Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 46 *1964* *Вып. 5*

О СТРУКТУРЕ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

В. Г. Зелевинский

Показано, что для осциллятора с ангармоничностью типа x^{2n} (произвольной силы) существует простое преобразование, в результате которого сходимость ряда теории возмущений значительно улучшается, причем низшие возбужденные состояния мало отличаются от состояний эффективного гармонического осциллятора. Это объясняет, в частности, экспериментально наблюдаемую слабую ангармоничность спектра квадрупольных колебаний сферических четно-четных ядер, хотя взаимодействие между собой квадрупольных фононов является достаточно сильным.

Существует широкий класс квантовомеханических систем, которые в некотором приближении можно представить как совокупность осцилляторов с сильной ангармоничностью. В частности, задача рассмотрения таких систем нередко возникает при исследовании квантованных бозевских полей (фононы и спиновые волны в твердом теле, мезонное поле в задаче со статическим нуклоном и т. д.). Нас специально будут интересовать квадрупольные колебания сферических ядер. Как известно [1], при рассмотрении низших возбужденных состояний сферического ядра ангармоничность элементарных возбуждений (квадрупольных «фононов») весьма существенна.

Как правило, в системах подобного рода разумным оказывается следующий подход. Вследствие сильной нелинейности структура как основного, так и возбужденных состояний системы оказывается сложной и существенно отличной от структуры состояний гармонического осциллятора. Флуктуации числа квантов весьма велики, что не позволяет пользоваться обычной формой теории возмущений. Однако важно то обстоятельство, что по своей структуре низшие возбужденные состояния мало отличаются от основного (поэтому, например, во многих сферических четно-четных ядрах результативно наблюдаемая ангармоничность оказывается слабой). Таким образом, естественной является попытка переопределить основное состояние системы и возбуждения так, чтобы учесть основной эффект нелинейности — большие флуктуации. При этом можно надеяться, что взаимодействие между собой правильно выбранных возбуждений окажется малым, т. е. сходимость перенормированного ряда теории возмущений значительно улучшится.

Проиллюстрируем сказанное выше на простейшем схематическом примере одномерного ангармонического осциллятора, описываемого гамильтонианом

$$H_n = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 x^2) + \gamma x^{2n} \qquad (1)$$

($n \geqslant 2$ — целое; принято $\hbar = m = 1$). «Степень» ангармоничности характеризуется безразмерным параметром $\lambda = \gamma/\omega_0^{n+1}$, который не предполагается малым. При больших λ большими оказываются и поправки к среднему значению $\overline{x^2}$, вычисленному по волновым функциям гармонического осциллятора с частотой ω_0, т. е. велика амплитуда колебаний.

Поэтому по аналогии с классической задачей о нелинейных колебаниях [2] можно попытаться аппроксимировать истинный потенциал некоторой эффективной параболой (в принципе, различной для различных состояний), которую следует подобрать из вариационного принципа (например, минимизируя значения энергий уровней).

С другой стороны, в представлении вторичного квантования большая величина $\overline{x^2}$ означает большие флуктуации числа «старых» квантов в основном состоянии. В связи с этим необходимо переопределить вакуум и ввести новые, «истинные» квазичастицы. Это легко сделать с помощью боголюбовского канонического преобразования.

Стандартным образом перейдем от операторов координаты x и импульса p к операторам рождения и уничтожения a^+ и a, удовлетворяющим обычным бозевским соотношениям коммутации:

$$a = (2\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 x + ip), \qquad a^+ = (2\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 x - ip) \tag{2}$$

Тогда гамильтониан примет вид

$$H_n = \frac{1}{2}\omega_0 + \omega_0 a^+ a + 2^{-n}\omega_0\lambda (a + a^+)^{2n}. \tag{3}$$

Теперь совершим каноническое преобразование к новым бозе-амплитудам $(a,\ a^+)\to(b,\ b^+)$:

$$a = ub + vb^+, \qquad a^+ = ub^+ + vb, \qquad u^2 - v^2 = 1 \tag{4}$$

(неизвестные коэффициенты u и v можно считать действительными).

