Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 47 *1964* *Вып. 4(10)*

КИНЕТИКА ВОЛН В СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман

Получено кинетическое уравнение для волн в слаботурбулентной плазме в форме, из которой следуют простые соотношения симметрии для различных членов этого уравнения. Обсуждаются следствия, вытекающие из этих соотношений. В частности, показано, что в ряде случаев при «нераспадном» взаимодействии «число» волн (квазичастиц) сохраняется. Рассмотрены некоторые примеры.

1. Введение

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных нелинейному взаимодействию волн в плазме. При этом имеются два различных подхода к этому вопросу. Один из них является чисто динамическим, без использования процедуры усреднения на каком-либо этапе (например, [1]). Такой метод удобен при изучении нелинейного взаимодействия конечного числа волн. В слаботурбулентной плазме необходимо перейти от динамического описания к статистическому, т. е. прибегнуть на том или ином этапе к усреднению по некоторому статистическому ансамблю. Основы статистического подхода впервые были использованы в квазилинейной теории волн в плазме [2, 3]. Выводу кинетических уравнений для волн в слаботурбулентной плазме и применению их к различным конкретным случаям посвящен ряд работ [3–14]. Однако из-за громоздкости этих уравнений исследование их для достаточно общих случаев пока не проводилось, а конкретные приложения, как правило, носят характер более или менее грубых оценок.

В настоящей работе кинетическое уравнение для волн получено в такой форме, которая, на наш взгляд, является весьма удобной для общего исследования и конкретных приложений, а отдельные члены в этом уравнении допускают достаточно простую интерпретацию. Вследствие этого оказалось возможным получить ряд соотношений симметрии для ядра кинетического уравнения, из которого вытекают некоторые законы сохранения, весьма облегчающие в ряде случаев исследование кинетики волн в слаботурбулентной плазме. В частности оказывается, что если «распады» волн невозможны (т. е. $\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} \neq \omega_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}$), то при некоторых условиях, которые выполняются в большинстве представляющих интерес случаев, нелинейное взаимодействие не может приводить к изменению полного числа волн.

Для удобства изложения мы сначала подробно рассматриваем вывод кинетического уравнения для волн и соотношений симметрии в случае потенциальных колебаний (разделы 2—3). В разделе 4 рассматриваются законы сохранения, вытекающие из соотношений симметрии. В разделе 5 показано, что все соотношения симметрии и соответствующие законы сохранения, полученные для потенциальных колебаний, справедливы и в общем случае колебаний с произвольной поляризацией. В качестве иллюстрации рассмотрено несколько примеров: законы сохранения при нелинейном взаимодействии потенциальных колебаний в плазме без магнитного поля и в плазме с магнитным полем при наличии продольного тока (раздел 4), а также взаимодействие плазмонов с фотонами в плазме без магнитного поля (раздел 6).

2. Кинетическое уравнение для волн (потенциальные колебания)

Рассмотрим сначала случай потенциальных колебаний в плазме. Основные уравнения для таких колебаний имеют вид

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \partial\mathbf{E}/\partial t = -4\pi\mathbf{J}. \tag{2.1}$$

Вектор плотности тока поляризации **J** с учетом нелинейных по **E** членов может быть представлен в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)}\{\mathbf{E}\} + \mathbf{J}^{(2)}\{\mathbf{E}\} + \mathbf{J}^{(3)}\{\mathbf{E}\} + \ldots, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{J}^{(n)}\{\mathbf{E}\}$ является некоторым функционалом n-го порядка от электрического поля.

Токи $\mathbf{J}^{(n)}\{\mathbf{E}\}$ могут быть выражены через соответствующие добавки к функции распределения частиц плазмы. Для определения этих величин будем исходить из кинетического уравнения для функции распределения частиц, которое нам будет удобно писать в виде

$$\partial f_j/\partial t + [\mathcal{H}_j, f_j] = -[\mathcal{H}_j^{int}, f_j], \tag{2.3}$$

где $\mathcal{H}_j$ — гамильтониан плазмы при отсутствии колебаний; $\mathcal{H}_j^{int}$ — часть гамильтониана, описывающая взаимодействие частиц с полем волн:

$$\mathcal{H}_j = \frac{1}{2m_j}\left(\mathbf{p} - \frac{e_j}{c}\mathbf{A}_0\right)^2, \quad \mathbf{H}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{A}_0, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{H}_j^{int} = \int \rho_j(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}, \quad \rho_j(\mathbf{r}) = e_j\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)), \tag{2.5}$$

где $\mathbf{H}_0$ — напряженность стационарного магнитного поля; $j = e,\ i$ (e — электроны, i — ионы). В дальнейшем, если по j суммирования нет, мы этот индекс опускаем; $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t. Мы пренебрегаем столкновениями между частицами, поэтому в (2.3) опущен интеграл столкновений.

Переходя к лагранжевым переменным $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0$, отвечающим движению частицы во внешнем стационарном магнитном поле, получаем вместо (2.3) $\partial f/\partial t = -[\mathcal{H}^{int}, f]$, откуда для добавки n-го порядка к функции распределения находим

$$f^{(n)}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0; t) = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\,[\mathcal{H}^{int}(t_1)\ldots[\mathcal{H}^{int}(t_n), f^0]\ldots], \tag{2.6}$$

где $f^0 = f^0(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ — невозмущенная функция распределения. С помощью формулы (2.6) можно определить токи поляризации $\mathbf{J}^{(n)}$:

$$\mathbf{J}^{(n)}(r, t) = (-1)^n \sum_j n_j \int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \int\limits_{-\infty}^{t} dt_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \times$$
$$\times \langle[\ldots[\mathbf{v}\rho_j(\mathbf{r}, t), \rho_j(\mathbf{r}_1, t_1)]\ldots\rho_j(\mathbf{r}_n, t_n)]\, f_j^0\rangle, \tag{2.7}$$

где n_j — плотность числа частиц, угловые скобки обозначают интегрирование по лагранжевым переменным частицы $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0$, а квадратные скобки — скобки Пуассона по этим переменным:

$$[F, \Phi] = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_0}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_0} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_0}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{p}_0}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) следует, что связь между фурье-компонентами токов n-го порядка и фурье-компонентами потенциала может быть представлена

$$4\pi \mathbf{J}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega k}{(2\pi)^{n-1}k^2} \sum_{\mathbf{k}_1+\ldots+\mathbf{k}_n=\mathbf{k}} \int d\omega_1 \ldots d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \ldots - \omega_n) \times$$

$$\times \mu^{(n)}(\mathbf{k}, \omega;\ \mathbf{k}_1, \omega_1;\ \ldots;\ \mathbf{k}_n, \omega_n)\varphi(\mathbf{k}_1, \omega_1)\ldots\varphi(\mathbf{k}_n, \omega_n), \tag{2.9}$$

где [1])

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \varphi(\mathbf{r}, t)\, e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}, \tag{2.10}$$

$$\mu^{(n)}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n) = \frac{1}{n!}\sum \mathscr{P} \int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{0} dt_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \times$$

$$\times \psi^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \ldots; \mathbf{r}_n, t_n) \exp\Big[i \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{k}_l \mathbf{r}_l - \omega_l t_l)\Big], \tag{2.11}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_n,\ \omega = \omega_1 + \ldots + \omega_n.$$

В (2.11) $\Sigma\mathscr{P}$ обозначает сумму по всем возможным перестановкам волновых чисел $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n$ (и соответственно частот). Величина $\psi^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \ldots; \mathbf{r}_n, t_n)$ определяется формулой

$$\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r},\ t_1 - t; \ldots; \mathbf{r}_n - \mathbf{r},\ t_n - t) = (-1)^n 4\pi \sum_j n_j \times$$

$$\times \langle [\ldots[\rho_j(\mathbf{r}, t),\ \rho_j(\mathbf{r}_1, t_1)]\ldots\rho_j(\mathbf{r}_n, t_n)] f_j^0 \rangle. \tag{2.12}$$

Следуя [15], будем называть величины $\mu(\mathbf{k}, \omega; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n)$ откликами n-го порядка. Для удобства мы ввели в число аргументов откликов волновые векторы $\mathbf{k}$ и частоты ω, причем всюду нужно считать, что отклики $\mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n)$ отличны от нуля лишь при условии

$$\mathbf{k} = \sum_{l=1}^{n} \mathbf{k}_l,\ \omega = \sum_{l=1}^{n} \omega_l.$$

Переходя в уравнении (2.1) к фурье-компонентам, получаем динамическое уравнение для волн с учетом нелинейных эффектов до третьего порядка включительно:

$$k\omega\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi \mathbf{J}^{(3)}(\mathbf{k}, \omega), \tag{2.13}$$

где $\mathbf{J}^{(2)}$ и $\mathbf{J}^{(3)}$ определяются формулой (2.9), а $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы для продольных колебаний:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \mu^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) / k^2. \tag{2.14}$$

Будем решать уравнение (2.13) последовательными приближениями, приняв в качестве первого приближения решение линеаризованного уравнения:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 0. \tag{2.15}$$

---

[1]) Нормировочный объем везде положен равным единице.

Если дисперсионное уравнение $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0$ имеет вещественные корни $\omega_{\mathbf{k}}$, то решение уравнения (2.15) имеет вид $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi\varphi_{\mathbf{k}}\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$. При наличии поглощения или неустойчивости $\omega_{\mathbf{k}}$ является комплексным. В этом случае решение уравнения (2.15) можно представить в виде

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi\varphi_{\mathbf{k}}\Delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}), \tag{2.16}$$

$$\Delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_{\mathbf{k}} + i\delta}\right), \tag{2.16a}$$

где δ является символом, указывающим правило обхода полюсов при интегрировании выражения в (2.16а) по ω: в первом члене в скобках полюс обходится снизу, во втором — сверху, независимо от того, какой знак имеет[2] $\operatorname{Im}\omega_{\mathbf{k}}$. Решение уравнения (2.15), зависящее от времени, можно представить в виде

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega,$$

что с учетом правил обхода полюсов в $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ приводит к $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \varphi_{\mathbf{k}}\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$ при всех t.

