоненциальный характер. Оценивая это расстояние как $\sim a$, получаем, что весь эффект порядка $e^{-\omega a/v}$.

Из (28) мы легко можем получить выражения для фурье-образа электрического и магнитного полей. Однако полная пространственная, зависимость полей и угловое распределение излучения задаются в виде интегралов от фурье-образа $A(\omega, \mathbf{k}, z)$ и их явное вычисление невозможно без явного задания функции $\varepsilon(z, \omega)$.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева, обратившего внимание на рассматриваемый вопрос, В. Л. Покровского и А. М. Фридмана за полезное обсуждение.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 сентября 1963 г.

Литература

- [1] В. Л. Гинзбург, И. М. Франк. ЖЭТФ, 16, 15, 1946.
- [2] А. Ц. Амагуни, Н. А. Корхмазян. ЖЭТФ, 39, 1011, 1960.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.

³⁾ Все эти выражения являются первыми членами асимптотического разложения по степеням v/c .

- [5] В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 40, 1713, 1961.
- [6] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
- [7] М. А. Еврафов. Асимптотические оценки и целые функции, Физматгиз, 1962.
- [8] Higher Transcendental Functions, Mc. Graw-Hill, Toronto, 1953, H. В u c h-
h o l z. Die Confluente hypergeometrische Functions, Springer-Verlag, 1953.

**TRANSITION RADIATION FROM A UNIFORMLY MOVING
CHARGE PASSING THROUGH A DIFFUSE INTERFACE
BETWEEN TWO MEDIA**

A. A. Galyev

The high frequency part of the spectrum of transition radiation is investigated in the quasiclassical approximation in the case when the characteristic dimension a , over which the dielectric properties of the medium significantly change is much greater than the wave length, $a \gg c/\omega\sqrt{\epsilon}$. For such frequencies the radiation is exponentially small as in the «super-barrier» reflection effect in quantum mechanics [5].