Пользуясь обычными обозначениями, запишем преобразованный гамильтониан в виде

$$H_n = U_n + H_{11} + H_{20} + H_n', \tag{5}$$

где

$$U_n = \frac{1}{2}\omega_0 \left[1 + 2v^2 + (2n-1)!!\, 2^{1-n} (u+v)^{2n} \lambda\right] \tag{6}$$

— часть, не содержащая операторов,

$$\begin{gathered} H_{11} = \omega_0 \left[u^2 + v^2 + 2^{1-n} n (2n-1)!! (u+v)^{2n}\lambda\right] b^+ b, \\ H_{20} = \frac{\omega_0}{2}\left[2uv + 2^{1-n} n (2n-1)!! (u+v)^{2n}\lambda\right](bb + b^+b^+), \\ H_n' = 2^{-n}\omega_0 (u+v)^{2n}\lambda N\left\{\sum_{m=2}^{n} c_m (b + b^+)^{2m}\right\}, \end{gathered} \tag{7}$$

N — символ нормального произведения операторов, c_m — целочисленные множители, зависящие от n; $c_n = 1$.

Выберем коэффициенты преобразования (4) из условия диагонализации квадратичной по операторам b, b^+ части гамильтониана (5), т. е. положим $H_{20} = 0$. Тогда коэффициент в H_{11} при b^+b даст энергию квазичастиц, т. е. новую частоту ω эффективного осциллятора. Вводя неизвестную величину $y = (u+v)^2$, получим уравнения для y и ω:

$$y^{-n-1}(1 - y^2) = 2^{2-n} n (2n-1)!!\,\lambda, \tag{8}$$

$$\omega = \omega_0 / y, \tag{9}$$

т. е. y непосредственно дает перенормировку частоты.

К уравнениям (8), (9) можно было прийти и используя прямой вариационный метод: если в (2) заменить ω_0 на неизвестную частоту ω, вычислить энергию основного состояния $U_n = U_n(\omega)$ с помощью гамильтониана (1) и волновых функций гармонического осциллятора частоты ω, а затем найти минимум $U_n(\omega)$, то получатся в точности те же уравнения, что и следовало ожидать.

Поскольку основное состояние бозе-системы с притяжением неустойчиво, рассмотрим уравнение (8) для случая отталкивания ($\lambda > 0$). Тогда справедливо неравенство $0 \leqslant y \leqslant 1$, т. е. $\omega > \omega_0$ — возбуждения становятся более стабильными. Уравнение (8) имеет единственное решение, причем с ростом λ значение y уменьшается $\sim \lambda^{-1/(n+1)}$, так что если уменьшать ω_0, оставляя неизменным γ, то перенормированная частота будет стремиться к постоянной величине:

$$\omega \to \left[\frac{n\,(2n-1)!!}{2^{n-2}}\,\gamma\right]^{1/(n+1)}.$$

Введя вместо λ перенормированный параметр взаимодействия $\tilde{\lambda} = \gamma/\omega^{n+1}$, запишем окончательный вид гамильтониана:

$$H_n = U_n + \omega b^+ b + \frac{\omega}{2^n}\tilde{\lambda} N \left\{\sum_{m=2}^{n} c_m\,(b+b^+)^{2m}\right\}, \tag{10}$$

$$U_n = \tfrac{1}{4}\omega\,[1 + y^2 + 2^{2-n}\,(2n-1)!!\,\tilde{\lambda}]. \tag{6'}$$

Весь смысл сделанной замены переменных заключается в том, что, согласно (8) и (9), независимо от величины «затравочного» взаимодействия λ, перенормированное взаимодействие $\tilde{\lambda}$ ограничено по величине сверху:

$$\tilde{\lambda} = \lambda y^{n+1} = (1-y^2)\,\frac{2^{n-2}}{n\,(2n-1)!!} \leqslant \frac{2^{n-2}}{n\,(2n-1)!!} \leqslant \frac{1}{6}.$$