Используя (2.16), получаем для второго и третьего приближений выражения вида

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi k^2\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\int d\omega' d\omega''\,\delta(\omega - \omega' - \omega'') \times$$
$$\times\,\mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}'\,\omega'; \mathbf{k}'', \omega'')\varphi^{(1)}(\mathbf{k}', \omega')\varphi^{(1)}(\mathbf{k}'', \omega''), \tag{2.17}$$

$$\varphi^{(3)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 k^2\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''+\mathbf{k}'''=\mathbf{k}}\int d\omega' d\omega'' d\omega'''\,\delta(\omega - \omega' - \omega'' - \omega''') \times$$
$$\times\left\{2\sum_{\mathbf{q}}\int\frac{d\Omega\,\delta(\omega - \omega' - \Omega)}{q^2\varepsilon(\mathbf{q}, \Omega)}\,\mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{q}, \Omega) \times\right.$$
$$\left.\times\,\mu(\mathbf{q}, \Omega; \mathbf{k}'', \omega''; \mathbf{k}''', \omega''') + \mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega''; \mathbf{k}''', \omega''')\right\}\times$$
$$\times\,\varphi^{(1)}(\mathbf{k}', \omega')\,\varphi^{(1)}(\mathbf{k}'', \omega'')\,\varphi^{(1)}(\mathbf{k}''', \omega'''). \tag{2.18}$$

Вычислим теперь $d\overline{|\varphi(\mathbf{k}, t)|^2}/dt$, ограничиваясь членами до четвертого порядка по $\varphi_{\mathbf{k}}$. Черта означает усреднение по фазам начальных амплитуд $\varphi_{\mathbf{k}}$, фигурирующих в первом приближении (2.16). Эти фазы, как и в [6, 7], предполагаем хаотически распределенными для разных $\mathbf{k}$. Представляя $\varphi(\mathbf{k}, t)$ в виде интеграла Фурье, получаем

$$\frac{d}{dt}\overline{|\varphi(\mathbf{k}, t)|^2} = \frac{1}{(2\pi)^2}\operatorname{Im}\int d\omega\, d\omega'\,(\omega - \omega')\,\overline{\varphi(\mathbf{k}, \omega)\,\varphi^*(\mathbf{k}, \omega')}\, e^{-i(\omega-\omega')t} =$$
$$= 2\gamma_{\mathbf{k}}|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{(2\pi)^2}\operatorname{Im}\int d\omega\, d\omega'\,(\omega - \omega')\,[\overline{2\varphi^{(3)}(\mathbf{k}, \omega^{(1)})\varphi^{(1)*}(\mathbf{k}, \omega')} +$$
$$+\,\overline{\varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)\,\varphi^{(2)*}(\mathbf{k}, \omega')}]\, e^{-i(\omega-\omega')t}, \tag{2.19}$$

[2] Удобно рассматривать δ, как некоторую функцию от ω, отличную от нуля лишь в сколько угодно малом интервале вблизи точки $\omega = \operatorname{Re}\omega_{\mathbf{k}}$, причем в этой точке $\delta > |\operatorname{Im}\omega_{\mathbf{k}}|$. Тогда интегрирование выражения в (2.16) можно проводить по вещественной оси.

где $\gamma_{\mathbf{k}} = \operatorname{Im} \omega_{\mathbf{k}}$ — линейный инкремент или декремент волны. В членах четвертого порядка по φ мы пренебрежем мнимой частью $\omega_{\mathbf{k}}$, что является оправданным при[3] $|\gamma_{\mathbf{k}}| \ll |\omega_{\mathbf{k}}|$. При этом $\Delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ в (2.16) заменяется на δ-функцию. Подставляя в (2.19) $\varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$ и $\varphi^{(3)}(\mathbf{k}, \omega)$ из (2.17) и (2.18), получаем кинетическое уравнение для волн в виде

$$\frac{d}{dt}\overline{|\varphi(\mathbf{k}, t)|^2} = 2\gamma_{\mathbf{k}}|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{\mathbf{k}^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'}\left\{\operatorname{Im}\sum_{\mathbf{k}'}\left[8\int\frac{d\omega\,\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega)}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2\,\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega)} \times\right.\right.$$
$$\times \mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega)\,\mu(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) +$$
$$\left. + 6\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})\right]|\varphi_{\mathbf{k}}|^2|\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 +$$
$$\left. + \frac{4\pi}{\varepsilon_{\mathbf{k}}'}\sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}|\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}'', \omega_{\mathbf{k}''})|^2|\varphi_{\mathbf{k}'}|^2|\varphi_{\mathbf{k}''}|^2\,\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})\right\}, \qquad (2.20)$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}' = \frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}.$$

В связи с уравнением (2.20) необходимо заметить, что все, изложенное выше, представляло собой формальное разложение в ряд по степеням поля колебаний, соответствующее обычной теории возмущений. Однако при таком разложении появляются расходимости, которые устраняются некоторой перенормировкой, отвечающей переходу к квазилинейной теории. Так, например, в выражении для $\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$ встречается расходящийся член, пропорциональный

$$\int\limits_{-\infty}^{0} dt' \int\limits_{-\infty}^{t'} dt'' \int\limits_{-\infty}^{t''} dt''' \langle[[[\rho_{-\mathbf{k}}(0), \rho_{\mathbf{k}}(t')]\,\rho_{\mathbf{k}'}(t'')]\,\rho_{-\mathbf{k}'}(t''')]\,f^0\rangle \times$$
$$\times \exp\{-i[\omega_{\mathbf{k}}t' + \omega_{\mathbf{k}'}(t'' - t''')]\}, \qquad (2.21)$$

где $\rho_{\mathbf{k}}(t)$ — компонента Фурье от $\rho(\mathbf{r}, t)$, которая содержит скобку Пауссона $[\rho_{-\mathbf{k}}(0), \rho_{\mathbf{k}}(t')]$, идентичную скобке, входящей в ток первого порядка. Аналогичные члены встречаются и в токах высших порядков. Можно показать [16], что суммирование бесконечного ряда, состоящего из таких членов, эквивалентно квазилинейной перенормировке тока первого порядка, а именно, замене в выражении (2.12) невозмущенной функции распределения f^0 на медленно меняющуюся функцию распределения $f^0(t)$. Это приведет к соответствующей перенормировке $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ и замене линейного инкремента на квазилинейный. Таким образом, всюду в дальнейшем все члены типа (2.21) будут опускаться, а функция распределения f^0 и, соответственно, $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ будут считаться такими же, как и в квазилинейной теории[4]. Полное уравнение для функции распределения фона с учетом как квазилинейной перенормировки, так и взаимодействия волн, имеется, например, в [14, 16] и здесь не рассматривается.

Заметим теперь, что в интеграле по ω в правой части уравнения (2.20) при $\omega = \omega_{\mathbf{k}''}$, $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ подынтегральное выражение имеет полюс, так

---

[3] Это означает, что мы пренебрегаем членами порядка $\gamma_{\mathbf{k}}\tau^{-1}/\omega_{\mathbf{k}}^2$, где τ — характерное время изменения энергии волны в результате нелинейного взаимодействия.

[4] По этой причине в формуле (3.12) для $\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$ опущены два члена с $\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}, \Omega''; \mathbf{k}', \Omega'; -\mathbf{k}', \Omega''')$, $\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}, \Omega''; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}', \Omega')$.

как $\varepsilon(\mathbf{k}'', \omega_{\mathbf{k}''}) = 0$. При интегрировании этот полюс должен обходиться сверху. Поэтому можно написать

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{k}'', \omega) = \mathrm{P}\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}'', \omega)} - \pi i\frac{\delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}''})}{\varepsilon'(\mathbf{k}'', \omega_{\mathbf{k}''})},$$

где P — символ главного значения.

Далее, удобно ввести вместо $|\varphi_{\mathbf{k}}|^2$ «число волн» (квазичастиц), $n_{\mathbf{k}}$, которое определяется соотношением

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi}\omega_{\mathbf{k}}^{-1}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)]_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}} k^2|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{8\pi}k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'|\varphi_{\mathbf{k}}|^2, \tag{2.22}$$

так что $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ есть спектральная плотность энергии колебаний. Введем также величины

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 8\pi\frac{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}{|\varepsilon_{\mathbf{k}}'|}, \tag{2.23}$$

$$M_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}(\omega', \omega'') = (8\pi)^{3/2}\frac{\mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'')}{|\mathbf{k}^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'^2\varepsilon'_{\mathbf{k}'}\mathbf{k}''^2\varepsilon_{\mathbf{k}''}'|^{1/2}}, \tag{2.24}$$

$$N_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = (8\pi)^2\frac{\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})}{|\mathbf{k}^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'\mathbf{k}'^2\varepsilon_{\mathbf{k}'}'|}. \tag{2.25}$$

После этого кинетическое уравнение для волн примет вид

$$\begin{aligned}\frac{dn_{\mathbf{k}}}{dt} &= 2\gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \\ &+ \frac{1}{8\pi}\Big\{\operatorname{Im}\sum_{\mathbf{k}'}\Big[8\mathrm{P}\frac{M_{\mathbf{k}',\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})M_{-\mathbf{k}',\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}})}{D(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})} + 6N_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\Big]n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}'} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\Big[|M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})|^2 n_{\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}''} - 2\frac{\omega_{\mathbf{k}''}}{|\omega_{\mathbf{k}''}|}\times \\ &\times \operatorname{Re}M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})M_{-\mathbf{k}'\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}})n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}'}\Big]\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''})\Big\}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

3. Соотношения симметрии для кинетического уравнения

Величины $\psi^{(2)}$, $\psi^{(3)}$ из (2.12), определяющие отклики второго и третьего порядков, удовлетворяют определенным соотношениям симметрии, вытекающим из свойств скобок Пуассона. Эти соотношения оказываются весьма полезными при исследовании кинетического уравнения для волн (2.26). Рассмотрим сначала свойства откликов второго порядка. Из (2.12) нетрудно получить

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') = -\psi^{(2)}(-\mathbf{r}', -t'; \mathbf{r}''-\mathbf{r}', t''-t'), \tag{3.1}$$

$$\psi^{(2)}(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'') + \psi^{(2)}(\mathbf{r}''-\mathbf{r}'; t''-t'; -\mathbf{r}', -t') + \psi^{(2)}(-\mathbf{r}'', -t''; \mathbf{r}'-\mathbf{r}''; t'-t'') = 0. \tag{3.2}$$

Из (3.1), (3.2) непосредственно еще не вытекают какие-либо соотношения для величины μ, определенной формулой (2.11), так как интегрирование в ней по t производится по полуоси от $-\infty$ до 0. Однако если мы введем полную компоненту Фурье функции $\psi^{(2)}$:

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}'', \Omega'') = \int d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''\int_{-\infty}^{\infty}dt'dt''\psi(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t'')\times$$

$$\times\exp i(\mathbf{k}'\mathbf{r}' + \mathbf{k}''\mathbf{r}'' - \Omega't' - \Omega''t''), \tag{3.3}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'', \qquad \Omega = \Omega' + \Omega'',$$

то для нее из (3.1), (3.2) следует

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\ \mathbf{k}',\Omega';\ \mathbf{k}'',\Omega'') = -\mu(-\mathbf{k}',-\Omega';\ -\mathbf{k},-\Omega;\ \mathbf{k}'',\Omega''), \tag{3.4}$$

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\ \mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'') + \tilde{\mu}(-\mathbf{k}',-\Omega';\ \mathbf{k}'',\Omega'';\ -\mathbf{k},-\Omega) + \\ + \tilde{\mu}(-\mathbf{k}'',-\Omega'';\ -\mathbf{k},-\Omega;\ \mathbf{k}',\Omega') = 0. \tag{3.5}$$

Интересующий нас отклик $\mu^{(2)}$ связан с $\tilde{\mu}^{(2)}$ соотношением

$$\mu(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega';\mathbf{k}'',\omega'') = \frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\Omega' d\Omega''}{\omega-\Omega+i\varepsilon}\times \\ \times\left\{\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'')}{\omega''-\Omega''+i\varepsilon}+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{\omega'-\Omega'+i\varepsilon}\right\}. \tag{3.6}$$

Для уяснения смысла формулы (3.6) рассмотрим подробнее структуру величин $\tilde{\mu}(\mathbf{k},\ \Omega;\ \mathbf{k}',\ \Omega';\ \mathbf{k}'',\ \Omega'')$. Подставляя $\psi^{(2)}$ из (2.12) в (3.3), получаем после интегрирования по $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'') = \sum_j 4\pi e_j^3 n_j\int_{-\infty}^{\infty} dt' dt''\times \\ \times\langle[[\delta(\mathbf{r}_0),\exp i(\mathbf{k}'\mathbf{r}(t')-\Omega' t')]\exp i(\mathbf{k}''\mathbf{r}(t'')-\Omega'' t'')]f_j^0\rangle. \tag{3.7}$$

В скобках Пуассона подразумевается дифференцирование по лагранжевым переменным $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{p}_0$, а угловые скобки означают интегрирование по ним. При наличии постоянного магнитного поля вместо $\mathbf{r}(t)$ надо подставить

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0 \mathbf{v}(t')dt' = \mathbf{r}_0 + \frac{[\mathbf{h}\mathbf{v}(t)]}{\omega_H} - \frac{[\mathbf{h}\mathbf{v}_0]}{\omega_H} + \mathbf{h}(\mathbf{h}\mathbf{v}_0)t, \tag{3.8}$$

где ω_H — ларморовская частота (соответствующих частиц), $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{H}_0$. После интегрирования по t', t'' вместо экспонент в (3.7) появятся δ-функции вида $\delta(\Omega'-k_z'v_z-n'\omega_H)$ и $\delta(\Omega''-k_z''v_z-n''\omega_H)$, где n', n'' — целые числа. Существенно при этом, что в δ-функции входят Ω и $\mathbf{k}$ с одним и тем же индексом. На эти δ-функции действуют некоторые дифференциальные операторы по импульсам $\mathbf{p}$. В случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует, величины $\tilde{\mu}$ принимают особенно простой вид. В этом случае $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ и из (3.7) следует

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'') = \\ = \sum_j\frac{\omega_{0j}^2 e_j}{m_j}\int d\mathbf{v}\,\delta(\Omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v})\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left\{\delta(\Omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v})\mathbf{k}''\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right\}, \tag{3.9}$$

где $\omega_{0j} = (4\pi e_j^2 n_j/m_j)^{1/2}$ — ленгмюровская частота. После подстановки (3.9) в (3.6) и выполнения интегрирования по Ω', Ω'' получится выражение такого же типа, как и в (3.9), но вместо $\delta(\Omega-\mathbf{k}\mathbf{v})$ там будут стоять $\Omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\varepsilon$.

После всего сказанного ясно, что, например, в разложении (3.6) для $\mu(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'';\ \omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''};\ \mathbf{k}',\ \omega_{\mathbf{k}}';\ \mathbf{k}'',\ \omega_{\mathbf{k}''})$ полувычеты обусловлены резонансами колебаний с частицами, обладающими скоростями

$$v = \frac{\omega_{\mathbf{k}'}}{k'},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}''}}{k''},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''}}{|\mathbf{k}'+\mathbf{k}''|}\ (\mathbf{H}_0=0), \tag{3.10}$$

$$v = \frac{\omega_{\mathbf{k}'} - n'\omega_H}{k_z'}, \quad \frac{\omega_{\mathbf{k}''} - n''\omega_H}{k_z''}, \quad \frac{\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''} - m\omega_H}{k_z' + k_z''} \quad (\mathbf{H}_0 \neq 0). \quad (3.11)$$

Первые два случая в (3.10), (3.11) отвечают резонансам собственных колебаний (с частотами $\omega_{\mathbf{k}'}$, $\omega_{\mathbf{k}''}$) с частицами плазмы, последний — резонансу вынужденных колебаний (с частотой $\omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}$) с частицами. Во всех нелинейных членах в дальнейшем будем пренебрегать полувычетами, возникающими из-за резонансов на собственных частотах. Оправданием этому является то, что эти резонансы дают вклад уже в линейные члены, и с ним не может конкурировать соответствующий нелинейный вклад.

Для отклика третьего порядка также можно написать соотношение типа (3.6):

$$\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) = -\frac{1}{6(2\pi i)^3}\int \frac{d\Omega'\,d\Omega''\,d\Omega'''}{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega + i\varepsilon} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}, \Omega''; -\mathbf{k}', \Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega''' + i\varepsilon)(-\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega''' + i\varepsilon)} + \right.$$

$$+ \frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega', -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega''' + i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega'' + i\varepsilon)} +$$

$$+ \frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega, -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega'', \mathbf{k}', \Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega' + i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega' + i\varepsilon)} +$$

$$\left. + \frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}, \Omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega' + i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega'' + i\varepsilon)} \right\}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}'', \Omega''; \mathbf{k}''', \Omega''') = \int d\mathbf{r}'\,d\mathbf{r}''\,d\mathbf{r}''' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\,dt''\,dt''' \times$$

$$\times \psi(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}'', t''; \mathbf{r}''', t''') \exp i(\mathbf{k}'\mathbf{r}' + \mathbf{k}''\mathbf{r}'' + \mathbf{k}'''\mathbf{r}''' - \Omega't' - \Omega''t'' - \Omega'''t'''), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''', \quad \Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega'''.$$

Выражение (3.12) написано для тех откликов, которые содержатся в правой части кинетического уравнения (2.26). Заметим далее, что в (3.12) мы опустили два члена, содержащие

$$\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega;\ \mathbf{k}, \Omega'';\ \mathbf{k}', \Omega';\ -\mathbf{k}', \Omega''') \text{ и } \tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega;\ \mathbf{k}', \Omega'';\ -\mathbf{k}', \Omega''';\ \mathbf{k}', \Omega')$$

(см. примечание 4). Величины $\tilde{\mu}^{(3)}$, фигурирующие в (3.12), обладают свойствами симметрии, аналогичными (3.4), (3.5) (см. Приложение). Соотношения (3.6), (3.12) мы будем в дальнейшем называть спектральными разложениями откликов второго и третьего порядков.

Спектральные разложения оказываются полезными при исследовании свойств симметрии откликов. Как показано в Приложении, из свойств $\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega;\ \mathbf{k}', \Omega';\ \mathbf{k}'', \Omega'')$ и формулы (3.6) можно получить следующее соотношение для отклика $\mu(\mathbf{k}, \omega;\ \mathbf{k}', \omega';\ \mathbf{k}'', \omega'')$:

$$\mu(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'') = \mu^*(\mathbf{k}', \omega' - i0; \mathbf{k}, \omega - i0; -\mathbf{k}'', -\omega''). \quad (3.14)$$

Символ $-i0$ после частот в правой части (3.14) означает, что в соответствующем спектральном разложении в знаменателях, содержащих отмеченные частоты, мнимые добавки, определяющие правило обхода полюсов при интегрировании, должны быть заменены на отрицательные.