Таким образом, гамильтониан (10) можно уже рассматривать по теории возмущений, отправляясь, как от исходных, от состояний гармонического осциллятора с частотой ω, причем поправки к энергиям основного и первого возбужденного (одноквантового) состояний будут лишь второго порядка по $\tilde{\lambda}$. Например, точный численный расчет [3] для потенциала γx^4 дает отношение энергии первого уровня к энергии основного состояния, равное 3,58. У нас эта величина (в соответствующем предельном случае $\lambda = \gamma/\omega_0^3 \to \infty$, $\tilde{\lambda} \to 1/6$) равна

$$(\omega + U_2)/U_2 = [4 + (2 - 3\tilde{\lambda})]/(2 - 3\tilde{\lambda}) = \tfrac{11}{3},$$

т. е. достаточно близка к истинному значению.

Таким образом, действительно, для гамильтониана типа (1) оказывается возможным, какой бы сильной ни была исходная нелинейность, с достаточно хорошей точностью аппроксимировать низкие возбужденные состояния состояниями эффективного гармонического осциллятора. Для более высоких уровней эффективная парабола окажется уже другой, в полном соответствии с классической нелинейной механикой [2].

Рассмотрим теперь конкретную систему, описываемую гамильтонианом подобного рода, а именно — сферическое четно-четное ядро, низшие возбужденные состояния которого обладают хорошо известными коллективными свойствами. Как было показано ранее [1,4], учет адиабатичности коллективных возбуждений по отношению к одночастичным позволяет отделить переменные, описывающие коллективную ветвь возбуждений, и представить гамильтониан системы в виде

$$H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} = \omega_0 \left(\frac{5}{2} + \sum_M \alpha_M^+ \alpha_M \right) + \\ + \frac{\Gamma^{(3)}}{\omega_0^{3/2}} (\alpha^{(+)3})_{00} + \sum_{L=0,2,4} \frac{\Gamma_L^{(4)}}{\omega_0^2} ((\alpha^{(+)2})_L \, (\alpha^{(+)2})_L)_{00}. \qquad (11)$$

Здесь α_M, α_M^+ — бозе-операторы уничтожения и рождения «фонона» с моментом $J = 2$ и проекцией $J_z = M$,

$$\alpha_M^{(\pm)} = \alpha_M \pm (-1)^M \alpha_{-M}^+,$$

$(\ldots)_{JM}$ — символ векторного сложения, ω_0 — частота квадрупольных колебаний, $\Gamma^{(3)}$ и $\Gamma_L^{(4)}$ $(L = 0, 2, 4)$ — некоторые константы. Их конкретная связь с энергиями и числами заполнения однонуклонных уровней может быть найдена из микроскопической теории, которая, в частности, показывает [1], что коэффициент $\Gamma^{(3)}$ мал, так как определяется суммами по большому числу уровней от величин, нечетных относительно границы Ферми. Можно также показать, что малыми оказываются и поправки от высших ангармонических членов $\Gamma^{(n)}$, $n \geqslant 5$, а также (при достаточно хорошей адиабатичности) члены, включающие операторы $\alpha^{(-)}$.