Введем величину

$$L_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega', \omega'') = (8\pi)^{3/2} \frac{\mu(\mathbf{k}, \omega - i0; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'')}{|k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}' k'^2 \varepsilon_{\mathbf{k}'}' k''^2 \varepsilon_{\mathbf{k}''}'|^{1/2}}. \tag{3.15}$$

Она отличается от $M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega', \omega'')$ (см. формулу (2.24)) лишь знаком мнимой добавки к частоте ω. Из (3.14) вытекает, что

$$M_{\mathbf{k}-\mathbf{k}',\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}'}) = \overset{*}{L}_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}}, -\omega_{\mathbf{k}'}) \tag{3.16}$$

(напомним, что в нелинейных членах мы пренебрегаем полувычетами, связанными с резонансами на собственных частотах). Рассмотрим теперь соотношения симметрии для мнимой части отклика $\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$. Полагая $\omega_{\mathbf{k}} > 0$, $\omega_{\mathbf{k}'} > 0$, разобьем ее на две части:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) = \\ &= \operatorname{Im}\mu^-(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) + \\ &+ \operatorname{Im}\mu^+(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} &\mu^-(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) = \\ &= -\frac{i}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega' d\Omega'' d\Omega'''}{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega + i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega''' + i\varepsilon)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\operatorname{Im}\widetilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}, \Omega''; -\mathbf{k}', \Omega''')}{-\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega''' + i\varepsilon} + \right. \\ &\left. + \frac{\operatorname{Im}\widetilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega'')}{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega'' + i\varepsilon} \right\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} &\mu^+(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) = \\ &= -\frac{i}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega' d\Omega'' d\Omega'''}{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega + i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega' + i\varepsilon)} \times \\ &\times \left\{ \frac{\operatorname{Im}\widetilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega''; \mathbf{k}', \Omega')}{\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega' + i\varepsilon} + \right. \\ &\left. + \frac{\operatorname{Im}\widetilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; -\mathbf{k}', \Omega''', \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}, \Omega'')}{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega'' + i\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Величины $\widetilde{\mu}^{(3)}$, через которые выражается отклик $\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$ в (3.12), могут иметь, вообще говоря, отличные от нуля мнимые и действительные части. Однако оказывается, что их действительные части не дают вклада в [5)] $\operatorname{Im}\mu(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$ (см. Приложение). Поэтому в (3.18), (3.19) мы $\widetilde{\mu}^{(3)}$ везде заменили на $i\operatorname{Im}\widetilde{\mu}^{(3)}$. В Приложении доказано, что для отклика третьего порядка имеет место следующее соотношение симметрии:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\mu^\pm(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) = \\ &= \pm\operatorname{Im}\mu^\pm(\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; -\mathbf{k}, -\omega_{\mathbf{k}}). \end{aligned} \tag{3.20}$$

[5)] Мы признательны А. А. Галееву, который обратил на это наше внимание.

4. Законы сохранения

Представим кинетическое уравнение (2.26) в виде

$$\frac{dn_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + S\{n\} + R^{-}\{n\} + R^{+}\{n\}, \tag{4.1}$$

где

$$S\{n\} = \frac{1}{16\pi} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \Big[|M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''})|^2 n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} - 2\frac{\omega_{\mathbf{k}''}}{|\omega_{\mathbf{k}''}|} \operatorname{Re} M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) \times$$

$$\times M_{-\mathbf{k}'\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} \Big] \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}), \tag{4.2}$$

$$R^{-}\{n\} = \sum_{\mathbf{k}'} R^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\substack{\mathbf{k}' \\ \omega_{\mathbf{k}'}>0}} \Big[\mathrm{P}\frac{L^{*}_{-\mathbf{k}'\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}) M_{-\mathbf{k}'\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}})}{D(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})} +$$

$$+ \frac{3}{2} N^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Big] n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}, \tag{4.3}$$

$$R^{+}\{n\} = \sum_{\mathbf{k}'} R^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{\substack{\mathbf{k}' \\ \omega_{\mathbf{k}'}>0}} \Big[\mathrm{P}\frac{L^{*}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}) M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}})}{D(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'})} +$$

$$+ \frac{3}{2} N^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Big] n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}, \tag{4.4}$$

$$N^{\pm}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = (8\pi)^2 \frac{\mu^{\pm}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})}{|\mathbf{k}^2 \varepsilon_{\mathbf{k}}' \mathbf{k}'^2 \varepsilon_{\mathbf{k}'}'|}. \tag{4.5}$$

В формулах (4.3), (4.4) величины M заменены на L, согласно (3.16). Суммирование в правых частях (4.3), (4.4) проводится только по положительным частотам.

Член $S\{n\}$ описывает «распадное» взаимодействие волн, для которых выполнены условия

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}'} + \omega_{\mathbf{k}''}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}''. \tag{4.6}$$

Взаимодействие волн, описываемое членами $R^{-}\{n\}$ и $R^{+}\{n\}$, которое, в отличие от рассмотренного выше, можно назвать «нераспадным», возникает из-за резонансного взаимодействия волн с частицами. При этом в $R^{-}\{n\}$ существенны резонансы на вынужденных колебаниях с частотами $|\omega_{\mathbf{k}}| - |\omega_{\mathbf{k}'}|$, а в $R^{+}\{n\}$ — с частотами $|\omega_{\mathbf{k}}| + |\omega_{\mathbf{k}'}|$. В большинстве конкретных случаев член $R^{+}\{n\}$ значительно меньше $R^{-}\{n\}$. Соотношение (3.20) можно переписать в виде

$$\operatorname{Im} N^{\pm}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \pm \operatorname{Im} N^{\pm}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}. \tag{4.7}$$

Учитывая очевидные равенства

$$M^{*}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) = M_{-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}(-\omega_{\mathbf{k}'}, -\omega_{\mathbf{k}''}), \; L^{*}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) = L_{-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}(-\omega_{\mathbf{k}'}, -\omega_{\mathbf{k}''}), \tag{4.8}$$

легко находим

$$M_{-\mathbf{k}'\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}) = M^{*}_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'}), \; L_{-\mathbf{k}',\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}}) = L^{*}_{-\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'}). \tag{4.9}$$

Из (4.7), (4.9) следует, что часть ядра кинетического уравнения $R^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ антисимметрична, а $R^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ симметрична, т. е. $R^{-}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -R^{-}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$, $R^{+}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = R^{+}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$. Если «распадным» условиям (4.6) удовлетворить нельзя, а член

$R^+\{n\}$ пренебрежимо мал по сравнению с $R^-\{n\}$, то кинетическое уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{dn_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} R^-_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}.$$

Вследствие антисимметрии $R^-_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ изменение полного числа квазичастиц определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}},$$

откуда видно, что в том случае, когда величины $\gamma_{\mathbf{k}}$ можно считать равными нулю (это может иметь место, например, в результате установления квазилинейного «плато» на функции распределения частиц в области резонанса с собственными колебаниями [2, 3]), то полное число волн (квазичастиц) будет сохраняться: $\Sigma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}$.

Из закона сохранения квазичастиц вытекают важные следствия. Пусть спектр колебаний таков, что их частоты мало изменяются с изменением $\mathbf{k}$. Это имеет место, например, для электронных ленгмюровских колебаний, для которых $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{0e}[1 + {}^3/_2(kr_D)^2]$, где $r_D = v_e / \omega_{0e}$, $kr_D \ll 1$. Вследствие закона сохранения числа квазичастиц в этом случае полная энергия в первом неисчезающем приближении (с точностью до $(kr_D)^2$) будет сохраняться, т. е. нелинейное взаимодействие приводит в этом приближении лишь к перекачке энергии из одной части спектра в другую. Если при этом перекачка происходит от более коротких волн к более длинным, то в следующем приближении по $(kr_D)^2$ нелинейное взаимодействие приводит к суммарному затуханию энергии волн. Если же перекачка волн происходит в обратном направлении, то в следующем приближении имеет место суммарное возрастание энергии волн в пакете [6]. Такой случай осуществляется, например, при наличии токов в плазме (т. е. при движении электронов относительно ионов со скоростью, превышающей некоторую критическую скорость).

Совершенно аналогичные следствия, вытекающие из закона сохранения квазичастиц, имеют место и для колебаний Драммонда — Розенблюта [17], возбуждающихся при прохождении тока вдоль магнитного поля в плазме с $T_e \sim T_i$, для которых частота колебаний весьма близка к ларморовской ионной частоте.

В случае ионно-звуковых колебаний без магнитного поля дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 T_e / m_i (1 + \mathbf{k}^2 r_D{}^2)$$

(для простоты положено $T_i = 0$). Эффект перекачки здесь играет основную роль, лишь когда частоты волн близки к ω_{0i}, т. е. $kr_D \gg 1$. В противном случае, вообще говоря, эффекты перекачки и суммарного изменения энергии имеют один и тот же порядок.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma_{\mathbf{k}} > 0$ для всех имеющихся волн. Из (4.1) тогда следует, что

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} > 0,$$

т. е. одно только нелинейное затухание волн не может компенсировать их рост вследствие линейной неустойчивости, и, следовательно, установ-

---

[6] Это, однако, не следует рассматривать как нелинейную неустойчивость, ибо $\Sigma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}$.

ление стационарного состояния в этом случае невозможно. Ошибочные выводы об установлении стационарного состояния в этом случае [8, 9] связаны с тем, что из-за громоздкости исходных выражений и выкладок не была замечена антисимметрия ядра кинетического уравнения для волн. Необходимо, однако, отметить, что стационарное состояние может, в принципе, установиться, если для части волн в пакете $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$. (Исследование стационарного состояния для ряда конкретных случаев проведено в [16].)

Рассмотрим, наконец, случай, когда $2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ и $R\{n\}$ в (4.1) являются несущественными, так что основную роль играет «распадное» взаимодействие волн (случай «прозрачной» среды). Учитывая (3.16), «распадный» член в кинетическом уравнении (4.1) можно переписать в виде

$$S\{n\} = \frac{1}{16\pi} \sum \{ | M_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''}) |^2 (n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}''}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}) + \\ + 2 | M_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\mathbf{k}'}) |^2 (n_{\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}} + n_{\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}'} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}) \delta(\omega_{\mathbf{k}''} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'}) \}, \quad (4.10)$$

(суммирование по области $\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}$; $\omega_{\mathbf{k}'}, \omega_{\mathbf{k}''} > 0$). Ранее распадная часть кинетического уравнения для волн в форме (4.10) была получена в [4, 6] из уравнений гидродинамики замагниченной плазмы. Заметим, что (4.10) по форме совпадает с правой частью кинетического уравнения для фононов в твердом теле при 7) $\hbar \to 0$. Из формулы (4.10) непосредственно вытекают законы сохранения энергии и импульса: $\sum n_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} = \mathrm{const}$, $\sum n_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \mathrm{const}$. При этом число квазичастиц $\sum n_{\mathbf{k}}$, разумеется, не сохраняется.

В заключение этого раздела отметим, что форма кинетического уравнения, полученная в настоящей работе, весьма удобна для конкретных приложений, так как отклики μ сравнительно просто вычисляются. (Подробнее см. [16], где рассмотрены кинетические уравнения для потенциальных колебаний в плазме без магнитного поля, а также для колебаний Драммонда — Розенблюта [17], возникающих при наличии продольного тока в магнитном поле.)

5. Кинетическое уравнение для волн с произвольной поляризацией

Обобщим полученные выше результаты на случай колебаний с произвольной поляризацией. Пусть $\mathbf{A}_0$ — векторный потенциал внешнего стационарного поля, $\mathbf{A}$ — потенциал переменного поля колебаний. Нам будет удобно пользоваться калибровкой, в которой скалярный потенциал $\varphi = 0$, так что $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A} / \partial t$, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{A}_0)$. Из уравнений Максвелла получаем

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \quad (5.1)$$

Гамильтониан взаимодействия $\mathscr{H}^{int}$, описывающий взаимодействие частиц с полем волн, имеет вид

$$\mathscr{H}^{int} = -\frac{e}{mc}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0\right)\mathbf{A} + \frac{e^2}{mc^2}\mathbf{A}^2, \quad (5.2)$$

$\mathscr{H}^{int}$ является нелинейным по $\mathbf{A}$. Кроме того, скорость частицы, выраженная через ее импульс

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right),$$

7) Квантовый подход к получению распадной части кинетического уравнения для волн в плазме рассматривался Веденовым [18].

зависит не только от векторного потенциала внешнего поля, но и от потенциала поля колебаний. В связи с этим выражение тока через **A** оказывается довольно громоздким. Поступая так же, как и в случае продольных колебаний, находим следующие выражения для вкладов нужного нам порядка по **A** в среднюю плотность тока:

$$J_\alpha^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \frac{n_j}{c}\Big\{\int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' \langle [j_\alpha(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t')] f^0\rangle \times$$
$$\times A_\beta(\mathbf{r}', t') - \frac{e_j^2}{m_j} A_\alpha(\mathbf{r}, t)\Big\}, \qquad (5.3)$$

$$J_\alpha^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \frac{n_j}{c^2}\Big\{\int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \int_{-\infty}^{t'} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \times$$
$$\times \langle [j_\alpha(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t)] j_\gamma(\mathbf{r}'', t'') f^0\rangle \times$$
$$\times A_\beta(\mathbf{r}', t') A_\gamma(\mathbf{r}'', t'') - \frac{e_j}{2m_j}\int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' (\langle [j_\alpha(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}', t')] f^0\rangle A^2(\mathbf{r}', t') +$$
$$+ 2\langle [\rho(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t')] f^0\rangle A_\alpha(\mathbf{r}, t) A_\beta(\mathbf{r}', t')\Big\}, \qquad (5.4)$$

$$J_\alpha^{(3)}(\mathbf{r}, t) = \sum_j \frac{n_j}{c^3}\Big\{\int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{t''} dt''' \times$$
$$\times \langle [[[j_\alpha(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t')] j_\gamma(\mathbf{r}'', t'')] j_\delta(\mathbf{r}''', t''')] f^0\rangle A_\beta(\mathbf{r}', t') A_\gamma(\mathbf{r}'', t'') \times$$
$$\times A_\delta(\mathbf{r}''', t''') - \frac{e_j}{2m_j}\int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \times$$
$$\times (\langle [[j_\alpha(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t')] \rho(\mathbf{r}'', t'')] f^0\rangle A_\beta(\mathbf{r}', t') A^2(\mathbf{r}'', t'') +$$
$$+ \langle [[j_\alpha(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}', t')] j_\beta(\mathbf{r}'', t'')] f^0\rangle A^2(\mathbf{r}', t') A_\beta(\mathbf{r}'', t'') +$$
$$+ \langle [[\rho(\mathbf{r}, t), j_\beta(\mathbf{r}', t')] j_\gamma(\mathbf{r}'', t'')] f^0\rangle A_\alpha(\mathbf{r}, t) A_\beta(\mathbf{r}', t') A_\gamma(\mathbf{r}'', t'')) +$$
$$+ \frac{e_j^2}{2m_j^2}\int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{t} dt' \langle [\rho(\mathbf{r}, t), \rho(\mathbf{r}', t')] f^0\rangle A_\alpha(\mathbf{r}, t) A^2(\mathbf{r}', t')\Big\}, \qquad (5.5)$$

где

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \qquad \rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)),$$

$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0; t)$ — закон движения частиц во внешнем поле, а угловые скобки, как и в (2.7), означают интегрирование по лагранжевым переменным частиц.

В общем случае связь между фурье-компонентами токов и фурье-компонентами векторного потенциала может быть представлена в виде

$$\frac{4\pi}{c} J_\alpha^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \sum_{\mathbf{k}_1 + \ldots + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}} \int d\omega_1 \ldots d\omega_n \delta(\omega - \omega_1 - \ldots - \omega_n) \times$$
$$\times \varkappa_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n) A_{\alpha_1}(\mathbf{k}_1, \omega_1) \ldots A_{\alpha_n}(\mathbf{k}_n, \omega_n). \qquad (5.6)$$

Величины $\varkappa$, так же как и μ, мы будем называть откликами и будем считать, что они отличны от нуля лишь при условии

$$\mathbf{k}=\sum_{l=1}^{n}\mathbf{k}_l, \qquad \omega=\sum_{l=1}^{n}\omega_l.$$

При получении кинетического уравнения для колебаний с произвольной поляризацией возникает усложнение, по сравнению со случаем продольных колебаний, вызванное тем, что исходное уравнение (5.1) является векторным. Совершая преобразование Фурье и ограничиваясь токами до третьего порядка по A, получаем из (5.1)

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)+k_\alpha k_\beta-\mathbf{k}^2\delta_{\alpha\beta}\right]A_\beta(\mathbf{k},\omega)=$$
$$=-\frac{4\pi}{c}[J_\alpha^{(2)}(\mathbf{k},\omega)+J_\alpha^{(3)}(\mathbf{k},\omega)], \qquad \varepsilon_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+\frac{c^2}{\omega^2}\varkappa_{\alpha\beta}. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) будем решать методом последовательных приближений. В качестве первого приближения $\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)$ примем решение линеаризованного уравнения

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{k},\omega)=2\pi c_{\mathbf{k}}{}^r\mathbf{a}^r(\mathbf{k})\,\Delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}}{}^r), \tag{5.8}$$

где $\Delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}})$ определено формулой (2.16а), $\mathbf{a}^r(\mathbf{k})$ — векторы поляризации, удовлетворяющие линеаризованному уравнению при $\omega=\omega_{\mathbf{k}}{}^r$; $\omega_{\mathbf{k}}{}^r$ — собственные частоты колебаний, $c_{\mathbf{k}}{}^r$ — скалярные амплитуды, индекс r определяет поляризацию. Собственные частоты $\omega_{\mathbf{k}}{}^r$ могут быть найдены из дисперсионного уравнения, которое получается, если определитель левой части системы (5.7) приравнять нулю.

Как и раньше, мы ограничиваемся случаем, когда $|\gamma_{\mathbf{k}}|\ll|\omega_{\mathbf{k}}|$. Будем нормировать векторы поляризации $\mathbf{a}(\mathbf{k})$ так, чтобы $|c_{\mathbf{k}}|^2$ имело смысл плотности числа квантов $n_{\mathbf{k}}$, т. е. $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ было бы спектральной плотностью энергии $W(\mathbf{k})$. Как известно [19], спектральная плотность энергии определяется соотношением

$$W(\mathbf{k})=\frac{1}{8\pi}\left\{k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta+\frac{\omega_k{}^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)]_{\omega=\omega_k}\right\}\times$$
$$\times A_\alpha{}^*(\mathbf{k},\omega)A_\beta(\mathbf{k},\omega), \tag{5.9}$$

откуда легко получить следующее условие нормировки для $a(k)$:

$$\frac{1}{8\pi}\left[k^2\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta+\frac{\omega_k{}^2}{c^2}(\omega\varepsilon_{\alpha\beta})'_{\omega=\omega_k}\right]a_\alpha{}^*(\mathbf{k})a_\beta(\mathbf{k})=|\omega_k|. \tag{5.10}$$

Заметим, что (5.9), (5.10) имеют смысл лишь для почти «прозрачной» среды, т. е. когда антиэрмитовой частью $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно пренебречь [19]. Именно этот случай мы и рассматриваем, предполагая $|\gamma_{\mathbf{k}}|\ll|\omega_{\mathbf{k}}|$.

Чтобы найти следующее приближение $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{k},\omega)$, нужно в правой части (5.7) удержать члены второго порядка по $c_{\mathbf{k}}$, а в левую часть вместо $\mathbf{A}(\mathbf{k},\omega)$ подставить $\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{k},\omega)$. С помощью (5.6), (5.8) получаем

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}(k,\omega)+k_\alpha k_\beta-k^2\delta_{\alpha\beta}\right]A_\beta^{(2)}(k,\omega)= \tag{5.11}$$
$$=-2\pi\sum_{k',k''}\varkappa_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'},\mathbf{k}'',\omega_{\mathbf{k}''})a_\beta(k')a_\gamma(k'')c_{k'}c_{k''}\delta(\omega-\omega_{k'}-\omega_{k''}).$$

Здесь и дальше k обозначает совокупность компонент волнового вектора $\mathbf{k}$ и индекса поляризации r, а суммирование по k — суммирование по $\mathbf{k}$ и r. Решение уравнения (5.11) имеет вид

$$\mathbf{A}^{(2)}(k, \omega) = -2\pi \sum_r \frac{\mathbf{a}^r(k, \omega)}{D^r(k, \omega)} \sum_{k', k''} M_{k'k''}(\omega_{k'}, \omega_{k''}) c_{k'} c_{k''} \delta(\omega - \omega_{k'} - \omega_{k''}), \tag{5.12}$$

где введены обозначения

$$M_{k_1 \ldots k_n}(\omega_1, \ldots, \omega_n) = a_\alpha^+(k, \omega) a_{\alpha_1}(k_1, \omega_1) \ldots a_{\alpha_n}(k_n, \omega_n) \times$$
$$\times \varkappa_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n), \tag{5.13}$$

$$D(k, \omega) = \lambda(k, \omega) \mathbf{a}^+(k, \omega) \mathbf{a}(k, \omega), \tag{5.14}$$

$\lambda(k, \omega)$ — собственные значения, а $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \omega)$ — собственные векторы уравнения

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega) + k_\alpha k_\beta - k^2 \delta_{\alpha\beta}\right] a_\beta(k, \omega) = \lambda(k, \omega) a_\alpha(k, \omega), \tag{5.15}$$

$\mathbf{a}^+(k, \omega)$ — собственные векторы уравнения, сопряженного (5.15).