Поскольку у четырех квадрупольных фононов есть лишь одно состояние с полным моментом $J = 0$, то член $H^{(4)}$ в гамильтониане фактически должен содержать лишь одну независимую константу. Поэтому удобно несколько преобразовать $H^{(4)}$. Воспользовавшись известными свойствами коэффициентов Рака, легко получить, что

$$H^{(4)} = \frac{\omega_0}{3} \sum_{L=0,\,2,\,4} \sqrt{2L+1}\, \Lambda_L \, ((\alpha^{(+)2})_L \, (\alpha^{(+)2})_L)_{00}, \qquad (12)$$

$$\Lambda_L = \sum_{L'=0,2,4} \frac{\Gamma_{L'}^{(4)}}{\omega_0^3} \frac{1}{\sqrt{2L'+1}} [\delta_{LL'} + 2\,(2L'+1)\, W\,(2222; LL')]. \qquad (13)$$

Как нетрудно проверить, независимо от величины первоначальных констант $\Gamma_L^{(4)}$,

$$\Lambda_2 = \Lambda_4 = \tfrac{2}{7} \Lambda_0, \qquad (14)$$

и справедливо полезное тождество

$$\Lambda_L = \sum_{L'=0,\,2,4} (2L'+1)\, W\,(2222; LL')\, \Lambda_{L'}, \qquad L = 0,\, 2,\, 4. \qquad (15)$$

В силу свойства (15) все операторы $\alpha^{(+)}$ входят в (12) симметрично, что заметно упрощает выкладки.

Совершая обычным образом каноническое преобразование над гамильтонианом (12), получим, аналогично (8), (9),

$$(1 - y^2)/y^3 = 8\Lambda_0; \qquad \omega = \omega_0/y. \qquad (16)$$

Преобразованный гамильтониан примет вид

$$H = U + \omega \sum_M \beta_M^+ \beta_M + \omega \widetilde{\Lambda}^{(3)} \, (\beta^{(+)3})_{00} + \\ + \frac{\omega}{3} \sum_{L=0,2,4} \widetilde{\Lambda}_L \sqrt{2L+1}\, N \{((\beta^{(+)2})_L \, (\beta^{(+)2})_L)_{00}\}, \qquad (17)$$

$$\widetilde{\Lambda}_3 = \Gamma^{(3)}/\omega^{5/2} \leqslant \Gamma^{(3)}/\omega_0^{5/2}, \quad \widetilde{\Lambda}_L = \Lambda_L y^3 \leqslant \Lambda_L/8\Lambda_0, \qquad L = 0,\ 2,\ 4. \quad (18)$$

Вычисление энергий уровней двухфононного триплета удобно провести, используя уравнения движения для операторов в гейзенберговском представлении. При этом возникающие средние от произведения нескольких операторов выражаются, как в методе Хартри — Фока, через парные средние

$$\rho_{MM'} = \langle \overset{+}{\alpha}_M \alpha_{M'} \rangle, \qquad \tau_{MM'} = \langle \alpha_M \alpha_{M'} \rangle. \quad (19)$$

Можно установить связь между этими матрицами

$$\tau^+\tau - \rho^2 = \rho, \quad (20)$$

аналогичную условию Боголюбова [5] для ферми-систем. В сферическом четно-четном ядре можно положить

$$\rho_{MM'} = \delta_{MM'}\rho, \qquad \tau_{MM'} = (-1)^M \delta_{M,-M'}\tau, \quad (21)$$

где ρ, τ — действительные числа. Пользуясь (20) и коммутационными соотношениями, легко выразить все встречающиеся средние через перенормировочный множитель y:

$$\langle \alpha_M^{(+)} \alpha_{M'}^{(+)} \rangle = (-1)^M \delta_{M,-M'} y, \qquad \langle \alpha_M^{(-)} \alpha_{M'}^{(-)} \rangle = (-1)^{M+1} \delta_{M,-M'} y^{-1},$$
$$\langle \alpha_M^{(+)} \alpha_{M'}^{(-)} \rangle = -\langle \alpha_M^{(-)} \alpha_{M'}^{(+)} \rangle = (-1)^M \delta_{M,-M'}, \quad (22)$$
$$\rho = (1-y)^2/4y, \qquad \tau = (y^2-1)/4y.$$