При вычислении нелинейных приближений мы всюду пренебрегаем неэрмитовой частью $\varepsilon_{\alpha\beta}(k, \omega_k)$. Продолжая итерацию, легко находим третье приближение:

$$\mathbf{A}^{(3)}(k, \omega) = 2\pi \sum_r \frac{\mathbf{a}^r(k, \omega)}{D^r(k, \omega)} \sum_{k', k'', k'''} \left\{ 2 \sum_q \int \frac{d\omega' \delta(\omega - \omega_k + \omega')}{D(q, \omega')} \times \right.$$
$$\left. \times M_{k'q}(\omega_{k'}, \omega') M_{k''k'''}(\omega_{k''}, \omega_{k'''}) + M_{k'k''k'''}(\omega_{k'}, \omega_{k''}, \omega_{k'''}) \right\} \times$$
$$\times c_{k'} c_{k''} c_{k'''} \delta(\omega - \omega_{k'} - \omega_{k''} - \omega_{k'''}); \tag{5.16}$$

$M_{k'k''k'''}(\omega_{k'}, \omega_{k''}, \omega_{k'''})$, $D(q, \omega')$ определяются формулами (5.13), (5.14).

Дальнейшая процедура получения кинетического уравнения для волн с произвольной поляризацией полностью совпадает с примененной в разделе 2 для случая продольных волн. Проводя соответствующие вычисления, получаем

$$\frac{dn_k}{dt} = 2\gamma_k n_k +$$
$$+ \frac{1}{8\pi} \left\{ \operatorname{Im} \sum_{k'} \left[8\mathrm{P} \frac{M_{k', k-k'}(\omega_{k'}, \omega_k - \omega_{k'}) M_{-k'k}(-\omega_{k'}, \omega_k)}{D(k - k', \omega_k - \omega_{k'})} + 6N_{kk'} \right] \times \right.$$
$$\times n_k n_{k'} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} \left[|M_{k'k''}(\omega_{k'}, \omega_{k''})|^2 n_{k'} n_{k''} - \right.$$
$$- 2 \frac{\omega_{k''}}{|\omega_{k''}|} \operatorname{Re} \{ M_{k'k''}(\omega_{k'}, \omega_{k''}) M_{-k'k}(-\omega_{k'}, \omega_k) \} \times$$
$$\left. \left. \times n_k n_{k'} \right] \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \right\}, \tag{5.17}$$

$$N_{kk'} = M_{k'\ k-k'}(\omega_{k'}, \omega_k - \omega_{k'}). \tag{5.18}$$

При получении (5.17) мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial}{\partial\omega} D(k, \omega)\Big|_{\omega=\omega_k} = 8\pi \frac{\omega_k}{|\omega_k|}.$$

Это равенство легко получить, если умножить обе части уравнения (5.15) на $a_\beta^+(k, \omega)$, продифференцировать по ω и учесть, что $\lambda(k, \omega_k) = 0$, $\mathbf{a}(k, \omega_k) = \mathbf{a}(k)$. Уравнение (5.17) отличается по форме от кинетического уравнения для продольных колебаний (2.26) лишь дополнительным суммированием по поляризациям в правой части. Можно доказать, что для продольных волн величины $D(k, \omega)$, $M_{k'k''}(\omega', \omega'')$, $N_{kk'}$, вычисленные с помощью формул (5.13), (5.14), (5.18), переходят в соответствующие величины, определенные в (2.23) — (2.25). Это доказательство громоздко, и мы его опускаем.

Покажем теперь, как обобщить соотношения симметрии, установленные в разделах 3—4 для продольных колебаний, на случай колебаний с произвольной поляризацией. Разобьем отклики на две части:

$$\varkappa_{\alpha\ldots\alpha_n}(\mathbf{k}, \omega; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n) = \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\ldots\alpha_n}(\mathbf{k}, \omega; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n) + \\ + \varkappa'_{\alpha\ldots\alpha_n}(\mathbf{k},\omega; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n). \qquad (5.19)$$

Часть отклика $\varkappa^0_{\alpha\ldots\alpha_n}$ $(\mathbf{k}, \omega; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n)$ определяется через скобки Пуассона от микротоков в невозмущенной плазме $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$:

$$\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n) = \frac{1}{n!} \sum \mathscr{P} \int d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_n \int\limits_{-\infty}^{0} dt_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \times \\ \times \psi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{r}_1, t_1; \ldots; \mathbf{r}_n, t_n) \exp\left\{ i \sum_{l=1}^{n} (\mathbf{k}_l\mathbf{r}_l - \omega_l t_l) \right\}, \qquad (5.20)$$

$$\psi_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, t_1 - t; \ldots; \mathbf{r}_n - \mathbf{r}, t_n - t) = \\ = \frac{4\pi}{c^{n+1}} \sum_j n_j \langle [\ldots [j_\alpha(\mathbf{r}, t), j_{\alpha_1}(\mathbf{r}_1, t_1)] \ldots j_{\alpha_n}(\mathbf{r}_n, t_n)] f_j^0 \rangle, \qquad (5.21)$$

где $\mathscr{P}$ — оператор перестановок.

Тензоры $\varkappa'_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_n}$ $(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \ldots; \mathbf{k}_n, \omega_n)$ могут быть выражены через тензоры $\varkappa^0$ низшего порядка. Так, например, из (5.4), (5.5) следует, что

$$\varkappa'_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega'') = \frac{1}{2} \Big[\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}} \varkappa_{\alpha\gamma}{}^0(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'; \mathbf{k}'', \omega'') + \\ + \frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\gamma}} \varkappa_{\alpha\beta}{}^0(\mathbf{k} - \mathbf{k}'', \omega - \omega''; \mathbf{k}', \omega') + \frac{\delta_\beta}{\delta A_{0\gamma}} \varkappa_{\alpha\beta}{}^0(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}' + \mathbf{k}'', \omega' + \omega'') \Big], \qquad (5.22)$$

$$\varkappa'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}', \omega'; \mathbf{k}'', \omega''; \mathbf{k}''', \omega''') = \\ = \frac{1}{3} \Big[\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\gamma\delta}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'; \mathbf{k}'', \omega''; \mathbf{k}''', \omega''') +$$

$$+\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\gamma}}\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\delta\beta}(\mathbf{k}-\mathbf{k}''\ \ \omega-\omega'';\ \mathbf{k}''',\ \omega''';\ \mathbf{k}',\ \omega')+$$

$$+\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\delta}}\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{k}''',\ \omega-\omega''';\ \mathbf{k}',\ \omega';\ \mathbf{k}'',\ \omega'')+$$

$$+\frac{\delta_\gamma}{\delta A_{0\beta}}\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\gamma\delta}(\mathbf{k},\ \omega;\ \mathbf{k}'+\mathbf{k}'',\ \omega'+\omega'';\ \mathbf{k}''',\ \omega''')+$$

$$+\frac{\delta_\delta}{\delta A_{0\gamma}}\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\delta\beta}(\mathbf{k},\ \omega;\ \mathbf{k}''+\mathbf{k}''',\ \omega''+\omega''';\ \mathbf{k}',\ \omega')+$$

$$+\frac{\delta_\beta}{\delta A_{0\delta}}\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k},\ \omega;\ \mathbf{k}'''+\mathbf{k}',\ \omega'''+\omega';\ \mathbf{k}'',\ \omega'')\Big]+$$

$$+\frac{1}{6}\Big[\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}}\frac{\delta_\gamma}{\delta A_{0\delta}}\varkappa_{\alpha\gamma}{}^0(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\ \omega-\omega';\ \mathbf{k}''+\mathbf{k}''',\ \omega''+\omega''')+$$

$$+\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\gamma}}\frac{\delta_\delta}{\delta A_{0\beta}}\varkappa_{\alpha\delta}{}^0(\mathbf{k}-\mathbf{k}'',\ \omega-\omega'';\ \mathbf{k}'''+\mathbf{k}',\ \omega'''+\omega')+$$

$$+\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\delta}}\frac{\delta_\beta}{\delta A_{0\gamma}}\varkappa_{\alpha\beta}{}^0(\mathbf{k}-\mathbf{k}'''\ \ \omega-\omega''';\ \mathbf{k}'+\mathbf{k}'',\ \omega'+\omega'')\Big], \qquad (5.23)$$

где $\delta_\alpha / \delta\mathbf{A}_0$ обозначает дифференцирование по $\mathbf{A}_0$ тока с индексом α. Например, первый член в правой части (5.22) имеет вид

$$\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}}\varkappa_{\alpha\gamma}{}^0(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\ \omega-\omega';\ \mathbf{k}'',\ \omega'')=$$

$$=\frac{4\pi}{c^2}\sum_j n_j\int d\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{0} dt'\left\langle\left[\frac{\partial j_\alpha(\mathbf{r},t)}{\partial A_{0\beta}},j_\gamma(\mathbf{r}',t')\right]f^0\right\rangle\exp\{i(\mathbf{k}''\mathbf{r}'-\omega''t')\}.$$

Введем величины

$$M^0_{k'k''}(\omega',\ \omega'')=-a_\alpha{}^+(k,\ \omega)a_\beta(k',\omega')a_\gamma(k'',\ \omega'')\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k},\ \omega;\ \mathbf{k}',\ \omega;'\ \mathbf{k}'',\ \omega''), \qquad (5.24)$$

$$\overset{0}{N}_{kk'}=a_\alpha{}^*(k)a_\beta(k')a_\gamma(k)a_\delta{}^*(k')\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k},\ \omega_k;\ \mathbf{k}',\ \omega_{k'};\ \mathbf{k},\ \omega_k;\ -\mathbf{k}',\ -\omega_{k'});$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{k})=\mathbf{a}(k,\ \omega_k). \qquad (5.25)$$

Из сравнения (5.20), (5.21) и (2.11), (2.12) видно, что эти величины по структуре полностью совпадают с рассмотренными раньше величинами $M_{k'k''}(\omega',\omega'')$, $N_{kk'}$. Отсюда сразу следует, что для них справедливы соотношения симметрии типа (3.16), (4.7). Что касается величин $M'_{k'k''}(\omega',\omega'')$ и $N'_{kk'}$, которые определяются частями откликов $\varkappa'$, то для них аналогичные соотношения непосредственно видны из представления $\varkappa'$ в виде (5.22), (5.23). При этом следует положить

$$N'^{\pm}_{kk'}=a_\alpha{}^*(k)a_\beta(k')a_\gamma(k)a_\delta{}^*(k')\varkappa'^{\pm}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k},\omega_k;\mathbf{k}',\omega_{k'};\mathbf{k},\omega_k;-\mathbf{k}',-\omega_{k'}), \qquad (5.26)$$

$$\varkappa'_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega_k; \mathbf{k}', \omega_{k'}; \mathbf{k}, \omega_k; -\mathbf{k}' -\omega_{k'}) =$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\gamma\delta}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_k-\omega_{k'}; \mathbf{k}, \omega_k; -\mathbf{k}', -\omega_{k'}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\delta_\delta}{\delta A_{0\gamma}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\delta\beta}(\mathbf{k}, \omega_k; \mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_k-\omega_k'; \mathbf{k}', \omega_k')\right] +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\beta}}\frac{\delta_\gamma}{\delta A_{0\delta}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_k-\omega_{k'}; \mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_k-\omega_{k'}), \tag{5.27}$$

$$\varkappa'^{+}_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega_k; \mathbf{k}', \omega_{k'}; \mathbf{k}, \omega_k; -\mathbf{k}', -\omega_{k'}) = \frac{1}{3}\left[\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\delta}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega_k+\omega_{k'};\right.$$
$$\left.\mathbf{k}', \omega_{k'}; \mathbf{k}, \omega_k) + \frac{\delta_\gamma}{\delta A_{0\beta}} \overset{0}{\varkappa}_{\alpha\gamma\delta}(\mathbf{k}, \omega_k; \mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega_k+\omega_{k'}; -\mathbf{k}', -\omega_{k'})\right] +$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\delta_\alpha}{\delta A_{0\delta}}\frac{\delta_\beta}{\delta A_{0\gamma}} \varkappa_{\alpha\beta}{}^{0}(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega_k+\omega_{k'}; \mathbf{k}+\mathbf{k}', \omega_k+\omega_{k'}). \tag{5.28}$$

В (5.27), (5.28) мы опустили члены, связанные с квазилинейной перенормировкой. Таким образом, соотношения симметрии (3.16), (4.7) и все вытекающие из них следствия остаются в силе и в случае колебаний с произвольной поляризацией.

6. Взаимодействие продольных и поперечных колебаний в плазме без магнитного поля

В заключение, в качестве простого примера рассмотрим взаимодействие плазмонов и фотонов в плазме без стационарного магнитного поля. Используя полученные в разделе 5 формулы для матричных элементов $M_{k'k''}(\omega_{k'}, \omega_{k''})$, $N_{kk'}$, $D(k, \omega)$, входящих в кинетическое уравнение для волн, находим, что в рассматриваемом случае эти величины выражаются следующим образом:

$$M_{k'k''}(\omega', \omega'') = -a_\alpha^+(k, \omega)a_\beta(k', \omega')a_\gamma(k'', \omega'')\sum_j \frac{\omega_{0j}^2 e_j}{2m_j c^3}\times$$
$$\times\int d\mathbf{v}\left\{\left[\frac{k_\delta''v_\gamma(k_\alpha'v_\beta + k_\beta v_\alpha + \mathbf{k}\mathbf{k}'v_\beta\partial/\partial k_\alpha)}{\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}+i\varepsilon} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{k_\delta'v_\beta(k_\alpha''v_\gamma + k_\gamma v_\alpha + \mathbf{k}\mathbf{k}''v_\gamma\partial/\partial k_\alpha)}{\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}+i\varepsilon}\right]\frac{1}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\varepsilon} +$$
$$\left. + \frac{\delta_{\alpha\beta}v_\gamma k_\delta''}{\omega''-\mathbf{k}''\mathbf{v}+i\varepsilon} + \frac{\delta_{\alpha\gamma}v_\beta k_\delta'}{\omega'-\mathbf{k}'\mathbf{v}+i\varepsilon} + \frac{\delta_{\beta\gamma}v_\alpha k_\delta}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\varepsilon}\right\}\frac{\partial f}{\partial v_\delta}, \tag{6.1}$$

$$N_{kk'}^{-} = -\sum_j \frac{\omega_{0j}^2 e_j^2}{6m_j^2c^4}\int d\mathbf{v}\left\{a_\alpha(k)a_\beta(k')\left[\left(k_\alpha'v_\beta + k_\beta v_\alpha + \frac{v_\alpha v_\beta \mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega_k-\mathbf{k}\mathbf{v}}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{1}{\omega_k-\mathbf{k}\mathbf{v}} + \delta_{\alpha\beta}\right]\right\}^2\frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{\omega_k-\omega_{k'}-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{v}+i\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \tag{6.2}$$

$$D(k, \omega) = \frac{\omega^2}{c^2}|a(k, \omega)|^2 - [\mathbf{k}\mathbf{a}(k, \omega)]^2 +$$
$$+ \sum_j \frac{\omega_{0j}^2\omega}{c^2}\int\frac{\mathbf{v}\mathbf{a}(k, \omega)}{\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}+i\varepsilon}\mathbf{a}(k, \omega)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v}, \tag{6.3}$$

где $\omega^2_{0j} = 4\pi e_j{}^2 n_j / m_j$, и векторы поляризации нормированы согласно (5.10). Существенно при этом, что вкладом от члена R^+ можно пренебречь, так что здесь справедлив закон сохранения полного числа квазичастиц всех поляризаций при нелинейном «нераспадном» взаимодействии.

С помощью (5.17), (6.1) — (6.3) можно рассматривать самые различные процессы взаимодействия плазмонов и фотонов. Мы не будем здесь обсуждать все возможные случаи, а ограничимся интересным с точки зрения астрофизики (см., например, [20, 21]) вопросом трансформации плазмонов в фотоны (всюду в дальнейшем волновой вектор плазмона обозначается через $\mathbf{p}$, а фотона — через $\mathbf{q}$).

Рассмотрим сначала процесс образования фотонов с частотой, близкой к плазменной частоте ω_{0e}. Этот процесс описывается «нераспадным» членом в кинетическом уравнении для волн. Подставляя в (6.1), (6.2) максвелловскую функцию распределения, легко получаем уравнение, описывающее рассматриваемый процесс. При этом оказывается, что основной вклад вносит рассеяние плазмонов на ионах (ср. с аналогичной ситуацией в [14]). Уравнение имеет вид

$$\frac{dn_{\mathbf{q}}}{dt} = -\frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^3}\frac{\omega_{0e}^2}{n_e T}\int d\mathbf{p}\,\frac{[\mathbf{pq}]^2}{p^2q^2}\,\frac{\Omega}{pv_i}\exp\left[-\left(\frac{\Omega}{pv_i}\right)^2\right]\times$$
$$\times\left\{\left[X\left(\frac{\Omega}{pv_i}\right)-2\right]^2+\pi\left(\frac{\Omega}{pv_i}\right)^2\exp\left[-2\left(\frac{\Omega}{pv_i}\right)^2\right]\right\}^{-1} n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{q}}, \qquad (6.4)$$

где

$$X(z) = 2ze^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}\,dt, \quad \Omega = \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p}}, \qquad (6.5)$$

$$\omega_{\mathbf{q}}{}^2 = \omega_{0e}{}^2 + c^2q^2, \quad \omega_{\mathbf{p}}{}^2 = \omega_{0e}{}^2\left(1+\frac{3}{2}\,p^2 r_D{}^2\right),$$

$v_j = (2T / m_j)^{1/2}$ — тепловые скорости электронов и ионов (плазму для простоты считаем изотермической), $r_D = v_e / \omega_{0e}$ — дебаевский радиус электронов.

Из (6.4) видно, что процесс трансформации волн происходит в направлении от высокочастотных колебаний к низкочастотным. Максимальная скорость роста числа фотонов отвечает области волновых чисел

$$\frac{v_e}{c}\,(p_{min} - \delta p) < q < \frac{v_e}{c}\,p_{min}, \qquad \delta p \sim r_D{}^{-1}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}. \qquad (6.6)$$

Эти фотоны эффективно взаимодействуют с плазмонами в интервале от p_{min} до $p_{min} + \delta p$, эффективное время роста фотонов в области (6.6) по порядку величины равно

$$\tau_i \sim \left[\frac{1}{6(4\pi)^3}\,\frac{\omega_{0e}{}^2 n_{\mathbf{p}}}{n_e T}\,p^2 r_D{}^{-1}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right]^{-1}. \qquad (6.7)$$

Оценка вклада от рассеяния на электронах приводит к времени нарастания фотонов (обусловленному только электронами) в

$$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\left(\frac{c}{v_e}\right)^2\frac{1}{p\Delta\Gamma r_D{}^4}$$

раз большему, чем (6.7), где $\Delta\Gamma$ — фазовый объем плазмонного волнового пакета.