После выделения средних получим линейную однородную систему уравнений для матричных элементов, условие разрешимости которой служит секулярным уравнением для энергий уровней, отсчитанных от энергии основного состояния. Нулевой корень секулярного уравнения отвечает тем парам «старых» фононов с полным моментом $J = 0$, которые уже учтены в основном состоянии. Ненулевые корни дадут энергию первого уровня ω, совпадающую с (16) с точностью до поправок порядка $(\widetilde{\Lambda}^{(3)})^2$, которые заведомо можно учесть по обычной теории возмущений (см. [1,4]), и энергии уровней двухфононного триплета ($J = 0, 2, 4$):

$$\omega^2(J) = 4\omega^2(1 + 4\widetilde{\Lambda}_J) + O[(\widetilde{\Lambda}^{(3)})^2]. \quad (23)$$

Формулы (16) и (23) переходят в ранее полученные [4] в пределе слабого взаимодействия $(\Lambda_0 \ll 1)$.

С помощью (18) и (14) можно оценить верхнюю границу ангармоничности, определяемой четырехфононным взаимодействием: $\lambda_E \equiv \omega(2)/\omega \leqslant 2{,}15$. Поскольку для наиболее типичных ядер рассматриваемого класса экспериментально наблюдается значение $\lambda_E \sim 2{,}2$, то можно сделать вывод, что в этих ядрах значения перенормированных констант $\widetilde{\Lambda}$ близки к предельным, т. е. затравочная ангармоничность Λ и перенормировка частоты y^{-1} велики. Невозмущенная частота ω_0 (энергия первого уровня в гармоническом приближении) обычно определяется [6] из соответствующего секулярного уравнения для связанного состояния двух квазичастиц. В это уравнение входит константа F взаимодействия частица — дырка, которая находится [7] из равенства ω_0 экспериментальной энергии ω первого уровня. Как мы видели, вследствие сильной ангармоничности эти величины могут заметно отличаться между собой. Таким образом, может оказаться необходимым существенное уточнение принятого значения F, что скажется и на вычислении всех наблюдаемых величин.

Ввиду сильного влияния ангармоничности вряд ли целесообразны попытки [7,8], не ограничиваясь качественно правильным описанием, путем тщательного подбора схемы одночастичных уровней добиться уже в гармоническом приближении хорошего количественного согласия со всеми экспериментальными данными по энергиям первого уровня и вероятностям электромагнитных переходов.

Особого анализа требует ситуация в нечетных сферических ядрах, где, кроме ангармоничности, вызванной взаимодействием между фононами, возможна сильная связь фонона с нечетной частицей.

Искренне благодарю С. Т. Беляева за неизменное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Поступила в редакцию
30 ноября 1963 г.

Литература

[1] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЖЭТФ, **42**, 1590, 1962; Nucl. Phys., **39**, 582, 1962.

[2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

[3] R. R. Chasman. J. Math. Phys., **2**, 733, 1961.

[4] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. Изв. АН СССР, серия физ., **28**, 127, 1964..

[5] Н. Н. Боголюбов. ДАН СССР, **119**, 244, 1958; УФН, **67**, 549, 1959.

[6] S. T. Beliaev. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **31**, *11*, 1959.

[7] L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **32**, *9*, 1960. T. Tamura, T. Udagawa. Progr. Theor. Phys., **26**, 947, 1961.

[8] Б. Л. Бирбраир, К. И. Ерохина, И. Х. Лемберг. Изв. АН СССР, серия физ., **27**, *2*, 1963.

ON THE STRUCTURE OF COLLECTIVE EXCITATIONS OF SPHERICAL NUCLEI

V. G. Zelevinsky

It is shown that for an oscillator with anharmonicity of the x^{2n} type (of arbitrary strength) a simple transformation exists which appreciably improves the convergence of the perturbation theory series; the lower excited states in this case only slightly differ from those of an effective harmonic oscillator. This explains, in particular, the weak anharmonicity of the quadrupole oscillation spectrum of spherical even — even nuclei observed experimentally even though the interaction between the quadrupole phonons is sufficiently strong.