Рассмотрим еще процесс слияния двух плазмонов, в результате которого образуется фотон с частотой порядка $2\omega_{0e}$ (и волновым числом

$q \sim \sqrt{3}\omega_{0e}/c$). Этот процесс описывается «распадным» членом в кинетическом уравнении. Из (6.1), (5.17) получаем

$$\frac{dn_{\mathbf{q}}}{dt}=\frac{\pi}{8}\,\frac{\omega_{0e}v_e^2}{n_eT}\sum_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}=\mathbf{q}}\frac{(p^2-p'^2)\,[\mathbf{p}\mathbf{p}']^2}{p^2p'^2q^2}\,n_{\mathbf{p}}n_{\mathbf{p}'}\delta\left(\omega_{\mathbf{q}}-\omega_{\mathbf{p}'}-\omega_{\mathbf{p}}\right). \qquad (6.8)$$

Авторы выражают благодарность А. А. Галееву и Р. З. Сагдееву за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем соотношения (3.14), (3.20). Согласно (3.6),

$$\mu(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega',\mathbf{k}'',\omega'')=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\Omega'd\Omega''}{\omega-\Omega+i\varepsilon}\left\{\frac{\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'')}{\omega''-\Omega''+i\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{\omega'-\Omega'+i\varepsilon}\right\}. \qquad (\text{П}.1)$$

Преобразуя $\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'')$ в (П.1) с помощью формулы (3.4), а $\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')$ — с помощью (3.5), и затем производя замену переменных интегрирования, получаем

$$\mu(\mathbf{k},\omega;\mathbf{k}',\omega';\mathbf{k}'',\omega'')=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\Omega'd\Omega''}{\omega'-\Omega+i\varepsilon}\left\{\frac{\tilde\mu^*(\mathbf{k}',\Omega;\mathbf{k},\Omega';-\mathbf{k}'',\Omega'')}{-\omega''-\Omega''-i\varepsilon}+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde\mu^*(\mathbf{k}',\Omega;-\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k},\Omega')}{\omega-\Omega'+i\varepsilon}\right\}=\mu^*(\mathbf{k}',\omega'-i0;\mathbf{k},\omega-i0;-\mathbf{k}'',-\omega''). \quad (\text{П}.2)$$

Для доказательства равенства (3.20) нам понадобятся следующие формулы

$$\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega''')=-\tilde\mu(-\mathbf{k}',-\Omega';-\mathbf{k},-\Omega;\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega'''), \qquad (\text{П}.3)$$

$$\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega''')-\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}''',\Omega''';\mathbf{k}'',\Omega'')=$$
$$=-\tilde\mu(-\mathbf{k}'',-\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega''';-\mathbf{k},-\Omega;\mathbf{k}',\Omega')+$$
$$+\tilde\mu(-\mathbf{k}'',-\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega''',\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k},-\Omega), \qquad (\text{П}.4)$$

$$\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}''',\Omega''')=\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}'',\Omega'';\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k}''',\Omega''')-$$
$$-\tilde\mu(-\mathbf{k}',-\Omega';\mathbf{k}'',\Omega'';-\mathbf{k},-\Omega;\mathbf{k}''',\Omega'''), \qquad (\text{П}.5)$$

которые вытекают из свойств скобок Пуассона и аналогичны формулам (3.4) и (3.5). Покажем сначала, что действительные части величин, которые стоят в числителях спектрального разложения (3.12), не дают вклад в $\operatorname{Im}\mu(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'};\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};-\mathbf{k}',-\omega_{\mathbf{k}})$. Для этого достаточно доказать, что та величина $\mu_P(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}}:\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'};\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};-\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'})$, которая получается, если в (3.12) все полюса интегрировать в смысле главного значения, является вещественной. Согласно (3.12), имеем

$$\mu_P(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'};\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};-\mathbf{k}',-\omega_{\mathbf{k}'})=-\frac{1}{6(2\pi i)^3}\,P\int\frac{d\Omega'd\Omega''d\Omega'''}{\omega_{\mathbf{k}}-\Omega}\times$$
$$\times\left\{\frac{\tilde\mu(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}'\Omega';\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega''')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}+\right.$$

$$+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')}+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}+$$

$$+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k},\Omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega')(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')}+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(-\Omega'-\Omega''')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}+$$

$$+\left.\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k};\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k}',\Omega')}{(-\Omega'-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}\right\}. \tag{П.6}$$

В (П. 6) мы временно сохранили перенормировочные члены. Правую часть (П. 6) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{6(2\pi i)^3}\,\mathrm{P}\int d\Omega' d\Omega'' d\Omega''' \times$$

$$\times\left\{\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'')-\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')}\right.+$$

$$+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k},\Omega'')-\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega')(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')}+$$

$$+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}+$$

$$+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(-\Omega'-\Omega''')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}+\left.\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(-\Omega'-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}\right\}. \tag{П.7}$$

Если в первом члене в фигурных скобках числитель преобразовать, согласно (П.4), и затем произвести замену переменных интегрирования, то получим

$$-\frac{\tilde{\mu}^*(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k},\Omega'')-\tilde{\mu}^*(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k}',\Omega';\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')}. \tag{П.8}$$

Отсюда видно, что этот член дает только вещественный вклад в $\mu_{\mathrm{P}}(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'};\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};-\mathbf{k}',-\omega_{\mathbf{k}'})$. Точно так же это доказывается для второго члена. Остальную часть $\mu_{\mathrm{P}}(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};\mathbf{k}',\omega_{\mathbf{k}'};\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}};-\mathbf{k}',-\omega_{\mathbf{k}'})$, преобразуя числитель третьего члена в фигурных скобках в (П.7) с помощью (П.5), а четвертого с помощью (П.3), можно представить в виде

$$-\frac{1}{6(2\pi i)^3}\,\mathrm{P}\int d\Omega' d\Omega'' d\Omega''' \times$$

$$\times\left\{\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''')-\tilde{\mu}(-\mathbf{k}',-\Omega';\mathbf{k},\Omega'';-\mathbf{k},-\Omega;-\mathbf{k},\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}\right.-$$

$$-\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k}',-\Omega''';-\mathbf{k},-\Omega;\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega'')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}+\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'';\mathbf{k}',\Omega';-\mathbf{k}',\Omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(-\Omega'-\Omega''')(-\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega''')}+$$

$$+\left.\frac{\tilde{\mu}(\mathbf{k},\Omega;\mathbf{k},\Omega'',-\mathbf{k}',\Omega''';\mathbf{k}',\Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega)(-\Omega'-\Omega''')(\omega_{\mathbf{k}'}-\Omega')}\right\}=$$

$$= -\frac{i}{3(2\pi i)^3} \mathrm{P} \int d\Omega' d\Omega'' d\Omega''' \left\{ \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}', \Omega; -\mathbf{k}, \Omega'; \mathbf{k}, \Omega''; \mathbf{k}', \Omega''')}{(-\omega_{\mathbf{k}} - \Omega')(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega'')(\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega''')} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}, \Omega''; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}', \Omega')}{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega)(-\Omega' - \Omega''')(\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega')} \right\} \tag{П.9}$$

так, что эта часть тоже оказывается вещественной.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству (3.20). Формулу (3.18) запишем в виде

$$\mu^-(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) =$$

$$= \frac{i}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega' d\Omega'' d\Omega'''}{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega)(-\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega''')} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega'') - \mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; \mathbf{k}, \Omega''; -\mathbf{k}', \Omega''')}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \Omega'' - \Omega''' + i\varepsilon} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}, \Omega; \mathbf{k}', \Omega'; -\mathbf{k}', \Omega'''; \mathbf{k}, \Omega'')}{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega''} \right\}. \tag{П.10}$$

Последним членом в фигурных скобках в (П. 10) мы можем пренебречь, так как все его знаменатели содержат только собственные частоты. Тогда из (П. 4) сразу следует

$$\mathrm{Im}\,\mu^-(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'}) =$$

$$= \frac{i}{6(2\pi i)^3} \int \frac{d\Omega' d\Omega'' d\Omega'''}{(\omega_{\mathbf{k}'} - \Omega)(\omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}} - \Omega'' - \Omega''' - i\varepsilon)(-\omega_{\mathbf{k}} - \Omega''')} \times$$

$$\times \{\mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}', \Omega; \mathbf{k}, \Omega'; -\mathbf{k}, \Omega'''; \mathbf{k}', \Omega'') - \mathrm{Im}\,\tilde{\mu}(\mathbf{k}', \Omega; \mathbf{k}, \Omega'; \mathbf{k}', \Omega''; -\mathbf{k}, \Omega'')\} =$$

$$= -\mathrm{Im}\,\mu^-(\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; -\mathbf{k}, -\omega_{\mathbf{k}}). \tag{П.11}$$

Таким же образом доказывается справедливость соотношения (3.20 для $\mathrm{Im}\,\mu^+(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; \mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}; -\mathbf{k}', -\omega_{\mathbf{k}'})$.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 апреля 1964 г.

Литература

[1] P. A. Sturrok. Proc. Roy. Soc., **242A**, 277, 1957.
[2] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, **1**, 82, 1961.
[3] W. Drummond, D. Pines. Nucl. Fus., Suppl., **3**, 1049, 1962.
[4] M. Camac, A. R. Kantrowitz, M. M. Sitwak, R. M. Patrick, H. E. Petschlek. Nucl. Fus., Suppl., **2**, 423, 1962.
[5] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили. ЖЭТФ, **43**, 2234, 1962.
[6] А. А. Галеев, В. И. Карпман. ЖЭТФ, **44**, 592, 1963.
[7] В. И. Карпман. ДАН СССР, **152**, 587, 1963.
[8] В. И. Петвиашвили. ЖЭТФ, **45**, 1467, 1963.
[9] В. И. Карпман. ПМТФ, *6*, 34, 1963.
[10] А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Садеев. Препринт ИЯФ СО АН СССР, г. Новосибирск, 1963; Атомн. энерг., **15**, 451, 1964.
[11] А. А. Галеев, Л. И. Рудаков. ЖЭТФ, **45**, 547, 1963.
[12] В. И. Петвиашвили. ДАН СССР, **153**, 1295, 1963.
[13] В. П. Силин. ПМТФ, *1*, 31, 1964.
[14] А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР, 157, 1088, 1964.
[15] W. Bernard, H. Callen. Rev. Mod. Phys., **31**, 1017, 1959.

[16] А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1964.
[17] W. Drummond, M. Rosenbluth. Phys. Fluids, 5, 1507, 1962.
[18] А. А. Веденов. Вопросы теории плазмы, *3*, 203, 1963.
[19] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
[20] В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков. Астрономический журнал, **35**, 694, 1958; **38**, 3, 1961.
[21] S. F. Smerd, J. P. Wild, K. V. Sheridan. Australian J. of Phys., **15**, 180, 1962.

THE KINETICS OF WAVES IN A WEAKLY TURBULENT PLASMA

L. M. Altshul, V. I. Karpman

A kinetic equation for waves in a weakly turbulent plasma is derived in a form which yields simple symmetry relations for various terms of the equation. Some consequences of these relations are discussed. It is shown, in particular, that in a number of cases the «number» of waves (quasiparticles) is conserved during «non-decay» interaction.